

**REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FISICAS Y NATURALES**

**Problemas matemáticos de la mecánica de
fluidos. Estructura de las ondas de choque
y combustión**

DISCURSO

LEIDO EN EL ACTO DE SU RECEPCION

POR EL

EXCMO. SR. D. GREGORIO MILLAN BARBANY

Y

CONTESTACION

DEL

EXCMO. SR. D. FELIPE LAFITA BABIO

EL DIA 25 DE JUNIO DE 1975



UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID	
E. T. S. I. AERONÁUTICA	
F. 0. 0. 1.	
FECHA ENTREGA	24-10-2003
EN DOCUMENTO	
EN EXISTENCIA	
SIGNATURA	532. M/L PRO
	d
	R. 12047

M A D R I D

DOMICILIO DE LA ACADEMIA:

VALVERDE, 22.—TELEFONO 221-25-29

1 9 7 5

ISBN: 84-600-6601-0

Depósito Legal: M. 20.347 - 1975

TALLERES GRÁFICOS VDA. DE C. BERMEJO-J. GARCÍA MORATO, 122-MADRID

A Francisco Navarro Borrás. En Memoria.

DISCURSO

DEL

EXCMO. SR. D. GREGORIO MILLAN BARBANY

TEMA

PROBLEMAS MATEMATICOS DE LA MECANICA DE
FLUIDOS. ESTRUCTURA DE LAS ONDAS DE CHOQUE
Y COMBUSTION

Excelentísimo señor Presidente,
Excelentísimos señores Académicos,
Señoras, señores:

Tuve el privilegio de conocer al profesor Puig Adam cuando cursaba mis estudios en la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos, donde él venía profesando algunas enseñanzas ya desde los tiempos de la Escuela Superior de Aeronáutica, anteriores a nuestra guerra civil.

Posteriormente pude tratarle más de cerca, con ocasión de los Seminarios de Ciencias Aeronáuticas que organizaba por aquellas fechas el Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial y en los que participaron ilustres personalidades científicas extranjeras y de nuestro país.

También mantuvimos contactos frecuentes más adelante, en relación con otras actividades académicas y docentes; estas últimas, especialmente sobre materias relativas a las Enseñanzas Técnicas, en su condición de profesor muy distinguido de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid.

Aun cuando el profesor Puig Adam procuraba velar todas sus actuaciones con una extremada modestia, al tratarlo de cerca no resultaba difícil apreciar su extraordinaria calidad humana y el rigor y profundidd con que abordó siempre los temas que le ocuparon.

Fueron éstas las dos grandes vocaciones de su vida: el estudio y la enseñanza.

A ellos consagró todo su tiempo y todos sus afanes, sin otras limitaciones que las de atender a sus afectos familiares, tan profundamente sentidos en un hombre que desbordaba humanidad y el dedicar algunos ratos libres a sus aficiones artísticas, entre las que el cultivo de la música ocupó un lugar preferente.

Las publicaciones que nos ha legado sobre los temas científicos

que trató y las de carácter didáctico que tanto le apasionaron, dan testimonio inequívoco del valor de su trabajo científico.

Y el recuerdo que su bondad, sencillez, talento y entrega ha dejado entre sus colegas y alumnos, en definitiva, entre todos los que pudimos conocerle, atestigua bien a las claras las excepcionales condiciones de su profunda humanidad.

Por ello comprenderán ustedes que al honor que me abruma, al ser recibido en el seno de esta Academia, venga a sumarse el de suceder en ella, inmerecidamente, a un hombre de tan preclara ejemplaridad como lo fue Pedro Puig Adam.

En los años ya lejanos de mis estudios, la organización de las enseñanzas en la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos estaba a cargo del profesor Antonio Pérez Marín, quien tuvo la certera visión de incorporar a su cuadro docente, junto a profesores de nuestra propia tecnología, otros procedentes de la Universidad, de otras Escuelas Técnicas y de los Centros de Investigación.

Ellos aportaron una base científica a nuestros estudios, que el correr de los tiempos acreditó como indispensables, especialmente en tecnologías tan dinámicas como la nuestra, que en aquellas fechas se veía sometida a muy profundas transformaciones, estimuladas por las exigencias militares de la segunda guerra mundial.

Uno de aquellos profesores, Esteban Terradas, a quien el Gobierno había confiado por entonces la misión de presidir la creación del Instituto que hoy lleva su nombre, consideró de la mayor importancia enlazar las tareas del INTA con el conocimiento de los medios y de los programas de trabajo que desarrollaban Instituciones similares en otros países.

Secundado por hombres como Felipe Lafita y Antonio Pérez Marín, Esteban Terradas puso al servicio de este propósito el prestigio internacional de su nombre y en unos años de difícil e injusto aislamiento de nuestro país, hizo del INTA una Cátedra Internacional, por donde desfilaron algunas de las más prestigiosas figuras de la Ciencia y de la Tecnología Aeronáutica de Europa y América, al mismo tiempo que ingenieros españoles recién graduados eran recibidos para completar su formación en diversos centros de investigación y estudio de otros países.

Aquellas relaciones sentaron tradición, fueron continuadas por sus sucesores y se manifiestan hoy en algunas de las colaboraciones

en curso, tanto en el programa aeroespacial como en otras diversas aplicaciones.

Entre los más asiduos visitantes del Instituto hubo uno, Teodoro von Karman, que se identificó desde el comienzo y plenamente con los deseos del INTA y con sus hombres.

El contribuyó como ninguno otro de nuestros visitantes al desarrollo de aquella política de Esteban Terradas, tanto por sí mismo como con la autoridad de su nombre, la cual empleó sin reservas cerca de los Centros y personalidades de otros países para facilitar los propósitos del INTA y fomentar una corriente de intercambios, entonces difíciles, y cuyos óptimos frutos perduran todavía.

Me he permitido evocar antes ustedes estos recuerdos y estos nombres de unos años que fueron críticos para la Tecnología Aeronáutica española, en estos momentos de tan profunda significación para mí, porque fui testigo de excepción y uno de los beneficiarios de los esfuerzos de algunos hombres que tuvieron entonces la noble misión de orientar el futuro de la Tecnología Aeronáutica española y que supieron hacerlo con una visión, generosidad y acierto que creo merecen constancia pública, junto con el profundo reconocimiento de quienes nos formamos en aquellos años, al amparo de las oportunidades que ellos nos brindaron.

* * *

Una de las Ciencias Aplicadas que más genuinamente representa las peculiaridades y requerimientos de la Tecnología Aeronáutica es la Aerodinámica, como rama distinguida de la Mecánica de Fluidos, cuyo desarrollo ha impulsado en forma explosiva desde los albores de la Aviación, a comienzos de nuestro siglo (1), al mismo tiempo que diluía progresivamente las fronteras entre una y otra, bajo las exigencias del impulso tecnológico que aportaron los nuevos sistemas de propulsión y otros descubrimientos.

Resulta por ello esencial, para esta y otras muchas aplicaciones de la técnica, el conocimiento de las leyes que gobiernan el compor-

(1) Para una reseña histórica del desarrollo de la Aerodinámica ver, por ejemplo, el trabajo de R. GIACOMELLI y E. PISTOLESI: *Historical Sketch*, de la «Aerodinámica» de Durand que se menciona más adelante, así como el de S. GOLDSTEIN: *Fluid Mechanics in the First Half of this Century*. «Ann. Rev. in Fluid Mech.», 1969, págs. 128. También, TH. VON KARMAN: *Aerodinámica. Temas seleccionados a la luz de su desarrollo histórico*. INTA, Madrid, 1954.

tamiento de los fluidos bajo el extenso espectro de características y condiciones en que se manifiestan en la naturaleza.

Donde el estado fluido (2) predomina largamente sobre otras formas de agregación de la materia correspondientes a niveles de ordenación más complejos.

Efectivamente, en el espacio exterior a la tierra, la forma más extendida es la de plasma (3), en tanto que, en nuestro planeta, un 70 por 100 de su superficie está cubierta por las aguas y la atmósfera que lo envuelve, si bien contiene tan sólo una millonésima parte de la masa total de la tierra, condiciona de modo fundamental todos los procesos que se desarrollan en ella.

En definitiva, los fluidos participan como vehículos o agentes en la inmensa variedad de procesos naturales, incluidos los biológicos, así como en casi todas las aplicaciones tecnológicas.

Todo lo cual justifica sobradamente la necesidad de desvelar el conocimiento de aquellas leyes y explica el perseverante empeño aplicado a conseguir ese saber, desde los tiempos de Arquímedes hasta nuestros días.

* * *

Uno de los aspectos fundamentales de ese conocimiento es el relativo a su comportamiento mecánico, cuyo desarrollo, en el sentido moderno de esta rama de la Física Matemática, se inicia en el siglo XVII con los trabajos de Isaac Newton, quien aplicó por primera vez los Principios de la Mecánica al movimiento de los fluidos y adquiere su formulación definitiva con las ecuaciones de Euler, para el caso de un fluido ideal, es decir, de un fluido desprovisto de efectos disipativos y con las de Navier-Stokes para el análisis del movimiento de los fluidos viscosos.

Las ecuaciones básicas de la Mecánica de Fluidos se obtienen al aplicar al fluido, considerado como un medio continuo, los Princi-

(2) Matemáticamente un fluido se define como un medio continuo por la condición de que en el estado de equilibrio el tensor de esfuerzos internos es esférico. Ver, por ejemplo, LEIGH, citado más adelante, capítulo VIII, págs. 139 y siguientes.

(3) N. G. VAN KAMPEN y B. U. FELDERHOF: *Theoretical Methods in Plasma Physics*. North-Holland, Amsterdam, 1967.

pios generales de la Mecánica y las Leyes de la Termodinámica (4).

Los principios mecánicos expresan la conservación de la masa y de la cantidad de movimiento y a ello se une la primera Ley de la Termodinámica, que expresa la conservación de la energía.

Bajo condiciones de regularidad suficientes, se obtiene así un sistema de cinco ecuaciones en derivadas parciales para el cálculo de las tres componentes de la velocidad, de la densidad, de la presión y de la energía interna de cada partícula del medio, como funciones del tiempo y de la posición de la misma en cada momento (sistema de referencia de Euler) o de aquél y de la que ocupaba en un instante determinado (sistema de referencia de Lagrange).

Aunque el número de incógnitas enunciado es de seis y las ecuaciones que proporcionan los citados Principios son cinco, si existe equilibrio termodinámico, como se supone generalmente, cualquiera de las tres últimas incógnitas puede expresarse en función de dos de ellas, lo que proporciona la ecuación que falta.

En particular, resulta ventajoso, en muchas ocasiones, sustituir la energía interna por la entalpía, lo que se hace sin dificultad merced a las relaciones termodinámicas del medio; por la entropía, cuya evolución guarda relación con la irreversibilidad de los procesos o bien por la temperatura del fluido.

Si por el contrario, no existe dicho equilibrio, como ocurre, por ejemplo, en los procesos con fenómenos de relajación o con efectos de reacciones químicas en medios de composición variable, es necesario tomar en consideración la cinética de tales fenómenos irreversibles, como veremos más adelante, lo que proporciona un cierto número de ecuaciones complementarias, igual al de componentes independientes que se necesitan para describir el estado del medio (5).

El sistema diferencial que resulta de la aplicación de los Principios generales contiene, además de las magnitudes citadas, otras que dependen de la naturaleza y del estado del medio.

(4) Ver, por ejemplo, alguna de las obras siguientes: C. TRUESDELL: *Continuum Mechanics*. Gordon and Breach Sci. Publ. Inc., Nueva York, 1966; A. C. ERINGEN: *Mechanics of Continua*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1967; L. I. SEDOV: *A Course in Continuum Mechanics*. Wolters-Noordhoff Publ., Groninga, Holanda, 1971; P. GERMAIN: *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson et Cie., París 1973.

(5) Para un estudio de los procesos irreversibles ver, por ejemplo, S. R. DE GROOT y P. MAZUR: *Non-Equilibrium Thermodynamics*. North Holland Publ. Co., Amsterdam, 1969.

Concretamente, además de la presión, aparecen en ellas las seis componentes del tensor de esfuerzos internos, llamado de viscosidad, así como las tres componentes del vector de flujo de calor.

Por consiguiente, para que el sistema resulte determinado es preciso obtener nueve ecuaciones de relación, entre las componentes del tensor de esfuerzos viscosos y las del vector de flujo de calor, de un lado, y las seis magnitudes fluidas anteriormente mencionadas, del otro.

Un fluido es un medio isotrópico, en el que los esfuerzos de viscosidad se relacionan con su movimiento en una forma que depende del comportamiento del mismo y cuya relación se expresa a través de la llamada «ecuación constitutiva del medio» (6).

En 1848, Stokes propuso, como ecuación constitutiva de un fluido viscoso, una relación funcional no lineal entre las componentes del tensor de esfuerzos de viscosidad y las del tensor de velocidades de deformación del medio, de tal naturaleza que la anulación de éstas implica la de aquéllos.

Sin embargo, el propio Stokes, al igual que todos sus sucesores hasta muy recientemente, al utilizar las ecuaciones del movimiento de los fluidos viscosos empleó tan sólo una forma lineal de la ecuación constitutiva, que corresponde a los fluidos llamados newtonianos (7), modelo al que se ajusta perfectamente el comportamiento de la mayoría de los líquidos y gases.

Efectivamente, sólo con el desarrollo de la industria química, ya entrado el siglo xx, y especialmente a causa del comportamiento de algunos plásticos, se hizo necesario estudiar el comportamiento de fluidos no newtonianos, cuyo análisis arranca de los trabajos de Reiner, en 1945, y de Rivlin, en 1949 (8).

Por nuestra parte, en todo lo que sigue, al tratar de fluidos viscosos nos referiremos a fluidos newtonianos (9) en cuyo caso la rela-

(6) Para un estudio de la ecuación constitutiva de los medios continuos, incluído el desarrollo histórico de los conceptos básicos, ver la interesante obra de D. C. LEIGH: *Nonlinear Continuum Mechanics*, Mc Graw-Hill Book Co., Nueva York, 1968.

(7) Fue Isaac Newton también quien expresó por primera vez la idea de una relación lineal entre el esfuerzo de viscosidad de un fluido y la velocidad de deformación del mismo.

(8) Ver LEIGH, ya citado, págs. 197 y sigts.

(9) Para una revisión de la situación actual de la Teoría de los fluidos visco-

ción entre los tensores de esfuerzos y de velocidades de deformación es lineal, como se ha dicho, y se expresa mediante dos coeficientes de proporcionalidad: los llamados primero y segundo coeficientes de viscosidad del fluido, los cuales son funciones termodinámicas del medio, cuyas leyes de variación en función de las variables de estado se determinan experimentalmente o mediante la Teoría Cinética (10).

Por último, el vector del flujo de calor es proporcional al gradiente de temperaturas, a través de un escalar: el coeficiente de conductividad térmica del fluido, el cual es también una función termodinámica del medio.

Como consecuencia de todo esto, resulta que el movimiento más general de un fluido viscoso newtoniano está determinado por un sistema no lineal de cinco ecuaciones en derivadas parciales, del tiempo y de las tres coordenadas espaciales, para el cálculo de las tres componentes de la velocidad, de la presión y de la densidad o de cualquier otra función termodinámica que se exprese mediante ellas.

En dicho sistema, además de las variables citadas, aparecen los coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica, los cuales son funciones termodinámicas del medio, así como las fuerzas másicas tales como las resultantes del campo gravitatorio.

Por último, el sistema es de segundo orden en las derivadas espaciales de las componentes de la velocidad y de la temperatura y de primer orden en las restantes.

Por otra parte, para que un problema quede determinado es necesario fijar las condiciones iniciales y de contorno que corresponden al mismo, las cuales pueden revestir formas muy variadas por lo que respecta a la velocidad, presión y temperatura, en el contacto con paredes, otros fluidos, superficies libres, etc.

Por ejemplo, en el caso de una pared impermeable, la velocidad y temperatura del fluido deben ser iguales a las de aquélla.

En otras ocasiones la condición se refiere a la presión o bien al flujo de calor, que se expresa en función del gradiente de la temperatura, etc.

Sin embargo, la complejidad del sistema diferencial de Navier-Stokes es tal que resulta imposible establecer en forma general el

elásticos, ver el trabajo de R. S. RIVLIN y K. N. SWAYERS: *Nonlinear Continuum Mechanics of Viscoelastic Fluids*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 117-48.

(10) Ver, por ejemplo, J. O. HIRSCHFELDER, CH. F. CURTISS y R. B. BIRD: *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1954.

tipo de condiciones iniciales y de contorno que corresponden al mismo, ya que, según los casos, aquél puede ser un problema de contorno o de condiciones iniciales o mixto (11).

Esa misma complejidad hace que el número de casos para los que se dispone de soluciones exactas sea de unos 80 como máximo, la inmensa mayoría de los cuales se refieren a un fluido incompresible (12) y a situaciones que guardan un interés marginal con los problemas fundamentales de la Mecánica de Fluidos (13).

Por otra parte, el empleo de los métodos de integración numérica resulta muy laborioso y presenta dificultades de estabilidad de integración, que obligan a multiplicar el número de puntos de la red de cálculo a medida que aumenta el número de Reynolds, circunstancia que ha motivado el que este procedimiento sólo haya podido aplicarse con éxito al disponer de calculadores electrónicos, cuyo empleo sistemático está permitiendo cambiar sustancialmente la situación, durante los últimos años.

Por último, a la complejidad propia del sistema vienen a sumarse problemas de estabilidad dinámica que dan lugar a la aparición de fenómenos de turbulencia, cuyo estudio constituye uno de los capítulos más difíciles de toda la Mecánica de Fluidos y requiere la aplicación de la teoría de los campos aleatorios no lineales (14).

* * *

Para eludir la dificultad que plantea una situación como la que origina la complejidad del sistema de Navier-Stokes, caben dos alternativas.

Una primera, consistente en el empleo de modelos simplificados, bien sea de las propiedades del fluido, bien del tipo del movimiento considerado.

(11) Para un estudio más detallado de todo lo que sigue ver, además de la bibliografía que se da en el epígrafe 1 del capítulo I, la excelente obra de F. M. WHITE: *Viscous Fluid Flow*. Mac Graw-Hill Book Co., Nueva York, 1974.

(12) Ver, por ejemplo, R. BERKER: *Handbuch der Physik*. Vol. VIII-2 páginas 1-384, Springer-Verlag, Berlín, 1963.

(13) Un ejemplo de gran interés técnico es el relativo a la lubricación. Ver E. A. SAIBEL y N. A. MACKEN: *The Fluid Mechanics of Lubrication*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1973, págs. 185-212.

(14) Además de la bibliografía que se cita en el epígrafe 2 del capítulo I, ver la obra de J. L. LUMLEY: *Stochastic Tools in Turbulence*. Acad. Press, Nueva York, 1970.

Entre los ejemplos de esta última son clásicos los de las corrientes fuentes de Stokes y de Ossen, para números de Reynolds pequeños (15).

La segunda alternativa consiste en el recurso al método experimental, bajo la guía de la Teoría de la Semejanza Dinámica, para reducir el número de experimentos e interpretar debidamente los resultados.

Es bien sabido que la Mecánica de Fluidos es uno de los campos de la Física donde más extenso uso se ha hecho de este último procedimiento, en un esfuerzo combinado entre los métodos teórico y experimental, que ha producido los más halagüeños resultados (16).

En cuanto al empleo de modelos simplificados de las propiedades del fluido o de las características del movimiento, ha constituido también un recurso teórico de una fecundidad extraordinaria, como podrá comprobarse a lo largo del contenido del presente trabajo.

Si la densidad del fluido es constante, como ocurre con suficiente aproximación para muchas aplicaciones en los líquidos, entonces no solamente se reduce en una unidad el número de incógnitas de las ecuaciones del movimiento, sino que, además, se desacoplan los fenómenos puramente mecánicos, para el cálculo de la presión y de la velocidad, de los termodinámicos para el cálculo de la energía interna y de otras magnitudes.

Por otra parte, las posibilidades de esa aproximación van mucho más allá de lo que corresponde a la Mecánica de Líquidos propiamente dicha, porque se comprueba que los gases se comportan muy aproximadamente como ellos, en tanto la velocidad de su movimien-

(15) J. HAPPEL y H. BRENNER: *Low Reynolds Number Hydrodynamics*. Prentice-Hall, 1965.

(16) Para una descripción de algunas de las técnicas más usuales ver, por ejemplo, aparte de las referencias que se mencionan más adelante en los capítulos siguientes, los volúmenes VIII, *High Speed Problems of Aircraft and Experimental Methods*, y IX, *Physical Measurements in Gas Dynamics and Combustion*, de la Enciclopedia de Princeton: *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsions*, Princeton Univ. Press. También H. WERLE: *Hydrodynamic Flow Visualization*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1973, págs. 361-382. y W. MERZKIRCH: *Flow Visualization*. Acad. Press, Nueva York, 1974. Finalmente, para una interesante exposición sobre la aplicación de los ensayos en el laboratorio al diseño aeroespacial, ver la conferencia de PH. POISSON-QUINTON: *From Wind Tunnel to Flight, the Role of the Laboratory in Aerospace Design*. «Jour. Aircraft», 1968, págs. 193-214, donde se da una extensa bibliografía.

to sea pequeña con respecto a la de propagación del sonido; por ejemplo, inferior a la mitad de ésta.

Esta propiedad ha tenido una influencia decisiva en el desarrollo de la Aerodinámica clásica, que se ha basado íntegramente en el modelo de la Hidrodinámica, hasta que el aumento de la velocidad de los aviones obligó a incorporar progresivamente, en el estudio de aquélla, los efectos de la compresibilidad, lo que ocurrió a partir de la tercera década de nuestro siglo (17).

Hasta entonces, efectivamente, el interés tecnológico de la Dinámica de Gases había quedado circunscrito básicamente, con pocas excepciones, a los problemas planteados por la resistencia de los proyectiles en Balística y por las turbinas de vapor, así como a las oscilaciones de intensidad muy pequeña propias de la Acústica (18).

* * *

Muchos fluidos de interés tecnológico, entre los que se incluyen los gases, el agua y otros líquidos, tienen la propiedad de que los efectos de la viscosidad en su movimiento, así como los de la conductividad térmica, son pequeños, excepto en problemas especiales o en zonas limitadas.

Una aproximación natural, cuya aplicación es incluso anterior al desarrollo de la teoría de los fluidos viscosos, consiste en suponer en tales casos que son nulos sus coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica, con lo que se obtiene el modelo llamado de los «fluidos ideales», cuyas ecuaciones del movimiento estableció Euler, como se ha dicho, a mediados del siglo XVIII, es decir, con cerca de un siglo de antelación a la formulación del sistema de Navier-Stokes, la cual hubo de esperar al desarrollo de la teoría de las deformaciones y esfuerzos de los medios continuos, llevada a cabo en el primer cuarto del siglo XIX por Cauchy, Poisson, Navier y otros.

El empleo del modelo del fluido ideal introduce una simplificación fundamental en el sistema de Navier-Stokes, de cuyas ecuaciones

(17) Para la historia del desarrollo inicial de los efectos de compresibilidad, ver el excelente trabajo de A. BUSEMAN: *Compressible Flow in the Thirties*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 1-12.

(18) La obra clásica sobre esta materia es el célebre tratado de LORD RAYLEIGH: *Theory of Sound*, cuya primera edición data de 1877. Dover Publ., 1945.

desaparecen los términos que contienen las derivadas de orden más elevado.

Circunstancia que obliga a reducir también, consiguientemente, el alcance de las condiciones en los límites.

Por ejemplo, el requerimiento de adherencia del fluido a la pared impermeable propio del fluido viscoso, se sustituye ahora por la simple condición de deslizamiento de aquél a lo largo de la pared, es decir, por la condición de igualdad de las velocidades normales de uno y otra.

Pero este hecho ilustra uno de los problemas más importantes que plantea la naturaleza de la simplificación introducida.

En efecto, la diferencia de condiciones de contorno entre el fluido ideal y el viscoso hace que la solución de un mismo problema para ambos modelos conduzca a resultados esencialmente distintos, al menos en la inmediata proximidad del contorno y ello incluso cuando se hace tender a cero el coeficiente de viscosidad de la solución viscosa, cuyo límite cabría esperar que proporcionase la solución correspondiente al fluido ideal.

Dicho de otro modo, la inevitable diferencia de condiciones de contorno entre ambos casos, hace que la convergencia de la solución viscosa hacia la ideal, cuando la viscosidad tiende a cero, no pueda ser «uniforme» en todo el espacio del movimiento.

Situación que se justifica porque el paso al límite citado plantea un problema de perturbación singular, al hacer desaparecer los términos de grado más alto, en el sistema diferencial del proceso.

Ha sido precisamente esta clase de problemas de la Mecánica de Fluidos la que ha conducido a van Dyke, Cole (19) y otros a elaborar el método de los desarrollos asintóticos acoplados en los problemas de perturbaciones regulares o singulares, lo que ha proporcionado un instrumento sumamente valioso para tratar sistemáticamente y con rigor matemático una gran variedad de problemas, al mismo tiempo que proyecta una luz muy esclarecedora sobre el comportamiento de las soluciones.

De este método, cuyo uso se ha extendido, naturalmente, a otras ramas de la Física, se verán algunos ejemplos en los capítulos siguientes, incluida su aplicación a la teoría de la «Capa Limite» que introdujo Prandtl a comienzos de nuestro siglo, precisamente para resolver el problema que hemos descrito sobre la divergencia de las

(19) Ver las referencias del epígrafe del capítulo I.

soluciones correspondientes al fluido ideal y a uno de viscosidad muy pequeña, en la proximidad de los contornos.

Por lo demás, aunque la explicación de la divergencia se ha referido al efecto de la viscosidad, es claro que hubiera podido hacerse exactamente lo mismo con la de la conductividad térmica.

* * *

La simplificación que produce en el sistema diferencial de Navier-Stokes y en las condiciones de contorno la introducción del modelo de fluido ideal, va más allá de lo que pudiera parecer, con ser mucho, de la supresión de los términos de orden más elevado.

En efecto, se comprueba que entonces existe una clase muy amplia de movimientos en los que la velocidad del fluido deriva de un potencial, lo cual establece una división de aquéllos en dos grandes categorías con niveles de dificultad muy distintos: los movimientos llamados turbillionarios, en que el rotacional de la velocidad es diferente de cero y los movimientos potenciales, mucho más fáciles de tratar en general, porque dicho carácter reduce el cálculo de las tres componentes de la velocidad al de la función escalar del potencial, de la que se deducen aquéllas por simple derivación.

El interés de los movimientos potenciales estriba, no tanto en su facilidad de cálculo, que constituye una tentación, como en el hecho de que muchos de los movimientos reales son muy aproximadamente potenciales, porque la generación de torbellinos se debe a efectos disipativos, que, como hemos dicho, sólo se dan en regiones especiales para fluidos de viscosidad muy pequeña. Se trata, pues, de un caso en el que la Naturaleza ha sabido ser generosa.

En el caso de tales movimientos y bajo condiciones también muy generales, existe además una integral primera, que relaciona el valor de la presión con el de la velocidad y que constituye una generalización de la célebre ecuación obtenida por Daniel Bernoulli, que introdujo la denominación de Hidrodinámica, en 1738.

Por tanto, el problema se reduce entonces a la integración de la ecuación diferencial del potencial de velocidades que se obtiene al eliminar la presión y la densidad del sistema de Euler.

Obtenida ésta, la integral primera antes citada proporciona la distribución de presiones y seguidamente las funciones termodinámicas, unidas a la condición de isentropía, que debe satisfacerse puesto

que el proceso es por naturaleza reversible al haberse eliminado los elementos disipativos, y permite calcular los valores de la densidad, temperatura, etc., con lo que el problema queda resuelto.

Si el fluido es, además, incompresible, como hemos visto que ocurre en la Hidrodinámica y en la Aerodinámica de velocidades pequeñas, entonces la ecuación del potencial de velocidades es la de Laplace, lo que pone a disposición del problema todo el arsenal de conocimientos y de soluciones acumulado por la Teoría del Potencial.

En particular, al tratarse de una ecuación elíptica, las condiciones que determinan la solución en un recinto dado son del tipo de Dirichlet, de Neumann o mixtas, sobre el contorno que lo limita.

Por ejemplo, el requerimiento de que el flujo deslice a lo largo de las paredes se traduce en una condición de von Neumann.

El problema es a menudo «exterior» puesto que suelen interesar corrientes alrededor de obstáculos, y con potencial de doble hoja en algunos de los casos más importantes.

* * *

Un problema básico de la Mecánica de Fluidos, cuyo estudio ha sido objeto de la más permanente atención desde los orígenes de esta ciencia, consiste en determinar la fuerza que produce un fluido sobre un obstáculo de forma dada que se mueve en el seno de aquél según una ley determinada.

La componente de dicha fuerza normal a la dirección del movimiento es la sustentación, cuya generación constituye, naturalmente, uno de los problemas básicos de la Aeronáutica y adquirió importancia especial al desarrollarse esta tecnología.

La componente opuesta a la dirección del movimiento es la resistencia, cuya determinación es un problema tan antiguo como la propia Mecánica de Fluidos.

Pues bien, se demuestra fácilmente que si el fluido es un líquido ideal e indefinido, en reposo a gran distancia del obstáculo; si éste se mueve con velocidad rectilínea y uniforme y si el movimiento de perturbación inducido en el fluido por el desplazamiento del obstáculo es potencial y continuo en todo el espacio, entonces la resistencia del fluido al movimiento de aquél es nula.

Este resultado, a primera vista sorprendente y en flagrante contradicción con los resultados de todas las observaciones experimentales, es la célebre paradoja de D'Alembert (1752) que resulta, según se comprobó más tarde, del comportamiento asintótico, a gran distancia del origen, de las soluciones regulares de la ecuación del potencial.

Y su enunciado constituye la muestra más expresiva del divorcio que originó entre la realidad y la teoría el tratamiento excesivamente idealizado que daba a muchos de sus problemas la Hidrodinámica Clásica (20), en tanto que la Hidráulica servía mucho mejor, con sus métodos empíricos, las necesidades de la ingeniería práctica.

Ocorre, sin embargo, como se ha esclarecido después, que aquella paradoja que tanto preocupó, constituye una ley límite, que puede aproximarse mucho en la práctica, mediante el diseño de contornos fuselados, a los que habitué más tarde el desarrollo de la Aeronáutica.

Pero para llegar a estas conclusiones ha sido necesario profundizar mucho en las causas de la resistencia que, en situaciones como la que da lugar a la paradoja de D'Alembert, se produce a través de cuatro mecanismos distintos, aparte de la que producen los movimientos acelerados del obstáculo, la cual se manifiesta en la forma de la inercia de una «masa virtual», debida a la presencia del fluido.

Existe, efectivamente, una resistencia producida por la separación de la corriente, que deja de contornear una parte del obstáculo, dando lugar a la formación de una estela.

Es la llamada «resistencia de forma» y su valor puede reducirse mucho, como hemos dicho, en cuerpos fuselados.

Es ésta, por tanto, la que toma el valor nulo en la situación límite ideal del movimiento sin separación que se llama, algunas veces, corriente de Dirichlet.

Una segunda causa de la resistencia es la producida por la acción de la viscosidad sobre la pared del obstáculo. Es la llamada «resistencia de rozamiento», cuyo valor está determinado por las características del movimiento del fluido en el seno de la llamada capa límite de Prandtl.

(20) La obra más representativa de este planteamiento, es, sin duda, la célebre «Hidrodinámica» de H. LAMB, cuya primera edición data de 1879 y de cuyas posteriores ediciones se sigue haciendo extenso uso en la actualidad. «Hydrodynamics». Dover Publ., Nueva York, 1945.

Una tercera forma de resistencia se produce, en general, al tratar de generar una sustentación, es decir, una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento del cuerpo. Es la llamada «resistencia inducida» y constituye un tributo a la obtención de aquella sustentación.

Por último, en los movimientos supersónicos existe una forma adicional de resistencia: la llamada «resistencia de onda», que guarda relación con la formación de las llamadas ondas de choque.

Pero para esclarecer todo ello fue necesario, en primer lugar, desarrollar, como se ha dicho, la Teoría de la Capa Límite de Prandtl, cuyo genial planteamiento permitió reconciliar de golpe las predicciones de la Mecánica de Fluidos con los comportamientos observados en la práctica, sin dejar de beneficiarse de las grandes ventajas del modelo de un fluido ideal (21).

* * *

Volviendo, pues, al empleo de este modelo, se ha visto que en el caso muy general de los movimientos irrotacionales, el problema se reduce a la integración de la ecuación del potencial de velocidades, la cual se reduce además a la de Laplace, si el fluido puede considerarse incompresible.

Si esta hipótesis deja de ser válida, como ocurre en los movimien-

(21) Para apreciar la nueva forma que tomó la Mecánica de Fluidos después de estos descubrimientos ver, por ejemplo, las obra siguientes: antes de la Segunda Guerra Mundial, los célebres tratados de L. PRANDTL y O. G. TIETJENS: *Fundamentals of Hydro-and Aeromechanics* y *Applied Hydro and Aeromechanics*. Mc Graw-Hill Book Co., 1934, y de S. GOLDSTEIN: *Modern Developments in Fluid Dynamics*, Oxford, Clarendon Press, 1938, precisamente dedicado a la memoria de Sir Horace Lamb, y la *Aerodynamic Theory* editada por W. F. Durand en la Universidad de Stanford, en California, en 1934. Después de la guerra, la continuación de la obra de GOLDSTEIN editada por L. Howarth en 1953 y dedicada a las *Corrientes de alta velocidad*, el volumen dedicado a la *Mecánica de Fluidos* de la «Enciclopedia rusa sobre Física teórica», de LANDAU y LIFSHITZ, del que existen traducciones inglesa, editada por Pergamon Press en 1959, y francesa, publicada en Moscú, Ediciones MIR, en 1971; la *Introduction to Fluid Dynamics*, publicada por el Prof. G. K. BATCHELOR en la Cambridge Univ. Press, 1967; la monumental enciclopedia en 12 volúmenes sobre *High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, editada por la Universidad de Princeton a partir de 1955. El volumen VIII del «Handbuch der Physik». Springer-Verlag, Berlín, 1959-1963, y la colección de los «Annual Review of Fluid Mechanics», editados por An. Rev. Inc., Palo Alto, California, a partir de 1969.

tos de los gases cuando su velocidad no es pequeña con respecto a la del sonido, es decir, en la Dinámica de los Gases Ideales, la ecuación del potencial de velocidades es casi lineal, de segundo orden, pero sus coeficientes dependen de las componentes de la velocidad en el punto, lo que introduce una complicación esencial en el problema que, al dejar de ser lineal pierde, entre otras, la gran ventaja de la posibilidad de superponer soluciones.

Por otra parte, el tipo de la ecuación depende de la solución, puesto que está determinado por los valores de sus coeficientes, es decir, de las componentes de la velocidad.

Concretamente, en las zonas donde el movimiento es subsónico, la ecuación es de tipo elíptico, en tanto que resulta hiperbólico en las supersónicas, por lo que, en muchos casos, el problema es de naturaleza mixta, al coexistir regiones subsónicas con otras supersónicas para el mismo movimiento.

Plantea esto una situación especial, que no se repite en otros campos de la Física y cuyas dificultades de tratamiento matemático son previsible si se tiene en cuenta la diversa naturaleza de condiciones iniciales y de contorno propias de cada uno de aquellos tipos de ecuaciones.

Así, mientras que al tipo elíptico, propio de los movimientos subsónicos, corresponden condiciones de contorno, bien sean de Dirichlet, de Neumann o una combinación de ellas, si bien para una ecuación esencialmente más compleja que la del potencial, la ecuación hiperbólica característica de los movimientos supersónicos requiere condiciones iniciales, del tipo de Cauchy o similares.

Por último, el caso mixto de coexistencia de ambos regímenes, cuyo modelo es la ecuación de Tricomi propia del régimen llamado transónico, plantea un problema de mayor dificultad, como puede verse más adelante, en el epígrafe 19 del capítulo I.

* * *

Volviendo nuevamente a las peculiaridades del modelo de fluido ideal, la eliminación en él de los procesos de transporte, mediante la anulación de los coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica, da lugar a que en el espacio del movimiento puedan existir superficies de discontinuidad de las diversas magnitudes fluidas, tales como la presión, densidad, temperatura y velocidad, las cuales serían imposibles en el seno de un fluido viscoso.

Ello significa, naturalmente, que las citadas magnitudes fluidas satisfacen a las ecuaciones diferenciales del movimiento de los fluidos ideales a uno y otro lado de tales superficies, pero que sus valores pueden experimentar un salto al atravesarlas.

Ocorre, además, que tales saltos no pueden ser arbitrarios, sino que, por el contrario, deben de satisfacer determinadas condiciones de compatibilidad que resultan de la aplicación a una partícula del fluido, sobre la propia superficie de discontinuidad, de los principios de conservación de la Mecánica y de las leyes de la Termodinámica que sirvieron de base para obtener aquellas ecuaciones.

El establecimiento de las condiciones de compatibilidad que, como se verá en el capítulo II, no ha estado exento de dificultad para algunas de ellas, confirma la posible existencia de dos tipos de superficies de discontinuidad de naturaleza esencialmente distinta.

Un tipo corresponde a las discontinuidades tangenciales, llamadas también «superficies de contacto», porque el fluido no las atraviesa sino que desliza sobre ellas. De ello resulta que la presión debe ser la misma en ambas caras de la discontinuidad, en tanto que pueden ser arbitrariamente diferentes las velocidades tangenciales, así como las densidades y temperaturas. Tales superficies son además, en general, dinámicamente inestables.

El otro tipo es de las discontinuidades normales, llamadas también «ondas» porque el fluido las atraviesa, es decir, porque se propagan a través de él. Se trata de las llamadas ondas de choque, ondas de condensación y ondas de combustión.

En este caso se comprueba que todas las magnitudes fluidas pueden ser diferentes a ambos lados, salvo la componente tangencial de la velocidad, que tiene que ser continua.

Experimentalmente se comprueba la existencia de todos estos tipos de superficies, que en la realidad no son, naturalmente, discontinuidades geométricas, sino zonas de espesor pequeño, puesto que los coeficientes de transporte del fluido no son rigurosamente nulos.

Una idea del orden de magnitud que pueden llegar a alcanzar en un caso límite los gradientes de las variables del movimiento al atravesar algunas de tales zonas la da, por ejemplo, el que en un espesor inferior a una milésima de milímetro se produzcan, a veces, saltos de temperatura de miles de grados o saltos de presión de cientos de atmósferas, como ocurre en las ondas de choque muy intensas.

Por ello, el estudio de la estructura interna de algunas de tales

discontinuidades y, concretamente, el de las ondas de choque y de combustión, constituye un problema muy complejo, pero de gran interés científico, en el que se viene trabajando intensamente, sobre todo durante las últimas décadas. A él se dedica la segunda parte del presente trabajo, a partir del capítulo III.

La presencia de superficies de discontinuidad en el espacio del movimiento, bien se trate de superficies de contacto o de ondas de choque o combustión, puede complicar muy sensiblemente el tratamiento de los problemas, porque generalmente se desconoce la configuración de las mismas, antes de obtener la solución.

Además, la condición de contorno sobre una superficie de contacto no es lineal, puesto que es la de continuidad de la presión, la cual se expresa generalmente en función del cuadrado de la velocidad del movimiento, merced a la ecuación de Bernoulli.

Ello hace perder una parte importante de las ventajas de la ecuación de Laplace en el caso de un fluido incompresible, salvo en los movimientos planos, en que la linealidad se restablece sobre el plano hodógrafo, es decir, sobre el plano cuyas coordenadas son las componentes de la velocidad, mediante la transformación de Legendre u otra equivalente.

Linealidad que subsiste, en el citado plano, para los gases ideales en que, como se ha dicho, la ecuación del potencial de velocidades no es lineal en el espacio físico. Por ello, el método hodógrafo es de mayor utilidad aun en este caso que en el de un fluido incompresible.

Por lo que respecta a las discontinuidades normales, éstas introducen, a menudo, efectos rotacionales detrás de ellas, lo que elimina las ventajas del potencial de velocidades, al obligar a operar con tres ecuaciones para determinar las tres componentes de la velocidad, en un campo no isentrópico.

Las superficies de contacto fueron introducidas hace un siglo por Helmholtz y Kirchhoff, para tratar de escapar a la paradoja de D'Alembert mediante la obtención de soluciones con estelas detrás de los obstáculos, abriendo con ello un campo que posteriormente ha encontrado también otras aplicaciones como, por ejemplo, en el estudio de las cavidades que se forman detrás de los proyectiles que se mueven a gran velocidad en el seno del agua.

Además son elementos fundamentales en la teoría de la sustentación de las alas de los aviones, hélices, rotores, etc., así como para

el cálculo de la «resistencia inducida» y en otras muchas aplicaciones.

En cuanto a las ondas de choque, su existencia fue anticipada teóricamente por Stokes y Riemann al estudiar la propagación de ondas planas de amplitud finita y confirmada en el movimiento de proyectiles y en las toberas de las turbinas de vapor. Son un elemento esencial en la Aerodinámica de grandes velocidades, en la Teoría de las Explosiones, en Astrofísica y en otros muchos campos.

Finalmente, la existencia de ondas de combustión de dos tipos diferentes: las ondas de detonación y las de deflagración, que propagan la reacción química a través de un medio combustible, fue reconocida por Mallard y Le Chatelier, en Francia, a finales del siglo pasado.

Los nuevos explosivos y los nuevos combustibles y sistemas de propulsión empleados en la Aeronáutica, la Balística y la Astronáutica suscitaron un gran interés en el estudio de estos procesos, especialmente a partir de la segunda guerra mundial.

En los diversos epígrafes del capítulo I se incluyen numerosos ejemplos de movimientos con superficies discontinuas, especialmente por lo que respecta a las superficies de contacto y a las ondas de choque.

* * *

En lo que hasta aquí se ha tratado de la Dinámica de Gases, se ha supuesto siempre que el gas estaba en equilibrio termodinámico, lo que reducía a dos el número de variables necesarias para determinar su estado.

Por tanto, aunque el gas sea una mezcla de diversas especies químicas o con numerosos grados de libertad internos, ello no introduce otra dificultad que la de una mayor laboriosidad en los cálculos necesarios, los cuales se efectúan con los procedimientos que enseña la Termodinámica.

Se ha dicho, por ejemplo, que una onda de choque muy intensa puede dar lugar a un calentamiento del gas de miles o de docenas de miles de grados.

Es claro que tal situación tiene que producir en el gas fenómenos de excitación, disociación, reacción química entre las especies que lo forman e incluso de ionización detrás de las ondas, cuyos efectos es necesario tomar en consideración, puesto que absorben una parte

de la energía del choque que puede ser considerable, lo que reduce mucho la temperatura detrás del mismo con respecto a la que se alcanzaría si tales efectos quedasen congelados.

Asimismo, la composición de los gases quemados detrás de una onda de combustión evolucionará de acuerdo con las leyes de equilibrio termodinámico, al cambiar la presión y temperatura del gas como consecuencia del movimiento, efecto que también hay que tomar en consideración en procesos tales como la expansión en la tobera de un cohete, donde pueden alcanzar una influencia considerable en la propulsión que se obtiene.

Pero ocurre, además, que ni en los procesos de relajación ni en los de combustión que acabamos de enunciar, el desplazamiento del equilibrio se produce instantáneamente. Para cada uno de tales fenómenos existe, efectivamente, un tiempo propio de relajación o de reacción, bajo las condiciones dadas, el cual es necesario tomar en consideración en el estudio de determinados procesos.

Es decir, que existen condiciones en que no puede operarse bajo la hipótesis del equilibrio termodinámico, sino que es necesario tomar en consideración la cinética de los procesos de relajación o de reacción química, en su acoplamiento con los que son propios de la Mecánica.

Ello da lugar a un capítulo de desarrollo reciente de la Dinámica de Gases, de gran importancia tecnológica (22) cuyas ecuaciones generales del movimiento deben completarse entonces con otras que describan los procesos de difusión de las distintas especies entre sí, así como la cinética de los fenómenos de relajación de los diversos grados de libertad internos y la de las reacciones químicas independientes que pueden producirse en la mezcla.

Ecuaciones que fueron establecidas por primera vez, en su forma más general, por Hirschfelder (23) y a las que hay que agregar las condiciones iniciales y de contorno que corresponden, por ejemplo, al comportamiento específico de los contornos con respecto a cada uno de aquellos procesos.

(22) Ver, por ejemplo, D. B. SPALDING: *Combustion as Applied to Engineering*, «Journal Inst. Fuels», 1971, págs. 196-203. *Combustion-Generated Air Pollution*, ed. por E. S. STARKMAN, Plenum Press, Nueva York, 1971; J. M. BEER y N. A. CHIGIER: *Combustion Aerodynamics*, Appl. Sci. Publ. Ltd. Londres, 1972, y *Fluid Mechanics of Combustion*, ed. por J. L. DUSSOURD, R. P. LOHMAN y E. M. URAM, ASME, Nueva York, 1974.

(23) Ver la obra de HIRSCHFELDER et al., antes citada.

Con lo que el problema puede adquirir una gran complejidad, incluso en las situaciones previsiblemente más sencillas, como podrá comprobarse en los capítulos IV, V y VI, dedicados al estudio de estos procesos en el seno de las ondas de choque y combustión.

Allí se verá que una de las dificultades mayores para tratar estos problemas es precisamente la de determinar los esquemas cinéticos de relajación o de combustión que deben emplearse en cada caso y las leyes que gobiernan cada uno de ellos.

Dificultad que se ve acrecentada por las limitaciones que impone a la observación experimental de estos fenómenos el reducido espesor de tales ondas, junto a la necesidad de que los instrumentos empleados no distorsionen su estructura (24).

Y, como ocurre en ocasiones similares, se verá que todo ello ha llevado a una cierta inversión de los propósitos, al utilizar las ondas, a menudo, para esclarecer los mecanismos cinéticos, en lugar de proceder a la inversa.

* * *

También hay que mencionar el hecho de que bajo condiciones de temperatura como las que hemos visto que pueden alcanzarse, es preciso tomar en consideración los fenómenos de radiación, que llegan a tener una influencia considerable en algunos problemas, tales como la entrada en la atmósfera de las cápsulas espaciales, en explosiones muy intensas y en Astrofísica (25).

Cuando el grado de ionización del gas es considerable en los plasmas y en líquidos conductores tales como los metales fundidos, es necesario, finalmente, incluir en el estudio de los procesos la interacción del movimiento con los campos electromagnéticos.

Como es sabido, la cuestión tiene gran interés en Astrofísica (26) y en importantes aplicaciones tecnológicas, actualmente en desarro-

(24) Ver, por ejemplo, S. S. PENNER y T. JERSKEY: *Use of Lasers for Local Measurement of Velocity Components, Species, Densities and Temperatures*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1973. págs. 9-30.

(25) Ver, por ejemplo, G. C. POMRANING: *The Equations of Radiation Hydrodynamics*. Pergamon Press, Londres, 1973. También, B. H. ARMSTRONG y R. W. NICOLLS: *Emission, Absorption and Transfer of Radiation in Heated Atmospheres*. Idem id., así como la bibliografía que se menciona en el epígrafe 5 del capítulo IV

(26) S. A. KAPLAN: *Interstellar Gas Dynamics*. Pergamon Press, 1966.

llo, para la generación directa de electricidad, la refrigeración de reactores nucleares rápidos, la propulsión de astronaves, etc., lo que ha dado lugar al desarrollo de una nueva rama de la Mecánica de Fluidos, llamada generalmente Magnetofluidomecánica, cuyo sistema de ecuaciones básico resulta de incorporar al de Navier-Stokes las ecuaciones de la Electrodinámica, con lo que se obtiene finalmente un sistema de veinte ecuaciones en derivadas parciales con veinte incógnitas, que se elevan a veintiuna cuando el medio no es eléctricamente neutro (27).

Por último, la Astronáutica ha abierto al tráfico la totalidad de la atmósfera, desde la superficie de la tierra hasta el espacio exterior.

Ello ha renovado el interés que desde el pasado siglo existía, por motivos distintos, en la Dinámica de Gases Enrarecidos.

En tal situación, como ocurre también por razones distintas en la estructura interna de las ondas de choque intensas, se hace cuestionable la aplicabilidad al gas del concepto de medio continuo.

La desviación comienza, para gases poco enrarecidos, por la modificación de las condiciones de contorno, en donde la igualdad de velocidades y temperaturas entre fluido y pared deja de ser aplicable, pero las ecuaciones de Navier-Stokes siguen pudiendo emplearse.

Si el enrarecimiento es más elevado, se hace necesario sustituir las ecuaciones de Navier-Stokes por la ecuación integrodiferencial de Boltzmann, que proporciona la Teoría Cinética de Gases.

Aun cuando en los últimos años se han efectuado progresos importantes en cuanto al número de casos tratados y a las soluciones aproximadas de dicha ecuación, sin embargo, se está ante un problema de la máxima dificultad, salvo cuando las interacciones de las moléculas entre sí pueden ignorarse, a causa del elevado grado de enrarecimiento, frente a las de aquéllas con los contornos que limitan el espacio del movimiento, situación que corresponde al llamado «régimen molecular libre», cuyo tratamiento resulta mucho más accesible, como es fácil imaginar.

* * *

(27) Ver, por ejemplo. H. CABANNES: *Theoretical Magnetofluidynamics*. Acad. Press. Nueva York, 1970. También C. H. CHU y H. GRAD: *Magnetofluid Dynamics*, cap. II, págs. 308-49 de «Research Frontier in Fluid Dynamics», que se cita en varios epígrafes del capítulo I.

En definitiva, se ve que las recientes exigencias de la Tecnología han ido ampliando el campo de exploración de la Mecánica de Fluidos, mediante la incorporación al mismo de problemas de complejidad creciente.

Así, de los procesos puramente mecánicos que corresponden al dominio de la Hidrodinámica clásica, se pasó a considerar su acoplamiento con los termodinámicos, en una rama de la Mecánica de Fluidos que fue bautizada por el Prof. Maurice Roy con el nombre de Aerotermodinámica, si bien la denominación genérica hoy en uso es la de la Dinámica de Gases.

La incorporación de los procesos de relajación y la de los de combustión, originó sendos campos especializados que han adquirido un desarrollo muy grande durante los últimos tiempos.

De ellas, la última fue designada por el Prof. von Karman con el nombre de Aerotermoquímica, que parece abrirse camino en la literatura científica.

La rama que se ocupa de los procesos en gases enrarecidos fue designada por Zahm, en 1933, con el pretencioso nombre de Super-aerodinámica, que no hizo fortuna, prevaleciendo el más justificado de Dinámica de Gases Enrarecidos con que hoy se conoce universalmente.

Por último, está la Magnetohidrodinámica, Magnetofluidodinámica y Magnetofluidomecánica, puesto que todos estos nombres se utilizan indistintamente para estudiar los procesos con interacción electrodinámica.

Cada una de estas ramas y alguna otra que podría incluirse han adquirido personalidad propia porque la índole de los problemas que investiga y los métodos de tratamiento que emplea, tanto en el orden matemático como en el experimental, presentan peculiaridades para cada uno de ellos.

Desde el punto de vista matemático, ya se ha visto cómo evolucionan, de uno a otro campo, tanto las ecuaciones básicas del proceso como las condiciones en los límites, desde el caso más sencillo de la ecuación de Laplace, para un problema de Dirichlet o de Neumann, al más complejo de un número indeterminado de ecuaciones, con condiciones iniciales y en los límites de muy diversa naturaleza, incluida la presencia de superficies de discontinuidad, en los problemas característicos de la Aerotermoquímica o, por último, a los pro-

blemas de resolución de la ecuación de Boltzmann, propios de la Dinámica de Gases Enrarecidos.

Es claro que una situación de esta naturaleza plantea dificultades formidables en cuanto a la existencia, unicidad, estabilidad y propiedades de las soluciones de la enorme variedad de problemas que incluye, salvo para los casos más sencillos como son, por ejemplo, ciertos movimientos potenciales, regulares salvo en singularidades aisladas, de fluidos ideales, e incluso algunos casos con superficies de discontinuidad y unos pocos de fluidos viscosos.

A este respecto, el caso de los movimientos transónicos al que ya hemos aludido, ofrece un buen ejemplo de las dificultades que pueden suscitarse, como se pone de manifiesto en el epígrafe 19 del capítulo I.

Incluso un caso aparentemente tan sencillo como debiera ser el de la estructura interna de las ondas de choque y combustión que se analiza con detalle en los capítulos III al VI, puesto que, desde el punto de vista matemático, el problema se reduce a la búsqueda de todas las soluciones continuas o con discontinuidades localizadas, en un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales extendido a un intervalo infinito, con condiciones en los límites del mismo, ofrece dificultades cuyo alcance podrá apreciarse en aquellos capítulos.

* * *

Ante la vasta amplitud del campo de problemas que investiga la Mecánica de Fluidos, de la que hemos intentado ofrecer aquí una panorámica que no puede ser completa (28), hay que prever que el inventario disponible de soluciones exactas será muy reducido con respecto a la infinidad de situaciones que interesa resolver.

Al referirnos a los fluidos viscosos ya hemos ofrecido un ejemplo de la situación real, que obliga a buscar procedimientos aproximados, cuyo desarrollo ofrece a menudo, en el caso de la Mecánica de

(28) Podrían agregarse, por ejemplo, la Mecánica de los Superfluidos, que está experimentando un gran desarrollo en estos momentos, en relación con el comportamiento del helio a muy bajas temperaturas, ver P. H. ROBERTS y R. J. DONNELLY: *Superfluid Mechanics*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1974, páginas 179-225; la Mecánica de las Suspensiones, ver H. BRENNER: *Rheology of Two-Phase Systems*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1970, págs. 137-176, etc.

Fluidos, un alarde de ingenio, del que la Teoría de la Capa Límite de Prandtl también mencionada, como otras contribuciones de este investigador, constituye un ejemplo señalado (29).

Dicho concepto de la Capa Límite, cuyo verdadero significado matemático se esclareció medio siglo después de su introducción, permite circunscribir el análisis de los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica a una zona de espesor muy pequeña en contacto con las paredes de los contornos de una gran variedad de problemas del mayor interés práctico.

Ello reduce el análisis de los efectos de la viscosidad a la integración de un sistema parabólico no lineal de ecuaciones en derivadas parciales, cuyo tratamiento ha dado lugar a un campo muy especializado de la Mecánica de Fluidos, que ha alcanzado un gran desarrollo y fecundidad.

El procedimiento incluye el estudio de las capas límites turbulentas, así como los efectos de relajación y de reacción química que puedan producirse en las mismas.

En los epígrafes 10, 11 y 12 del capítulo I se exponen con algún pormenor los fundamentos de esta teoría así como los métodos de cálculo que ha desarrollado.

* * *

Resuelto con ello el problema de los efectos disipativos, puede aplicarse entonces el modelo del fluido ideal al análisis de los movimientos, incluida la distribución de presiones sobre los contornos, con lo que se obtiene una simplificación fundamental para el tratamiento de un gran número de casos.

Pero como el sistema diferencial que resulta sigue siendo, en general, demasiado complejo, bien sea por la índole de las ecuaciones o por las condiciones iniciales y de contorno del problema, a menudo es necesario emplear métodos aproximados que van de la integración numérica a la simplificación de las ecuaciones y de las condiciones en los límites.

Por lo que respecta a los procedimientos de integración numéri-

(29) L. PRANDTL: *Gesammelte Abhandlungen zur angewandten mechanik, Hydro und Aeromechanik*, ed. por W. TOLLMIEN, H. SCHLICHTING y H. GÖRTLER, Springer, Berlín, 1961.

ca (30), de los que un ejemplo señalado de gran utilidad en movimientos supersónicos es el empleo del método de las «características», especialmente para problemas en dos variables, la disponibilidad de calculadores electrónicos ha venido a cambiar la raíz de la situación en los últimos años (31).

Sin embargo, hay todavía muchas situaciones que quedan fuera del alcance de la presente generación de calculadores.

Un caso límite, señalado por Emmons (32), es el de los movimientos turbulentos, cuyo tratamiento numérico, incluso en los casos más sencillos, requeriría el empleo de una red de 10^{10} puntos, cifra que está tres órdenes de magnitud por encima de las posibilidades de los actuales calculadores, los cuales presentan dificultades incluso para el cálculo de muchos problemas tridimensionales no turbulentos (laminares).

Un nuevo procedimiento que va abriéndose camino durante los últimos años es el de la simulación numérica de los problemas, en sustitución de la simulación experimental (33).

Por otra parte, la disponibilidad de tales calculadores es limitada y costosa y además interesa disponer de soluciones analíticas, aun-

(30) Para la integración numérica de los sistemas diferenciales de la Mecánica de Fluidos y de otras aplicaciones, ver las obras siguientes: G. FORSYTHE y W. WASOW: *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1960; *Methods in Computational Physics*, vol. III de «Fundamental Methods in Hydrodynamics», Academic Press, 1964; *Numerical Methods in Gas Dynamics*, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1966; R. D. RICHTMYER y K. W. MORTON: *Difference Methods for Initial Value Problems*. John Wiley, Interscience, Nueva York, 1967; S. G. MIKHILIN y K. L. SMOLITSKIY: *Approximate Methods for Solution of Differential and Integral Equations*. Elsevier Publ. Co., Nueva York, 1967. Finalmente, *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. «Synspade», 1970. Ed. por B. Hubbard. Acad. Press, 1970, donde se hallarán algunos trabajos en relación con la Mecánica de Fluidos, así como las referencias específicas que se incluyen para los diversos problemas, en los capítulos siguientes.

(31) Para una idea del estado alcanzado en este punto ver, por ejemplo, el artículo de revisión de J. H. ARGYRIS: *The Impact of the Digital Computer on Engineering Sciences*. «The Aer. Jour. Roy. Aer. Soc.», 1970, págs. 13-41 y 111-27. También, R. Q. BOYLES: *Aircraft Design Augmented by a Man-Computer Graphic System*. «Jour. Aircraft», 1968, págs. 486-98.

(32) H. W. EMMONS: *Critique of Numerical Modeling of Fluid Mechanics Phenomena*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1970, págs. 15-36.

(33) S. A. ORSZAG y MOSHE ISRAELI: *Numerical Simulation of Viscous Incompressible Flows*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1974, págs. 281-318.

que sean aproximadas, para la mejor comprensión de los procesos e interpretación de los resultados.

Todo lo cual justifica la prosecución del ingente esfuerzo que se ha hecho en ese sentido, especialmente en lo que va de siglo, con resultados verdaderamente espectaculares y donde el esfuerzo consagrado a tan atractiva tarea se ha visto recompensado por una aplicabilidad de los resultados que frecuentemente va más allá de lo que cabría esperar de las limitaciones racionales del método.

Un ejemplo típico de ello es el éxito del modelo del fluido incompresible, al que ya hemos aludido, para analizar todos los problemas de la Aerodinámica clásica. Dicho modelo permitió, efectivamente, cubrir todas las exigencias de la Tecnología Aeronáutica hasta el umbral de la segunda guerra mundial.

En aquellos casos en que el problema es lineal, se dispone de un instrumento de potencialidad ilimitada: la superposición de soluciones.

Cuando no lo es, se intenta una linealización del mismo, mediante desarrollos asintóticos en función de un parámetro muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, el número de Reynolds para los efectos de la viscosidad, el de Mach para los de la compresibilidad, etcétera, calculando progresivamente soluciones de órdenes de aproximación cada vez más elevados.

De este procedimiento ofrecen ejemplos clásicos bien conocidos la Mecánica de Fluidos y que han servido de inspiración para otros muchos, la Teoría Acústica, la de Ondas y la de la Estabilidad.

En aquellos casos en que se plantean situaciones de convergencia no uniforme, bien sea en razón de singularidades aisladas o a causa de perturbaciones singulares, se han puesto a punto para resolver la situación procedimientos como el de van Dyke ya citado y el de Lighthill que se menciona en el epígrafe 15 del capítulo I.

En el problema de la corriente indefinida alrededor de un obstáculo que se mencionó en relación con la paradoja de D'Alembert y que constituye, como ya se ha dicho, un problema tipo fundamental de Mecánica de Fluidos, la linealización se consigue al suponer que el obstáculo es de forma tal que las velocidades que induce en el fluido su desplazamiento son pequeñas con respecto a la del movimiento de aquél.

Al aplicar este método, que ya resultó de la mayor fecundidad en la Aerodinámica clásica, al estudio de los efectos de la compresibi-

lidad, se comprueba que es válido cuando el movimiento resulta subsónico en todo el espacio fluido, en cuyo caso el problema se reduce al de Laplace, así como cuando es supersónico en todo él, en cuyo caso el problema es de la ecuación de ondas.

Existen, sin embargo, dos regímenes especiales en que aquélla no es aplicable, los cuales requieren un tratamiento especial, no lineal, si bien simplificado.

Uno es el régimen transónico, en que la velocidad del obstáculo es próxima a la del sonido, en cuyo caso coexisten zonas subsónicas y supersónicas en el espacio del movimiento y el problema es del tipo mixto de Tricomi al que ya se ha hecho referencia. Esta situación está en el umbral de los actuales aviones comerciales.

La otra excepción al método de linealización corresponde al régimen llamado hipersónico, cuando la velocidad del obstáculo es mucho mayor que la del sonido.

Se trata de los movimientos de los grandes ingenios balísticos, de las cápsulas espaciales y de las explosiones muy intensas. Una de sus características más destacadas es la de las elevadas temperaturas que se alcanzan, y en él aparecen problemas complementarios, derivados de la interacción entre la capa límite y la corriente exterior a la misma.

En todas estas situaciones, los métodos de desarrollo asintótico y las leyes de Semejanza Dinámica permiten determinar parámetros y transformaciones afines de las variables, que establecen leyes de semejanza específicas para los diversos regímenes enunciados, las cuales relacionan entre sí familias de soluciones, con gran utilidad práctica para la correlación de mediciones experimentales y para determinar la influencia de ciertas modificaciones en las condiciones iniciales y en los límites.

En todos estos casos, la mejora de los resultados que dan las aproximaciones lineales se suele obtener mediante el cálculo de aproximaciones de orden superior, generalmente por procedimientos de iteración pero, muy a menudo, el segundo orden marca el límite alcanzable, por razones de viabilidad práctica.

Otros procedimientos también empleados consisten en reducir el número de variables independientes mediante la consideración de movimientos unidimensionales, estacionarios o no; de movimientos planos o con simetría de revolución; de movimientos estacionarios, etcétera.

En algunos de tales casos, como en los movimientos estacionarios planos o con simetría de revolución, se puede introducir una «función de corriente», que resulta de gran utilidad.

En el caso concreto de los movimientos planos, se puede disponer, además, de procedimientos de linealización, como el de la transformación hodógrafa, sin sacrificio de precisión, así como del poderoso instrumento de la Representación Conforme para el tratamiento de los movimientos potenciales de fluidos incompresibles y como punto de partida para construir las soluciones de los compresibles.

Otra manera de reducir el número de variables, de la que veremos algunos ejemplos en el capítulo I, consiste en buscar soluciones auto-semejantes, mediante combinaciones de las variables independientes sugeridas por la naturaleza del problema. Ejemplos típicos de este procedimiento, que se verán en el capítulo I, son los movimientos cósmicos, las explosiones intensas, algunas capas límites, etc. (34).

En otras ocasiones en que no es posible reducir el número de variables por los procedimientos indicados, puede asimilarse el caso a alguno de los anteriores más la perturbación que introduce el que, por ejemplo, el movimiento sólo sea aproximadamente plano o que el cuerpo de revolución esté ligeramente inclinado respecto de la corriente principal, etc.

En tales circunstancias, la solución se puede obtener mediante la superposición de una pequeña perturbación a la solución exacta del movimiento plano o con simetría de revolución.

Por último, como resulta frecuentemente ventajoso sustituir los problemas de condiciones de contorno por otros de condiciones iniciales, se ha desarrollado progresivamente la tendencia a considerar un movimiento estacionario como caso límite de otro no estacionario, con condiciones iniciales arbitrarias, cuando el tiempo crece indefinidamente, lo que permite hacer que el problema sea hiperbólico o parabólico, según los casos. También de este procedimiento se verán algunas aplicaciones recientes e importantes, a los movimientos supersónicos o transónicos, así como a la Teoría de las Ondas de Combustión.

* * *

(34) Ver G. I. BARENBLATT y YA. B. ZELDOVICH: *Self-Similar Solutions as Intermediate Asymptotics*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1972, págs. 285-312.

Después de esta breve reseña de los métodos de cálculo más usuales, queda por esclarecer en qué medida los procedimientos descritos sirven adecuadamente a las necesidades tecnológicas de una ciencia aplicada como es la Mecánica de Fluidos, en situaciones a menudo límites y para configuraciones cada vez más complejas, dentro de unos requerimientos de precisión de los que la técnica aeroespacial, junto con la nuclear, ofrecen los ejemplos más exigentes de nuestra época (35).

A este respecto hay que decir que el proceso de desarrollo ha ido de la comprensión cualitativa del mecanismo del fenómeno, al cálculo aproximado de configuraciones sencillas, para llegar en estos momentos a la posibilidad de calcular con aproximación suficiente para las necesidades del proyecto, formas muy complejas correspondientes a proyectiles, aeronaves, cápsulas espaciales, órganos de propulsión y otros sistemas, en estrecha colaboración con las observaciones de los sofisticados medios experimentales con que cuentan los modernos laboratorios de Mecánica de Fluidos.

Una prueba de ello podría ser el gran número de trabajos esencialmente matemáticos, aplicados al cálculo de elementos como los que acabamos de citar, que proceden de los departamentos de Desarrollo de las empresas aeroespaciales.

* * *

En Mecánica de Fluidos, un proyecto es, a menudo, un problema variacional, puesto que se trata de optimizar en él alguna magnitud global, mediante la configuración adecuada de uno o varios contornos, sometidos a determinadas condiciones limitativas.

No es sorprendente, por ello, que el Cálculo de Variaciones naciese con una aplicación de Newton a la determinación del proyectil de resistencia mínima.

A lo largo del desarrollo de la Mecánica de Fluidos, este aspecto

(35) Ver a título de ejemplo, el trabajo de D. D. BAALS, A. W. ROBINS y R. W. HARRIS: *Aerodynamic Design Integration of Supersonic Aircraft*, «*Jour. Aircraft*», 1970, págs. 385-94, así como las referencias de los diversos epígrafes del capítulo I.

variacional ha encontrado numerosas aplicaciones, cuyo tratamiento sistemático ha sido objeto de publicaciones recientes. Una de las más completas, por el amplio espectro de casos que incluye, para la Aerodinámica de grandes velocidades que es donde el método encuentra mayor aplicación, es la editada bajo la dirección del profesor Miele (36), por un grupo de autores altamente calificados (37).

* * *

En la presente introducción se ha intentado ofrecer una panorámica general del desarrollo, situación, problemas y métodos de resolución propios de la Mecánica de Fluidos, especialmente desde la óptica de la tecnología aeroespacial que corresponde al campo profesional del autor.

En los capítulos siguientes se desarrolla con más extensión todo ello, procurando incluir en cada caso la bibliografía suficiente para el estudio profundo de la materia específica que pueda interesar en cada caso al lector.

De ellos, el primero es de carácter general y presenta en sucesivos epígrafes cada uno de los diversos aspectos de la Mecánica de Fluidos viscosos e ideales a que se hace referencia en esta introducción, ilustrados con el tratamiento de una colección de casos típicos, que permiten apreciar la índole de los problemas matemáticos a que dan lugar.

Los cinco capítulos restantes tienen un carácter distinto. Están dedicados, en efecto, a la exposición de un tema monográfico, al que ya se ha hecho referencia: el de la estructura interna de las ondas de choque y combustión, en algunos de cuyos problemas tuvo ocasión de trabajar el autor, hace algunos años, en colaboración con el profesor von Karman y al frente de un grupo de jóvenes ingenieros del INTA que, al correr de los años, han conseguido el reconocimiento, incluso más allá de nuestras fronteras, de su bien ganado prestigio científico

(36) A. MIELE: *Theory of Optimum Aerodynamic Shapes*. Acad. Press, Nueva York, 1965.

(37) Otra obra sobre el mismo tema, con la inclusión de la optimización de trayectorias espaciales y de sistemas de propulsión, es la editada por G. LEITMANN: *Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems*. Acad. Press, Nueva York, 1965.

El autor desea expresar su reconocimiento al profesor Amable Liñán, por su ayuda para seleccionar y conseguir la bibliografía adecuada. Al profesor Pedro Perea, por su colaboración en la obtención de bibliografía, en la preparación de las figuras y en la revisión de las pruebas. Finalmente, al doctor Manuel Colomina, por su ayuda para obtener una parte de la bibliografía necesaria. Todo ello ha facilitado muy fundamentalmente la realización de este trabajo.

CAPÍTULO I

PROBLEMAS MATEMATICOS DE LA MECANICA DE FLUIDOS

1. ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En el caso más general del movimiento tridimensional no estacionario de un fluido compresible, viscoso y conductor de calor, pero de composición química constante (1) y en equilibrio termodinámico, las ecuaciones del movimiento, que se llaman generalmente de Navier-Stokes, revisten la forma siguiente (2):

a) Ecuación de continuidad o de conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \cdot v_j)}{\partial x_j} = 0. \quad [1]$$

b) Ecuaciones dinámicas o de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

c) Ecuación de conservación de la energía. Entre las diversas for-

(1) Si el fluido es una mezcla de especies distintas, hay que tomar en consideración los efectos de difusión y eventualmente los de las reacciones químicas, como se verá más adelante. Si no están en equilibrio termodinámico, hay que tener en cuenta los efectos de relajación.

(2) Ver, por ej., el volumen III de la Enciclopedia de Princeton o la segunda obra de Goldstein, citadas en la introducción, o bien la obra del mismo autor: *Lectures on Fluid Mechanics*, Interscience Publ., 1960. Para un tratamiento sistemático de las ecuaciones generales de la mecánica de los medios continuos, de las que éste es un caso particular, ver la reciente publicación de P. GERMAIN: *Cours de Mécanique des Milieux Continus*. Masson et Cie., París, 1973.

mas que puede adoptar esta ecuación, consideramos que la más expresiva es la de variación de la entropía:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_j \frac{\partial S}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \dot{\phi} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad [3]$$

El primer miembro de todas estas ecuaciones se reduce a la aplicación, a cada una de las diversas magnitudes fluidas del operador diferencial

$$\frac{D}{D t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j} \quad [4]$$

llamado de Euler, el cual resulta de interpretación inmediata, puesto que expresa la variación de la magnitud respectiva con relación al tiempo, al seguir a la partícula fluida en su movimiento.

Otras formas de la ecuación de la energía que encuentran aplicación en numerosas cuestiones y que se deducen fácilmente de la ecuación [3] al tener en cuenta las relaciones conocidas entre las diversas funciones termodinámicas, son las siguientes, las cuales ponen de manifiesto, respectivamente, las variaciones de la energía interna e del fluido y de su entalpía $h = e + \frac{p}{\rho}$:

$$\frac{D e}{D t} = - \frac{p}{\rho} \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \dot{\phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad [5]$$

$$\frac{D h}{D t} = \frac{1}{\rho} \frac{D p}{D t} + \frac{1}{\rho} \dot{\phi} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \quad [6]$$

Por último, si las fuerzas másicas g_i derivan de un potencial $f(x_i, t)$:

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

como ocurre en el campo gravitatorio y en otras aplicaciones y supondremos siempre en lo que sigue, al combinar la ecuación [6] de la energía con las [2] del movimiento, se obtiene la siguiente expre-

sión para la variación de la energía total $h + \frac{v^2}{2} + f$ de una partícula fluida:

$$\frac{D \left(h + \frac{v^2}{2} + f \right)}{D t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{d p}{d t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \tau_{i1}) + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} \quad [8]$$

en donde $v = \sqrt{(v_i)^2}$ es la velocidad de aquella.

Es más; salvo en aplicaciones especiales que no interesan en lo que sigue, las variaciones de la energía potencial resultante del campo de fuerzas f son pequeñas con respecto a las que se producen en la energía cinética (o en la interna, en el caso de los gases), por lo que de aquí en adelante supondremos siempre que las fuerzas de masa son nulas; es decir, que se cumple la condición $g_i \equiv 0$, $i = 1, 2, 3$.

Con ello, la ecuación [8], en particular, toma la forma:

$$\frac{D \left(h + \frac{v^2}{2} \right)}{D t} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_i \tau_{i1}) + \\ + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad [8']$$

En el sistema anterior de ecuaciones, siguiendo una notación de uso generalizado, ρ es la densidad del fluido; v_i , $i = 1, 2, 3$, son las tres componentes de la velocidad; g_i , $i = 1, 2, 3$, son las tres componentes de la fuerza por unidad de masa, por ejemplo, del campo gravitatorio; p es la presión y τ_{ij} son las componentes del tensor de esfuerzos de viscosidad, las cuales se expresan en función de las deformaciones del elemento fluido mediante la ecuación:

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \delta_{ij} \quad [9]$$

donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker y μ , μ' son, respectivamente,

los coeficientes de viscosidad normal y de viscosidad de volumen, los cuales son funciones termodinámicas del fluido, es decir, funciones cuyo valor depende del estado termodinámico de aquél (3).

S es la entropía por unidad de masa, la cual es, asimismo, una función termodinámica

$$S = S(p, \rho). \quad [10]$$

T es la temperatura absoluta del fluido, la cual se relaciona con ρ y p a través de la función de estado

$$T = T(\rho, p) \quad [11]$$

y λ es el coeficiente de conductividad térmica, el cual, al igual que los de viscosidad, depende del estado termodinámico del medio.

En cuanto a

$$\phi = \tau_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\mu' - \frac{2}{3} \mu \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 \quad (12)$$

es la función de disipación de la viscosidad, la cual es siempre positiva, como se comprueba fácilmente y mide la irreversibilidad del proceso debida al efecto de la viscosidad, según pone de manifiesto la ecuación [3] de variación de la entropía.

Por último, t es el tiempo; x_i , $i = 1, 2, 3$ son las tres coordenadas cartesianas del espacio en que tiene lugar el movimiento y la repetición de un subíndice en las expresiones anteriores indica, como es habitual, sumación con respecto del mismo.

Para completar la definición del problema es necesario establecer, en cada caso concreto, las condiciones iniciales y en los límites que corresponden al mismo.

En especial y por lo que respecta a las condiciones en el contacto con una pared sólida que se mueve con la velocidad de componentes v_i , la velocidad del fluido debe cumplir, en general, la condición de adherencia:

$$v_i = v_{ip}, \quad i = 1, 2, 3 \quad [13]$$

(3) Stokes supuso que en un fluido se cumple la condición $\mu' = 0$. La teoría cinética de gases enseña que esta condición es cierta en gases cuyas moléculas carecen de grados internos de libertad o cuando aquéllos no están excitados.

introducida por Stokes, si bien existen excepciones que se dan, por ejemplo, en la Dinámica de Gases Enrarecidos (4), como veremos más adelante.

Asimismo, por lo que respecta a la temperatura T , la condición que debe cumplirse siempre es la de igualdad entre la de la pared T_p y la del fluido en contacto con ella:

$$T = T_p, \quad [14]$$

si bien en ciertos problemas lo que se fija es el flujo q_p de calor a través de aquella:

$$q_p = \lambda n_i \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad [15]$$

donde n_i son los cosenos directores de la normal a la pared.

Así, pues, estamos ante un sistema de cinco ecuaciones no lineales en derivadas parciales para calcular los valores, en cada instante t y en cada punto x_i ; la de las tres componentes v_i de la velocidad y de dos de las cuatro variables termodinámicas ρ , p , T , S , puesto que las dos restantes se expresan en función de ellas, merced a las dos funciones termodinámicas [10] y [11].

Resulta imposible entrar aquí en el análisis detallado de las propiedades y soluciones de este sistema tan completo, por lo que nos limitaremos por ahora a unas consideraciones de carácter general, remitiendo al lector a la bibliografía especializada para un estudio más detenido sobre la materia (5).

En primer lugar, es claro que, dada la complejidad y el carácter no lineal del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes que acabamos de enunciar, no cabe esperar una respuesta completa al problema de

(4) La condición para la velocidad en el contacto con una pared sólida ha sido objeto de una polémica clásica cuya referencia y bibliografía se encontrará, por ejemplo, en el capítulo de J. SERVIN: *Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics*, de la «Encyclopedia of Physics», de Springer-Verlag, 1960, cuya consulta se recomienda, así como la obra ya citada de Goldstein, de 1938, págs. 676 y siguientes.

(5) Ver H. VILLAT: *Leçons sur les Fluides Visqueux*. Gauthier-Villars, París, 1943, así como R. BERKER: *Intégration des Equations du Mouvement d'un Fluide Visqueux Incompressible*. «Handbuch der Physik», vol. VIII, 2, páginas 1-385. Springer-Verlag, Berlín, 1963.

la existencia y menos aún al de la unicidad, de las soluciones del mismo.

Es este un campo, no obstante, en el que se han hecho importantes progresos recientes, sobre todo en el caso de un fluido incompresible, especialmente a partir de la aplicación al mismo iniciada por Leray (6) de los métodos del Análisis Funcional y merced a los trabajos de Hopf (7) sobre soluciones «débiles», es decir, soluciones de ecuaciones integrales de las que, sin embargo, no se puede garantizar una diferenciabilidad suficiente para que correspondan a las del sistema de Navier-Stokes.

La obra más completa sobre la difícil cuestión de la existencia y unicidad de las soluciones del sistema de Navier-Stokes, es la del autor ruso Ladyzhenskaya sobre los «Problemas Matemáticos de la Dinámica de Fluidos Viscosos Incompresibles», de la que existe traducción inglesa (8) y la más reciente, la del profesor Shinbrot, del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Northwestern de Chicago (9), cuya lectura permite apreciar plenamente la dificultad del problema, el estado de la cuestión y las líneas de investigación en que se prosigue el trabajo. Ambas obras contienen, además, una bibliografía, muy completa sobre el tema.

En segundo lugar y por la misma razón de complejidad, es también claro que el número de casos cuyas soluciones exactas son conocidas es muy reducido y que además corresponden generalmente a fluidos incompresibles y a tipos de movimientos en que son idénticamente nulos los términos no lineales de las ecuaciones (10).

Tales soluciones ponen de manifiesto la existencia de algunas «paradojas» (11) y la de «inestabilidades» en las soluciones, cuyos aná-

(6) J. LERAY: *Etude de Diverses Equations Intégrales non Linéaires et de quelques Problèmes que pose l'Hydrodynamique*. «Jour. Math. Pures Appl.», 1968, págs. 1-82.

(7) E. HOPF: *Über die Anfangswertaufgabe der hydrodynamischen Grundgleichungen*. «Math. Nach.», 1950, págs. 213-23.

(8) O. A. LADYZHENSKAYA: *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach, New York y Londres, 1963.

(9) M. SHINBROT: *Lectures on Fluid Mechanics*. Gordon and Breach, 1973.

(10) Para un repertorio de soluciones ve, por ejemplo, las obras de Lamb Goldstein, Howarth, Landau-Lifchitz, Ladyzhenskaya y Shinbrot, ya citadas, aparte de las dos que se mencionan en la página precedente.

(11) Para un análisis matemático de las paradojas de la mecánica de fluidos, tanto ideales como viscosas, ver el notable trabajo del Prof. GARRELL BIRKHOFF:

lisis plantea uno de los más atractivos e interesantes problemas de la Mecánica de Fluidos.

Porque tales inestabilidades conducen finalmente a movimientos del tipo llamado «turbulento», cuya existencia fue reconocida a mediados del siglo pasado, si bien su identificación precisa y el establecimiento del criterio básico para determinar si un movimiento fluido es «laminar» o «turbulento», se deben a O. Reynolds, en un memorable trabajo en 1894 (12).

Dicho trabajo abrió el camino a un nuevo capítulo de Mecánica de Fluidos, la «Teoría de la Turbulencia», el cual se mostraría después como uno de los más fecundos y difíciles campos de investigación de aquélla.

Ocurre, efectivamente, como veremos con más precisión en el epígrafe 12, que los movimientos turbulentos sólo se pueden describir teóricamente en forma correcta aplicando los métodos matemáticos de los campos aleatorios al tratamiento estadístico de las ecuaciones de Navier-Stokes, en busca de las leyes estadísticas que gobiernan estos complejos fenómenos, cuya investigación experimental ha requerido también la puesta a punto de técnicas muy especializadas.

Como ejemplo de aplicación de esta Teoría a cuestiones concretas, en el epígrafe 12 del presente capítulo se estudiará el caso de la capa límite y en el capítulo VI, el de las llamas premezcladas turbulentas.

2. TEORÍA DE LA SEMEJANZA DINÁMICA

Las dificultades prácticamente insuperables de encontrar soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes para los complejos problemas que interesan en los órdenes científico y tecnológico no han impedido, naturalmente, realizar los importantes progresos a que aludíamos en la Introducción, en el conocimiento de la Mecánica de Fluidos.

Ello se ha conseguido, particularmente en lo que va de siglo, a través de la acertada combinación de las observaciones y mediciones

Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude, Princeton Univ. Press., 1950.

(12) O. REYNOLDS: *On the Dynamical Theory of Incompressible Viscous Fluids and the Determination of the Criterion*, «Phil. Trans. Roy. Soc. Londres», 1894, páginas 123-161.

experimentales, con la simplificación de los problemas matemáticos hasta hacerlos asequibles al cálculo. Una ayuda sumamente valiosa a este respecto, sobre todo en los años más recientes, ha sido la aplicación de las grandes posibilidades del cálculo electrónico.

En el orden teórico, la simplificación matemática se ha conseguido, como veremos en numerosos ejemplos, mediante el empleo de «modelos» teóricos que representen aproximaciones satisfactorias, bien sea de las propiedades del fluido, bien de las características del movimiento que se investiga, mientras que en el aspecto experimental ante la dificultad, evidente en muchos casos, de reproducir a escala natural en el laboratorio el proceso real que se desea investigar, se ha hecho uso sistemático de la Teoría de la Semejanza Dinámica.

Como es sabido, esta Teoría, cuyos orígenes se deben precisamente a Stokes, permite establecer una semejanza dinámica entre dos procesos que ya lo sean geoméricamente y cuyas condiciones iniciales y de contorno estén debidamente relacionadas.

La Semejanza Dinámica establece entonces que, entre las magnitudes homólogas de ambos procesos, en puntos e instantes que se correspondan, existe una proporcionalidad que permite trasladar automáticamente la solución de uno de ellos a la de otro, lo que constituye una simplificación fundamental del método experimental, de la que indudablemente se ha hecho en Mecánica de Fluidos un uso más sistemático y extenso que en cualquier otro capítulo de la Física.

Para asegurar la semejanza dinámica, además de cumplirse la geometría y la de las condiciones iniciales y de contorno ya indicadas, es preciso que sean iguales, en los procesos que se comparan, los valores de un conjunto de parámetros adimensionales de semejanza, así como determinadas funciones termodinámicas que definen las propiedades del medio (13).

En definitiva, ocurre entonces que las características de la solución dependen exclusivamente de los valores que tengan dichos parámetros, lo que permite establecer una correlación de los resultados de las observaciones, en función de las mismas, del más alto valor práctico.

Tales parámetros podrían obtenerse mediante la aplicación al caso

(13) Es claro que a menudo es necesario operar, o conviene hacerlo para conseguir la semejanza, con dos fluidos de naturaleza distinta.

del célebre teorema π de Buckingham (14), pero resulta más esclarecedor hacerlo directamente a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes, expresándolas en forma adimensional mediante la introducción en el sistema de las ecuaciones del movimiento y en las condiciones iniciales y de contorno, de valores característicos para el tiempo τ , la longitud L , la velocidad V y la fuerza másica g , y las otras magnitudes características del fluido, tales como la presión, densidad, temperatura, viscosidad, etc., con lo que automáticamente surgen los parámetros adimensionales y las relaciones entre las funciones termodinámicas necesarias para asegurar aquella semejanza (15).

Al proceder así se obtiene el siguiente conjunto, bien conocido, de números adimensionales cuya igualdad de valores es necesaria para la semejanza dinámica de los movimientos que se trata de relacionar.

a) Número de frecuencia reducida o de Strouhal:

$$S_t = \frac{V_\tau}{L} \quad [16]$$

que resulta importante, por ejemplo, en el estudio de fenómenos periódicos.

b) Número de Froude:

$$F_r = \frac{V^2}{L \cdot g} \quad [17]$$

El número de Froude interviene en aquellos casos en que son importantes las fuerzas másicas, como por ejemplo, la de la gravedad.

c) Número de Reynolds:

$$R_e = \frac{\rho_e \cdot V \cdot L}{\mu_e} \quad [18]$$

en donde ρ_e y μ_e son los valores característicos de la densidad y del

(14) Ver, por ejemplo, la monografía clásica del Prof. P. W. BRIDGMAN de la Universidad de Harvard: *Dimensional Analysis*, Yale Univ. Press, 1931.

(15) Ver, por ejemplo, el volumen III de la Enciclopedia de Princeton o las obras de Goldstein citadas en la página 1.

coeficiente de viscosidad, que se han adoptado para hacer adimensionales las ecuaciones de Navier-Stokes.

Como es sabido, este parámetro es el que introdujo Reynolds para fijar el criterio de estabilidad en su célebre contribución a la Teoría de la Turbulencia a que nos hemos referido antes (16).

d) Número de Mach (17):

$$M = \frac{V}{a_e},$$

en donde

$$a_e = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_e} \quad [20]$$

es la velocidad de propagación del sonido en el fluido, es decir, la velocidad de propagación de pequeñas perturbaciones a través del mismo, en el punto de referencia.

Este parámetro es de importancia fundamental en los casos en que los efectos de la compresibilidad tienen influencia en el proceso, como ocurre especialmente, según veremos, en la Aerodinámica de grandes velocidades.

e) Número de Nusselt:

$$N_u = \frac{q_e L}{\lambda_e T_e} \quad [21]$$

donde q_e es el flujo de calor en un punto de referencia situado en el contorno y λ_e y T_e son los valores característicos de la conductividad y de la temperatura.

(16) En rigor fue Stokes quien introdujo el concepto de semejanza dinámica, en relación con el estudio del movimiento de un péndulo en el seno de un fluido, que data de 1850, donde incluso empleó un parámetro adimensional que corresponde al número de Reynolds.

(17) El nombre de número de Mach lo introdujo Ackeret en 1929 en memoria de los trabajos del científico checoslovaco E. Mach, precursor del estudio de los movimientos supersónicos, en los trabajos experimentales que llevó a cabo a finales del siglo pasado. Ver. por ejemplo, el artículo de J. BLACK: *Ernst Mach, Pioneer of Supersonics*. «Jour. Roy. Aer.Soc.», 1950, págs. 371-7.

Es claro que este número resulta de interés en procesos en que la transferencia de calor es importante.

Los números de semejanza que hasta aquí se han enunciado y a los que se añadirán otros más adelante, al tomar en consideración, por ejemplo, procesos de combustión (18), combinan magnitudes que dependen tan sólo del movimiento del fluido, como ocurre con los de Strouhal y Froude, o de las propiedades del medio como sucede con los de Reynolds, Mach y Nusselt.

Pero junto a estos números existen otros requerimientos que dependen exclusivamente del estado del fluido y del comportamiento de sus funciones termodinámicas, las cuales tienen que cumplir, evidentemente, determinadas condiciones de semejanza entre los dos fluidos que se comparan o entre los dos estados distintos del mismo fluido, si es que éste no varía (19).

Por ejemplo, los dos coeficientes de viscosidad μ y μ' concretamente, deben cumplir la condición, como es previsible imaginar, de que la relación $\frac{\mu'}{\mu}$ sea la misma en puntos homólogos de ambos procesos.

f) Número de Prandtl.

Otra condición adicional importante es la de que el número llamado de Prandtl, que mide el valor relativo de los procesos de transferencia de calor y de conductividad térmica, del cual haremos extenso uso en los capítulos siguientes (20) y que está definido por la expresión:

$$P_r = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad [22]$$

donde C_p es el calor específico del fluido a presión constante, tome valores iguales en puntos homólogos de los dos movimientos.

Por último, si se trata de un gas perfecto, en cuyo caso la ecuación de estado [11] adopta la forma

$$\frac{p}{\rho} = R T, \quad [23]$$

(18) Ver. por ejemplo, el capítulo VI.

(19) Ver. por ejemplo, la obra de SERRIN, ya citada, págs. 181 y 243.

(20) Donde aparecen además otros números de naturaleza similar para los fenómenos de difusión.

donde R es la constante del gas $R = \frac{R_0}{W}$, siendo R_0 la constante universal de los gases perfectos y W el peso molecular del mismo, entonces la relación

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad [24]$$

entre los calores específicos a presión y a volumen constantes respectivamente debe tener también valores iguales en puntos homólogos.

En el caso de un líquido, las condiciones «internas» de semejanza son más complicadas de establecer con carácter general que las de un gas, por la mayor complejidad de las funciones termodinámicas, pero el procedimiento enunciado permite hacerlo fácilmente, si son conocidas las características de tales funciones.

Para terminar con esta breve exposición sobre la Teoría de la Semejanza Dinámica hay que advertir, como resulta evidente, que el cumplimiento simultáneo de todas las condiciones enunciadas hace virtualmente inoperante la aplicación estricta de aquélla con fines prácticos, salvo en casos muy especiales y de interés muy limitado.

Afortunadamente, este requerimiento tampoco es necesario en muchas aplicaciones, para las que resulta suficiente, como es bien sabido, el cumplimiento de una «semejanza parcial», referida precisamente a aquellos parámetros más directamente relacionados con el fenómeno en estudio, como se ha indicado al definir cada uno de los números adimensionales.

Es en este sentido amplio, naturalmente, como se ha venido usando la Teoría de la Semejanza para interpretar los resultados de las observaciones experimentales en Mecánica de Fluidos, con los excelentes resultados que hemos puesto de manifiesto al comienzo de este epígrafe.

3. FLUIDOS IDEALES

Desde el punto de vista teórico, una aproximación natural al problema real consiste en prescindir de aquellas propiedades del fluido que tengan menor relevancia para el caso en estudio.

Concretamente, en muchos fluidos de interés tecnológico, tales

como el agua y el aire, ocurre que los valores de sus coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica son tan reducidos que sus efectos son muy pequeños frente a los de las otras magnitudes en juego, tales como las fuerzas de inercia, la presión, etc., en una gran variedad de movimientos.

Ello suele ser así salvo en regiones especiales como las de la inmediata proximidad a las paredes de los contornos, las cuales pueden analizarse entonces por separado, tomando en consideración solamente en ellos los efectos de aquellos coeficientes.

En tales casos está justificado, efectivamente, estudiar lo que ocurre al suponer que el fluido carece de viscosidad y de conductividad térmica, operando con el modelo que se llama habitualmente de un «fluido ideal».

Con ello se consigue introducir una simplificación fundamental en las ecuaciones del movimiento y un cambio también esencial en las condiciones de contorno.

Por lo que respecta a las primeras, el sistema [1], [2] y [3] se reduce al siguiente (21), llamado de Euler (22):

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad [25]$$

$$\frac{D v_i}{D t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad [26]$$

$$\frac{D S}{D t} = 0. \quad [27]$$

En particular, la última de estas ecuaciones muestra que, mientras el movimiento sea continuo (23), la entropía de cada partícula permanece constante, es decir, que el movimiento de cada partícula es isentrópico, como cabía esperar, puesto que la anulación de λ lo hace adiabático y la de μ , reversible.

(21) Recordemos que se ha supuesto que las fuerzas másicas son nulas.

(22) En una llamada de la introducción ya se señaló que las ecuaciones del movimiento de un fluido ideal son, como era previsible anticipar, anteriores a las de Navier-Stokes; se deben a Euler y datan de 1755.

(23) Se hace esta salvedad porque, como veremos en el epígrafe 16, al atravesar una onda de choque, que es una discontinuidad, varía la entropía de la partícula fluida.

Como veremos en el epígrafe 13, este carácter isentrópico confiere una simplificación importante al tratamiento matemático de una gran variedad de procesos de la Dinámica de Gases, de gran interés científico y tecnológico, al hacer que el estado termodinámico de cada partícula fluida quede determinado por el valor de una única variable termodinámica en lugar de las dos que son generalmente necesarias, como se indicó en particular, en las ecuaciones [10] y [11].

A título ilustrativo recordemos aquí una aplicación concreta, de la que haremos extenso uso a partir del epígrafe siguiente, de la gran simplificación que introduce en el problema la ausencia de la viscosidad y de la conductividad térmica.

Consideremos para ello el caso de los llamados movimientos estacionarios, de extensa aplicación en la técnica, en que las características del movimiento son invariables en cada punto, condición que se expresa, evidentemente, en la forma $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$, con lo que el tiempo desaparece como variable explícita del sistema diferencial propuesto.

En los movimientos estacionarios, las líneas de corriente, las cuales están caracterizadas por la condición

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3} \quad [28]$$

de que la velocidad sea tangente a las mismas en cada uno de sus puntos, son, evidentemente, fijas y cada partícula fluida recorre en su trayecto una de tales líneas de corriente.

Pues bien; la ecuación de la energía [8'] se reduce, en este caso, a la siguiente:

$$v_1 \frac{\partial \left(h + \frac{v^2}{2} \right)}{\partial x_1} = 0, \quad [29]$$

expresión que quiere decir, en vista de [28], que la función

$$h_0 = h + \frac{v^2}{2} \quad [30]$$

es constante sobre cada una de las líneas de corriente.

El valor h_0 se llama, por razones obvias, «entalpía de remanso» y puede venir, naturalmente, de una línea de corriente a otra, si bien, como veremos más adelante, existe una gran variedad de movimientos, llamados «isoenergéticos», en los que el valor de h_0 es el mismo para todo el espacio fluido.

La expresión [30] es la llamada ecuación de Bernoulli (24), la cual proporciona una integral primera del sistema del movimiento y, teniendo en cuenta la condición de isentropía [27], se puede expresar también en la forma:

$$\frac{v^2}{2} + \int \frac{d p}{\rho} = h_0 \quad [31]$$

recordando, como enseña la Termodinámica, que la variación de la entropía está dada por la expresión

$$T d s = d h - \frac{1}{\rho} \cdot d p. \quad [32]$$

Por lo que respecta a las condiciones de contorno, la ausencia de viscosidad elimina el requerimiento de adherencia del fluido a la pared, el cual debe sustituirse en este caso por el de deslizamiento sobre la misma, es decir, por la condición de que sólo la componente de la velocidad del fluido normal a la pared sea igual a la de ésta.

Por tanto, la triple condición (13) debe sustituirse en este caso por la única condición

$$n_j v_j = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)^2}} \quad [33]$$

en donde

$$F(x_i, t) = 0. \quad [34]$$

es la ecuación de la pared.

(24) D. BERNOULLI: *Hydrodynamica*, 1738.

Asimismo, es claro que desaparecen las condiciones [14] y [15] relativas al transporte de calor, por lo que las variaciones de la temperatura de cada partícula fluida son exclusivamente las producidas por las dilataciones y compresiones de la misma a lo largo de su movimiento.

4. FLUIDOS INCOMPRESIBLES

Es claro que la compresibilidad de los líquidos es muy reducida y que, por ello, salvo en el tratamiento de problemas especiales, puede prescindirse de la misma y considerarlos como fluidos incompresibles, es decir, como fluidos de densidad constante:

$$\rho = \text{const.}, \quad [35]$$

propiedad que introduce simplificaciones decisivas en las ecuaciones del movimiento.

Efectivamente; en primer lugar, la condición [35] de incompresibilidad reduce la ecuación de continuidad [1] a la siguiente ecuación lineal que deben satisfacer las componentes de la velocidad del fluido:

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0. \quad [36]$$

Por otra parte, esta ecuación y las tres [2] que dan la variación de la cantidad de movimiento forman un sistema determinado para el cálculo de las cuatro incógnitas v_1 , v_2 , v_3 y p .

Por tanto, la incompresibilidad simplifica las ecuaciones del proceso y reduce además su número, como el de incógnitas, en una unidad.

Claro es que la ecuación de la energía, en cualquiera de las formas [3], [5] o [6], sigue siendo válida, pero lo que ha ocurrido es que la incompresibilidad ha producido un «desacoplamiento» entre los procesos mecánicos, en los que solamente intervienen la velocidad y la presión, cuyos valores pueden calcularse separadamente mediante [36] y [2] y los procesos termodinámicos resultantes de las irreversibilidades producidas por la viscosidad y por la conductividad térmica, cuyos efectos se calculan posteriormente, mediante las ecuaciones [3] o [5] y las correspondientes funciones termodinámicas.

Ocurre, además, como enseña la Teoría de Campos Vectoriales (25), que la condición [35] de divergencia nula para el vector velocidad $\mathbf{v}$ de componentes v_i permite expresar la velocidad como rotacional de otro vector $\mathbf{a}$ de divergencia también nula.

Es decir, que la condición [35] permite expresar $\mathbf{v}$ en la forma:

$$\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{a}, \quad [37]$$

siendo $\mathbf{a}$ un vector que debe cumplir la condición:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0. \quad [38]$$

Al eliminar ahora $\mathbf{v}$ entre [36] y [37], se obtiene para el cálculo de $\mathbf{a}$ la ecuación diferencial vectorial

$$\Delta \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}, \quad [39]$$

en donde $\boldsymbol{\omega}$ es el rotacional de la velocidad (26)

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}, \quad [40]$$

de componentes

$$\omega_i = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

La ecuación vectorial (39), proporciona un sistema de tres ecuaciones de Poisson

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2} = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad [42]$$

para el cálculo de las tres componentes a_i del campo «solenoidal» $\mathbf{a}$ en función de la distribución espacial del rotacional $\boldsymbol{\omega}$, del campo de velocidades $\mathbf{v}$.

(25) Eventualmente, aquí y en algunos epígrafes posteriores, utilizaremos la teoría de los campos vectoriales para facilitar la expresión, empleando la notación habitual.

(26) Ver el epígrafe número 5, siguiente.

Como es sabido (27), dada en cada instante la distribución espacial de ω , la solución de [42] está dada por la expresión

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega(\xi)}{r} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad [43]$$

donde

$$r = \sqrt{(x_i - \xi_i)^2} \quad [44]$$

es la distancia entre el punto $\mathbf{x}$ y el punto de integración ξ

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \xi, \quad [45]$$

y la integral de volumen hay que extenderla a todo el espacio fluido en que sea $\omega \neq 0$.

Por último, al aplicar [37] a [43] se obtiene la expresión

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\omega \times \mathbf{r}}{r} \cdot d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad [46]$$

que permite calcular el campo de velocidades de un fluido incompresible en función de la distribución del de sus torbellinos.

La expresión [46] es la célebre ley de Biot y Savart, de extensa aplicación en Electrodinámica.

En el epígrafe número 9 veremos la gran aplicación que encuentra también en Mecánica de Fluidos, especialmente para el cálculo de las fuerzas que se ejercen sobre determinados obstáculos.

Como es sabido, la rama de la Mecánica de Fluidos que se ocupa específicamente de los fluidos incompresibles se llama, habitualmente, Hidrodinámica y fue, como es lógico, la primera en desarrollarse (28).

Pero la utilidad de esta Teoría va, en la práctica, mucho más allá de lo que podría pensarse inicialmente, puesto que la misma se aplica también al estudio de una gran variedad de problemas de la Dinámica de Gases, cuando sus velocidades no son demasiado elevadas.

(27) Ver, por ejemplo, S. G. MIKHLIN: *Mathematical Physics, an Advance Course*. North Holland Publ. Cod., Amsterdam, 1970, págs. 218 y sigts. Ver también SERRIN, ya citado, págs. 163 y sigts., o bien H. VILLAT: *Leçons sur la Théorie des Tourbillons*, Gauthier-Villars, París, 1960.

(28) Ver Lamb, ya citado.

Ocurre, en efecto, que en tanto el número de Mach del movimiento de un gas sea pequeño con respecto a la unidad, el gas se comporta básicamente como un fluido incompresible, según ilustra la siguiente consideración sencilla.

En el caso de un líquido, la ecuación [31] de Bernoulli se reduce, evidentemente, a la siguiente:

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho v^2. \quad [47]$$

donde p_0 es la llamada presión de «remanso», es decir, la que corresponde a un punto de velocidad nula y la diferencia $(p_0 - p)$ es la llamada «presión dinámica».

En el caso de un gas perfecto, con relación γ de calores específicos constante, aquella ecuación, teniendo presente que la entalpía del gas está dada por la expresión (29):

$$h = c_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad [48]$$

toma, en cambio, la forma:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \quad [49]$$

donde, al ser las transformaciones isentrópicas, la relación entre la presión y la densidad es

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma \quad [50]$$

y la velocidad de propagación del sonido resulta ser:

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}. \quad [51]$$

(29) Puesto que no varía la composición del gas, su entalpía de formación se deduce de la constante C .

Todo lo cual permite expresar la presión y la densidad en función del número de Mach $M = \frac{v}{a}$ en la forma siguiente:

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma - 1}}; \quad [52]$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\gamma - 1}} \quad [53]$$

y proporciona, para las variaciones de la presión en función de la velocidad, el siguiente desarrollo asintótico, en serie de potencias del número de Mach:

$$p_0 - p = \frac{1}{2} \rho v^2 \left[1 + \frac{1}{4} M^2 + O(M^4) \right] \quad [54]$$

La comparación de esta expresión con la [47] que corresponde, como hemos visto, a las variaciones para un fluido incompresible, muestra que la diferencia relativa entre ambos casos es del orden de M^2 .

Por ejemplo, si el número de Mach es inferior a 0,4, la diferencia relativa es del orden del 4 por 100, lo cual significa que la aproximación de incompresibilidad debe resultar satisfactoria para el estudio de muchos problemas y explica que el desarrollo de toda la Aerodinámica clásica se haya basado en este supuesto, cuyo verdadero alcance práctico se apreciará plenamente en los epígrafes siguientes.

5. MOVIMIENTOS TURBILLONARIOS

La Cinemática de los Medios Continuos enseña (30) que la forma más general del movimiento instantáneo de una partícula fluida situada en el entorno del punto x_i , resulta de superponer una traslación de velocidad $v_i(x_i)$; una rotación de componentes $\Omega_i(x)$ y una de-

(30) Ver J. SERRIN, ya citado, págs. 139 y sigts. También S. GOLDSTEIN, 1960, ya citado, págs. 13 y sigts., así como A. C. ERNIGEN: *Mechanics of Continua*, John Wiley and Sons, New York, 1967.

formación, consistente en una dilatación a lo largo de tres ejes mutuamente perpendiculares.

Las componentes Ω_i de la rotación se expresan en función del rotacional

$$\omega_i = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j, l = 1, 2, 3 \quad [55]$$

de la velocidad v_i en la forma:

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \omega_i, \quad [56]$$

o bien, en la notación vectorial habitual, que resulta ventajosa para el presente epígrafe, en la forma:

$$\Omega = \frac{1}{2} \omega = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}. \quad [57]$$

Teniendo presente que las variaciones de la cantidad de movimiento angular del elemento fluido deben resultar de los pares de fuerza que actúen sobre el mismo y que los únicos esfuerzos tangenciales, que son los que pueden dar lugar a tales pares, son los debidos a la viscosidad, es evidente, que el rotacional ω de la velocidad debe jugar un papel importante en el estudio del movimiento de los fluidos.

En particular, en los fluidos ideales, carentes de esfuerzos de viscosidad, hay que prever que la evolución de ω al seguir a una misma partícula fluida en su movimiento, esté sometida a condiciones muy limitativas.

Esto es efectivamente así, como resulta de la siguiente ecuación de convección de la vorticidad, debida a Beltrami (1871):

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{D \mathbf{v}}{Dt} \right) \quad [58]$$

al introducir en ella la relación entre la aceleración $\frac{D \mathbf{v}}{Dt}$ de la partícula fluida y el gradiente de la presión

$$\frac{D \mathbf{v}}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad [59]$$

a que se reducen las ecuaciones del impulso, en el caso de un fluido sin efectos de viscosidad ni fuerza másicos, con lo que se obtiene finalmente:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) \quad [60]$$

Por ejemplo, si el fluido es incompresible o si la densidad depende tan sólo de la presión (fluido barotropo), entonces

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = 0, \quad [61]$$

con lo que la ecuación de convección la vorticidad se reduce a

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}, \quad [62]$$

de donde resulta, por ejemplo, que si el movimiento de una partícula o de una porción del fluido son irrotacionales en un instante dado, lo serán indefinidamente (Lagrange-Cauchy), es decir, se cumplirá en ellos la condición

$$\omega \equiv 0. \quad [63]$$

En particular, los movimientos de fluidos ideales incompresibles que se originan a partir del reposo, son irrotacionales.

Un caso de movimiento «barotrópico» de la mayor importancia práctica, es el de los movimientos llamados «isentrópicos», en que la entropía del fluido es constante, no sólo para cada partícula como se vio en [27], sino en todo el espacio, o en una porción de él:

$$S(p, \rho) = \text{const.} \quad [64]$$

Como se verá más adelante, una gran variedad de movimientos estudiados por la Dinámica de Gases tienen esta propiedad, al menos en amplias porciones del espacio fluido, si bien una excepción importante la constituyen, como veremos también, los movimientos detrás de ondas de choque fuertes y cuya intensidad sea variable de un punto a otro.

Existe un conjunto importante de propiedades de los movimientos llamados «turbillonarios» que se deducen de las expresiones anteriores y cuyo enunciado corresponde a la Hidrodinámica clásica. Entre ellas destacan, por su importancia, los célebres teoremas de lord Kelvin y de Helmholtz, que nos limitaremos a enunciar aquí, puesto que su desarrollo y consecuencias son bien conocidas y se encuentran en todos los tratados clásicos sobre la materia (31).

Lord Kelvin (32) introdujo en 1869 el concepto de «circulación de la velocidad» sobre una curva, el cual ha resultado de una fecundidad extraordinaria para el estudio de las fuerzas aerodinámicas sobre alas, hélices, rotores, etc.

La circulación Γ de la velocidad $\mathbf{v}$ sobre una curva cerrada es, por definición, la integral curvilínea:

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{x} \quad (65)$$

y el interés de esta magnitud radica en el hecho de que, bajo las condiciones anteriormente enunciadas para la validez de la ecuación [62] de convección del torbellino, la circulación Γ es un invariante del movimiento al seguir a la curva C en él, es decir, que se cumple la condición

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad [66]$$

para toda curva fluida cerrada C :

En cuanto a los teoremas de Helmholtz (33), permiten visualizar en forma sumamente clara el comportamiento de los torbellinos, al establecer que las líneas turbillonarias, es decir, las líneas tangentes en cada uno de sus puntos al vector torbellino en él, son líneas fluidas; que un tubo de torbellinos, es decir, un tubo formado por las líneas turbillonarias que pasan por un circuito cerrado C , tiene la misma circulación para cualquiera de los circuitos cerrados C que lo

(31) Ver, por ejemplo, H. VILLAT: *Leçons sur la Théorie des Tourbillons*, Gautier Villars, París. 1930, así como SERRIN, ya citado.

(32) SIR WILLIAM THOMSON: «Trans. Roy. Soc. Edimb.», 1869, págs. 217 y siguientes.

(33) H. HELMHOLTZ: «J. reine angew. Math.», 1858, págs. 25 y sigts.

rodeen que, por ello, los tubos de torbellinos no pueden acabar en el interior del espacio fluido, sino que son cerrados, indefinidos o terminan en los contornos de aquél; finalmente, que la intensidad de un tubo turbillonario, medida por la circulación Γ sobre un circuito C del mismo, o por el flujo de ω a través de una sección transversal, es un invariante del movimiento (34).

En el caso en que el movimiento de un fluido compresible no sea barotrópico, teniendo presente la relación termodinámica:

$$\frac{1}{\rho} d p = d h - T \cdot d S \quad [67]$$

se demuestra fácilmente que la ecuación [62] de convección turbillonaria debe sustituirse por la siguiente, debida a Vazsonyi (35):

$$\frac{D}{D t} \left(\frac{\omega}{\rho} \right) = \left(\frac{\omega}{\rho} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\nabla T) \times (\nabla S), \quad [68]$$

lo cual pone de manifiesto, a través del último término del segundo miembro, la influencia de las irreversibilidades del movimiento en la difusión de los torbellinos.

Por último, una formulación útil de las ecuaciones del movimiento, que expresa la relación entre las magnitudes más importantes, es la siguiente, debida a Crocco (36):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \mathbf{h}_0 + \omega \times \mathbf{v} = -\nabla h_0 + T \cdot \nabla S \quad [69]$$

donde

$$h_0 = h + \frac{1}{2} v^2 \quad [70]$$

es la llamada entalpía de «remanso» de la partícula.

(34) Para más recientes desarrollos de los movimientos turbillonarios, ver J. SERRIN, ya citado.

(35) A. VAZSONYI: «Quart. Appl. Math.», 1945, págs. 29 y sigts.

(36) L. CROCCO: *Eine neue Stromfunktion für die Erforschung der Bewegung der Gase mit Rotation*. ZAMM, 1937, págs. 1-7.

En el caso particular de un fluido incompresible, se comprueba fácilmente que esta expresión se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla \left(p + \frac{1}{2} v^2 \right) \quad [71]$$

6. MOVIMIENTOS IRROTACIONALES. FLUIDOS INCOMPRESIBLES

En el epígrafe anterior se ha visto que los torbellinos son producidos por los efectos de la viscosidad o por otras causas de irreversibilidad que alteren en algún punto la isentropía del medio.

Por tanto, en el caso de los fluidos ideales debe tener gran importancia el estudio de los movimientos llamados «irrotacionales», para los cuales se cumple la condición:

$$\omega_i(x_i, t) \equiv 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad [72]$$

Como es sabido, esta condición implica la de que la velocidad del movimiento derive de una función escalar $\varphi(x_i, t)$, llamada «potencial de velocidades» y tal que

$$v_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}, \quad [73]$$

por lo que estos tipos de movimientos se llaman también «potenciales».

Si el fluido es incompresible, entonces, al introducir la expresión [73] en la ecuación de continuidad [36], se obtiene, para el cálculo del potencial de velocidades, la ecuación:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0, \quad [74]$$

es decir, no sólo una ecuación lineal sino, además, la de Laplace, o sea, la más familiar de las ecuaciones en derivadas parciales de la física Matemática.

Como es bien sabido, esta ecuación goza de un conjunto de propiedades en cuanto a la existencia, unicidad y valores extremos de

sus soluciones (37), bajo condiciones de aplicabilidad muy generales, todas las cuales encuentran utilización en el estudio de los movimientos potenciales (38).

La solución de la ecuación [74], para las condiciones de contorno que correspondan al problema en estudio, determina el campo de velocidades del movimiento, el cual se obtiene de las simples condiciones cinemáticas de irrotacionalidad e incompresibilidad, sin que intervenga para nada el campo de presiones.

Este se calcula a partir del de velocidades, mediante la ecuación [71], la cual, en el caso del movimiento irrotacional, proporciona una integral primera de la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 = \text{const.}, \quad [75]$$

que constituye una generalización de la ecuación (31) de Bernoulli, aplicable en todo el espacio del movimiento, incluso en el caso no estacionario.

El carácter lineal de la ecuación [74] permite superponer soluciones, lo que proporciona un instrumento muy poderoso para el estudio de esta clase de movimientos, del que pueden verse numerosos ejemplos en cualquier tratado clásico (39).

En general se utilizan como soluciones elementales, para componer otras más complejas, singularidades aisladas tales como fuentes, dobletes, torbellinos, etc., situados en el contorno del obstáculo o en el espacio exterior al mismo y combinados de tal forma que permitan satisfacer las condiciones de contorno.

Entre éstas, la más frecuente es la de deslizamiento del fluido sobre las superficies que limitan el espacio del movimiento, unidas a condiciones de regularidad del potencial en el infinito, cuando el espacio fluido es indefinido, como ocurre en los problemas llamados «exteriores».

Por lo que respecta a la condición de deslizamiento [33], en el caso

(37) Ver O. D. KELLOGG: *Foundations of Potential Theory*. Springer, Berlín, 1929. Editado también en la colección Dover Publ. de Nueva York.

(38) Ver, por ejemplo, J. SERRIN, ya citado, págs. 158 y sigts.

(39) Ver, por ejemplo, las obras de LAMB o de MILNE-THOMSON, citadas en la introducción.

de los movimientos potenciales ésta se expresa, evidentemente, en la forma:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial t}}{V \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2} \quad [76]$$

que corresponde, por tanto, a un problema de Neumann, si bien encontraremos más adelante, al tratar de la Teoría de Sustentación, ejemplos de problemas de Dirichlet (40).

En cuanto a la condición de regularidad en el infinito, en el caso de un problema «exterior», si el fluido no está en reposo en dicho punto sino que la velocidad en él tiene las componentes $V_{\infty i}$, el potencial Φ de velocidades se puede expresar en la forma

$$\Phi(x_i) = V_{\infty j} \cdot x_j + \varphi(x_i), \quad [77]$$

con lo que el potencial $\varphi(x_i)$, llamado generalmente de «perturbación», cumplirá la citada condición.

Los problemas de mayor interés tecnológico suelen consistir en la determinación del movimiento en un espacio «interior» o «exterior» limitado por uno o varios contornos que se mueven con leyes determinadas.

Si se da la forma y la ley de movimiento del contorno, el problema, llamado «directo», consiste en la determinación de los campos de velocidades y de presiones en todo el espacio y, de modo especial, en el propio contorno.

Si, por el contrario, se busca la forma del contorno capaz de producir una distribución de presiones, o, lo que es equivalente, de velocidades sobre el mismo, el problema se llama «inverso».

En cualquier caso, si es S la superficie o el conjunto de superfi-

(40) Para una discusión de la no aplicabilidad al caso del problema de Cauchy, de condiciones iniciales, ver por ejemplo S. GONOUNOV: *Equations de la Physique Mathématique*. Ediciones MIR. Moscú, 1973, págs. 203 y sigts.

cies del contorno, como es sabido (41), el potencial $\varphi(x_i)$ admite la expresión integral general (42):

$$\varphi(x_i) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) \frac{1}{r} d\sigma - \frac{1}{4\pi} \iint_S \varphi \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \cdot d\sigma, \quad [78]$$

en donde

$$r = \sqrt{(x_i - \xi_i)^2} \quad [79]$$

es la distancia entre el punto x_i en que se calcula el potencial y el ξ_i situado sobre la superficie S del contorno y n es la dirección de la normal a S en ξ_i , del lado interior del espacio fluido.

La expresión [78] muestra que el movimiento se puede considerar como resultante de la superposición de una distribución continua de «fuentes» sobre la superficie S del contorno, de intensidad unitaria $\frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial n}$, unida a otra distribución de «dobletes» de intensidad unitaria $\varphi(\xi_i)$ y cuyos ejes tienen la orientación de la normal n a S .

Ahora bien, ambas distribuciones no pueden ser arbitrarias, puesto que también enseña la Teoría del Potencial que entre $\varphi(\xi_i)$ y $\frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial n}$ sobre S existe la relación

$$\iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} \frac{1}{r'} \cdot d\sigma - \iint_S \varphi \cdot \frac{\partial \left(\frac{1}{r'} \right)}{\partial n} \cdot d\sigma, \quad [80]$$

siendo r' la distancia de ξ_i a cualquier punto x'_i exterior al espacio fluido, lo que proporciona una ecuación integral para el cálculo de $\frac{\partial \varphi(\xi_i)}{\partial n}$, dada $\varphi(\xi_i)$ y a la inversa, según se trate, respectivamente, de un problema de Neumann o de uno de Dirichlet.

(47) Ver, por ejemplo, R. COURANT y D. HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik*. Springer, Berlín, 1937. Vol. II, págs. 281 y sigts.

(42) En el caso de los movimientos en dos dimensiones que estudiaremos en los epígrafes siguientes, la solución fundamental $\frac{1}{r}$ debe sustituirse por $\ln r$

En general, el conjunto de soluciones analíticas de que se dispone, tanto para el problema directo como para el inverso, es muy limitado por lo que respecta al número de las mismas y a su interés práctico.

Por ello es necesario recurrir, bien sea a procedimientos de cálculo numérico, cuya viabilidad se ha desarrollado extraordinariamente con el empleo de los calculadores electrónicos, bien sea a aproximaciones analíticas tales como la Teoría de Perturbaciones Pequeñas, de las que veremos algunas importantes aplicaciones más adelante.

Entre los procedimientos de cálculo numérico que se han desarrollado para la obtención de las soluciones correspondientes a contornos de forma arbitraria, con ayuda de calculadores electrónicos, resulta particularmente adecuado el que han puesto a punto Hess y Smith (43), de la Mc Donnell-Douglas Aircraft Corp., quienes expresan el potencial $\varphi(x_i)$ como resultante de una distribución continua de fuentes de intensidad $\alpha(\xi_i)$ sobre el contorno S del movimiento:

$$\varphi(x_i) = - \iint_S \frac{\alpha(\xi_i)}{r} \cdot d\sigma. \quad (81)$$

La intensidad $\alpha(\xi_i)$ de la distribución de tales fuentes, debe calcularse ahora de tal modo que se cumpla la condición [76] en cada punto ξ_i del contorno S, lo cual implica un paso al límite cuando $x_i \rightarrow \xi_i$ en las derivadas de $\varphi(x_i)$ deducidas de [81].

La cuestión está también resuelta por la Teoría del Potencial (44), con lo que se obtiene, finalmente, la relación:

$$2\pi \cdot \alpha(x_i) - \iint_S \alpha(\xi_i) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial n} \cdot d\sigma = \frac{\partial \varphi(x_i)}{\partial n} \quad [82]$$

en donde x_i es ahora un punto de la superficie S y el segundo miembro de la expresión está determinado por la condición [76].

(43) J. L. HESS y A. M. O. SMITH: *Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies*. Progress in Aeronautical Sciences. Vol. 8, Pergamon Press, Oxford. 1967, págs. 1-138.

(44) Ver COURANT y HILBERT, ya citado, págs. 236 y sigts.

La expresión [82] es una ecuación integral de Fredholm, de se-

gunda especie, cuyo núcleo $\frac{1}{\partial \frac{r}{\partial n}}$ depende tan sólo de la geometría del obstáculo y es singular en el punto $x_i = \xi_i$.

La Teoría de la existencia, unicidad y métodos de resolución de este tipo de ecuaciones han sido extensamente estudiados (45) y permiten aplicar el procedimiento a la resolución de una gran variedad de movimientos.

Para el tratamiento numérico de los mismos sólo resta determinar la red discreta de puntos a los que debe aplicarse la condición [82], con objeto de transformar la ecuación integral en un sistema algebraico, susceptible de procesamiento en un calculador electrónico.

Para la descripción de la técnica correspondiente, así como para la valoración de los resultados de la aplicación del método a una gran variedad de ejemplos prácticos y su comparación con los obtenidos por otros procedimientos, remitimos al lector al trabajo de Hess y Smith, donde se incluye, además, una extensa bibliografía sobre la materia, la cual puede completarse, por lo que respecta al empleo de otros procedimientos, con la que se da en el trabajo más reciente de Assley y Rodden que se cita en el epígrafe número 9.

Obtenida, mediante la resolución de la ecuación [82] la distribución sobre el contorno S de las fuentes $\alpha(\xi_i)$ que resuelve el problema, la expresión [81] proporciona el valor del potencial de velocidades en cualquier punto del espacio fluido incluido el contorno S.

Y obtenido el potencial $\phi(x_i)$, la expresión [73] proporciona la distribución de la velocidad y la expresión [75], la de la presión, con lo que pueden calcularse, por ejemplo, las fuerzas y momentos que el fluido ejerce sobre S.

Por lo que respecta a tales fuerzas, una propiedad de la mayor importancia es la célebre paradoja de d'Alembert (46), según la cual «la fuerza hidrodinámica sobre un obstáculo de dimensiones finitas que se mueve con velocidad uniforme a través de un fluido ideal e incompresible, indefinido y en reposo en el infinito, es cero o se reduce a un par».

(45) Ver KELLOGG, ya citado.

(46) J. L. D'ALEMBERT: *Opuscles Mathématiques*, 1768. Ver también G. BIRKHOFF, ya citado, págs. 10 y sigts.

Esta paradoja resuelta del comportamiento de las soluciones de la ecuación de Laplace en el entorno del infinito y su demostración se consigue mediante la adopción de un sistema de referencia ligado al obstáculo, lo que permite expresar el potencial Φ de velocidades en la forma indicada en [77], con lo que el potencial de perturbación φ es regular en el infinito y sus derivadas tienden a cero allí. Además el valor de $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ es conocido sobre cada punto de la superficie del obstáculo, en virtud de [76].

Se trata, por tanto, de un problema exterior de von Neumann y la teoría del potencial enseña, entonces, que cuando la distancia $r = \sqrt{(x_1)^2}$ al origen tiende a infinito, φ es un infinitésimo de orden r^{-2} .

Ahora bien, para obtener la fuerza que el fluido ejerce sobre el obstáculo basta calcular la variación de la cantidad de movimiento de la masa fluida situada en el interior de una superficie de control muy alejada de aquél, por ejemplo, una esfera de radio muy grande, así como la resultante de las presiones que se ejercen sobre ella, todo lo cual tiende a cero, como se comprueba fácilmente, en virtud del comportamiento de φ en el entorno de $r \rightarrow \infty$, lo que demuestra la paradoja (47).

Esta paradoja, en flagrante contradicción con las observaciones experimentales, confrontó a la teoría con uno de sus problemas más importantes, cuya explicación radica en el hecho de que, en la mayoría de los casos, el movimiento real del fluido se adapta mal al modelo descrito, como consecuencia de la formación de una estela detrás del obstáculo, al separarse la corriente en algún punto del contorno de aquél, a causa de la acción de la viscosidad en la inmediata proximidad de la pared.

Por ello, cuando los obstáculos poseen la forma adecuada, es decir, cuando son del tipo que en Aerodinámica se halla habitualmente «fuselado», el desprendimiento de la corriente se retrasa mucho hacia el extremo posterior de aquél, la estela se hace mínima y la fuerza

(47) Que d'Alembert demostró por consideraciones de simetría, solamente para obstáculos simétricos respecto de un plano normal al movimiento. Para un análisis matemático completo del problema, ver M. MANARINI: *Sur Paradoxes d'Alembert e di Brillouin nella Dinamica dei Fluidi*. «Att. Accad. Naz. Lincei», 1948, págs. 427-33.

de resistencia tiende a anularse, aproximándose considerablemente a los resultados de la Teoría.

Es claro que una parte importante de los desarrollos de la Mecánica de Fluidos ha tenido por objeto escapar a esta paradoja, mediante la obtención de soluciones que se adapten mejor a los hechos observables y que permitan calcular con una aproximación satisfactoria las fuerzas ejercidas por los fluidos en los obstáculos que mueven en su seno.

Dicho escape se ha producido en una doble dirección. De un lado, mediante la incorporación al modelo descrito de superficies de discontinuidad que permitan esquematizar el contorno de las estelas. De otro, tomando en consideración la acción de la viscosidad en la inmediata proximidad de la pared del obstáculo, para sustituir la condición de deslizamiento [33] por la de adherencia [13], al mismo tiempo que se preservan las ventajas del modelo de fluido ideal fuera de dicha proximidad.

Pero antes de penetrar en la cuestión, vamos a referirnos por un instante a un tipo especial de movimientos de gran importancia tecnológica: los llamados movimientos planos, que constituirán el objeto del epígrafe siguiente:

7. FLUIDOS INCOMPRESIBLES. MOVIMIENTOS PLANOS. MOVIMIENTOS CON SIMETRÍA DE REVOLUCIÓN

Existen muchos casos de gran interés tecnológico, de los que vamos a ver algunos ejemplos importantes en los epígrafes siguientes, en que el movimiento puede suponerse plano, es decir, independiente de la tercera coordenada x_3 (48).

Como vamos a ver, el estudio matemático de tales movimientos puede efectuarse, además, mediante métodos específicos, que no son generalizables al caso tridimensional, ni siquiera al bidimensional de los movimientos de revolución al que nos referimos más adelante.

En efecto; si el movimiento es plano, suponiendo que tiene lugar

(48) Para un estudio detallado del contenido de este epígrafe, así como de los dos siguientes y del número 14 por lo que respecta a los movimientos planos, ver la obra de L. C. Woods: *The Theory of Subsonic Plane Flow*. Cambridge Univ. Press., 1961.

en el plano x_1, x_2 y haciendo $x_1 = x$ y $x_2 = y$, la ecuación [74] del potencial de velocidades se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad [83]$$

lo cual significa, como es bien sabido, que el potencial φ es la parte real de una función analítica f de la variable compleja $z = x + iy$:

$$f(z) \equiv f(x + iy) = \varphi(x, y) + i \cdot \psi(x, y), \quad [84]$$

cuya parte compleja $\psi(x, y)$ es también una función armónica, conjugada de φ , es decir, relacionada con ella por las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [85]$$

y que tiene una interpretación física directa.

En efecto, $\psi(x, y)$ es la llamada «función de corriente» (49) del movimiento, es decir, una función tal que las curvas

$$\psi(x, y) = \text{const.} \quad [86]$$

son tangentes en cada uno de sus puntos a la velocidad instantánea del fluido en él y que la diferencia

$$\rho(C_1 - C_2) = \rho[\psi(x_1, y_1) - \psi(x_2, y_2)] \quad [87]$$

es el flujo del fluido que pasa a través de cualquiera de las curvas que unen los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) siempre y cuando se pueda pasar de una a otra de tales curvas por deformación continua sin abandonar el espacio fluido.

Es claro que el contorno de un obstáculo es línea de corriente, puesto que el fluido se desliza sobre él. Por tanto, la condición de contorno que debe cumplir la función ψ en él, es la [86], en lugar de la [76] correspondiente a φ . Por tanto, si el problema se intenta

(49) El concepto matemático fue introducido por Lagrange en 1781, mientras que la interpretación clásica se debe a Rankine y data de 1864.

resolver por integración de la función armónica de corriente estamos ante una condición de Dirichlet.

Por último, la expresión compleja v de la velocidad del movimiento es, evidentemente:

$$v = v_x + i \cdot v_y, \quad [88]$$

mientras que la derivada de $f(z)$ con respecto a z es, como se comprueba fácilmente:

$$\frac{df(z)}{dz} = v_x - i v_y \equiv \bar{v}, \quad [89]$$

donde la magnitud $\bar{v}$ se llama «velocidad compleja» del movimiento y es la conjugada de la velocidad real v .

Debiendo advertirse que todas estas propiedades son válidas para movimientos estacionarios o no, en cuyo caso habría de hacerse explícita la variable t , junto a x e y (o a z), en las anteriores expresiones.

La condición [84] pone a disposición de la Mecánica de Fluidos, en este caso, el poderoso instrumento de la Teoría de las Funciones Analíticas (50) y, en especial, el de la Representación Conforme (51), que permite trasladar soluciones de un contorno a otro, de lo que se ha hecho uso abundantísimo y muy frecuente en las aplicaciones (52), especialmente por lo que respecta a la Teoría de la Sustentación, es decir, de la fuerza aerodinámica perpendicular a la dirección del movimiento, cuestión a la que nos referiremos en el epígrafe número 9.

Otra clase especial de movimientos en dos variables, de gran interés tecnológico también, son los movimientos con simetría de revolución.

En tal caso, si son x, r las coordenadas axial y radial, respectiva-

(50) Ver, por ejemplo, L. BIBERBACH: *Lehrbuch der Funktionentheorie*. Chelsea Publ. Co., Nueva York, 1945. También M. LAURENTIEV y B. CHABAT: *Méthodes de la Théorie des Fonctions d'une Variable Complexe*. Ediciones MIR de Moscú, 1972.

(51) Ver, por ejemplo, Z. NEHARI: *Conformal Mapping*. Mc Graw-Hill, Nueva York, 1952.

(52) Ver, por ejemplo, L. M. MILNE-THOMSON: *Theoretical Hydrodynamics*. Mac Millan and Co. Ltd., Londres, 1938, y *Theoretical Aerodynamics*, ídem id., 1952, así como la obra de WOODS, ya citada.

mente, la ecuación $\varphi(x, r)$ del potencial de velocidades se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad [90]$$

en donde las componentes axial u y radial v de la velocidad están dadas, evidentemente, por las expresiones

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \quad [91]$$

La ecuación [90], en virtud de [91], puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial(ru)}{\partial x} + \frac{\partial(rv)}{\partial r} = 0, \quad [92]$$

que es la expresión de la ecuación de continuidad en este caso.

Dicha expresión constituye una condición de integrabilidad que demuestra la existencia, también para este tipo de movimientos, de una función de corriente $\psi(r, x)$, llamada de Stokes, tal que

$$ru = \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad rv = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [93]$$

y cuya interpretación física, al igual de lo que ocurría para los movimientos planos, resulta inmediata.

En particular, las líneas

$$\psi(x, r) = \text{const.} \quad [94]$$

son líneas de corriente en el plano meridiano (x, r) del movimiento.

Al no ser $\varphi(x, r)$ una función armónica de las variables x, r se carece en este caso, desgraciadamente, del poderoso instrumento de resolución de la Representación Conforme, de tan gran utilidad como veremos para el tratamiento de los movimientos planos, lo que obliga a buscar soluciones mediante procedimientos tales como la superposición de fuentes y dobletes.

Un caso especial de mucho interés, que describiremos brevemente

para ilustrar el Método de las Pequeñas Perturbaciones, del que más adelante se ofrecerán otros varios ejemplos, es el de los cuerpos fuselados sometidos a una corriente principal uniforme e indefinida V , paralela al eje x de revolución.

Sea $\Phi(x, r)$ el potencial de velocidades del movimiento resultante, el cual puede expresarse como se hacía en el epígrafe precedente, en la forma:

$$\Phi(x, r) = V \cdot x + \varphi(x, r), \quad [95]$$

donde $\varphi(x, r)$ es un potencial de perturbación de gradiente nulo en el infinito y que debe satisfacer la misma ecuación [83] de Laplace que $\Phi(x, r)$.

Por tanto, como también se vio en el epígrafe precedente, $\varphi(x, r)$ puede expresarse como resultante de una distribución continua de fuentes sobre el contorno del obstáculo y cuyas intensidades se determinan mediante la aplicación, por ejemplo, del método de Hess y Smith descrito allí.

Veamos ahora cómo puede simplificarse el problema en el caso de que el espesor del obstáculo sea pequeño con respecto a la longitud del mismo, es decir, cuando se trate de un cuerpo «fuselado».

Supongamos para ello, como ilustra la figura I-1, a), que el eje del obstáculo está situado en el intervalo $0 \leq x \leq l$ y que la ecuación de su contorno, en el plano meridiano, es de la forma:

$$r_c = \delta \cdot f(x), \quad [96]$$

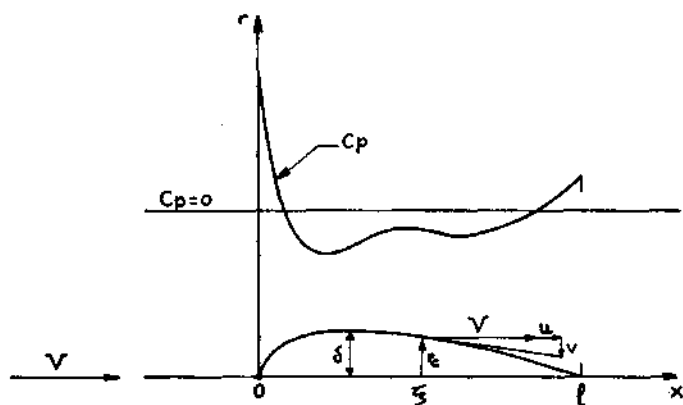
en donde δ es una medida del espesor del cuerpo. Se trata, entonces, de obtener una aproximación lineal del problema, válida para $\frac{\delta}{l} \ll 1$.

En tales circunstancias, las velocidades de perturbación son mucho menores que V (53):

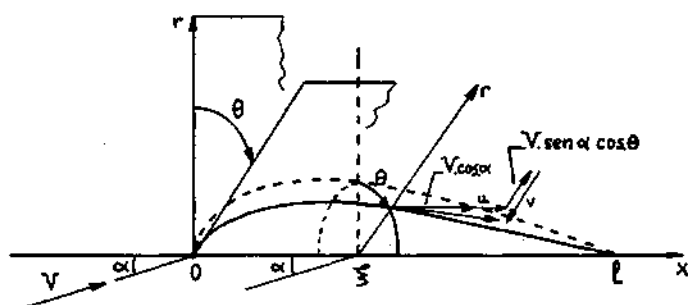
$$\frac{|u|}{V} \ll 1 \quad \frac{|v|}{V} \ll 1, \quad [97]$$

(53) A excepción del punto anterior de remanso, si el cuerpo es de proa achatada como el de la figura.

y al llevar a cabo una linealización del problema (54) se demuestra que la distribución de fuentes $a(\xi)$ se puede situar sobre el eje del cuerpo, en lugar de hacerlo sobre su contorno y que la condición de



a) Movimiento paralelo al eje de simetría



b) Movimiento con ángulo de ataque

Fig. I-1.—Movimientos alrededor de cuerpos fuselados de revolución.

(54) Ver, por ejemplo, la obra de G. N. WARD, a la que nos referiremos en más de una ocasión en lo sucesivo: *Linearized Theory of Steady High-Speed Flow*. Cambridge Univ. Press, 1955, págs. 187 y sigts.

tangencia de la velocidad que ilustra la figura I-1, a), se reduce a la expresión:

$$0 \leq x \leq l, \quad \frac{v}{V} = \delta \cdot f'(x), \quad [98]$$

la cual, además, se puede aplicar, también, en el punto $(x, 0)$ del eje, en lugar de hacerlo en el punto (x, r_0) del contorno de obstáculo.

En tales condiciones se comprueba (55) que la intensidad $a(\xi)$ de la distribución de fuentes está dada por la expresión

$$a(\xi) = V \cdot \frac{d\sigma(\xi)}{\delta\xi}, \quad [99]$$

en donde

$$\sigma(\xi) = \pi \cdot r_c^2(\xi) \quad (100)$$

es el área de la sección transversal del cuerpo en el punto ξ .

Con ello, el potencial $\varphi(x, r)$ de perturbación está dado por la expresión

$$\varphi(x, r) = -\frac{V}{4\pi} \int_0^l \frac{d\sigma(\xi)}{\sqrt{(x-\xi)^2 + r^2}} \quad [101]$$

En cuanto a la distribución de presiones, ésta se suele expresar a través del coeficiente de presión C_p , el cual se define en la forma:

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V^2} \quad [102]$$

de interpretación física directa.

(55) TH. VON KARMAN: *Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern*, 1927, «Coll. Works. Butterworths Sci. Publ.», Londres, 1956, vol. II, páginas 253-76.

En la aproximación lineal que estamos considerando, se obtiene para C_p la expresión

$$C_p \approx - \frac{2 \varphi_r}{V}, \quad [103]$$

si bien, al aplicarla sobre el eje como corresponde a la Teoría Lineal, para calcular la distribución de presiones sobre el obstáculo, surge una dificultad en el caso de los cuerpos de revolución que estamos estudiando (a diferencia de lo que ocurre en los movimientos planos), que obliga a emplear, en lugar de [103], la aproximación

$$C_p \approx - 2 \frac{\varphi_r(x, 0)}{V} - \frac{\varphi_{rr}(x, 0)}{V} \quad [104]$$

como se comprueba mediante un cálculo detallado de los órdenes de magnitud de las distintas derivadas de [101] para $r = 0$, o cuando es $\frac{\delta}{l} \ll 1$ (56).

Si la corriente principal, en lugar de ser paralela al eje del cuerpo de revolución forma un ángulo de incidencia α con él, como ilustra la figura 1-1, b), entonces el movimiento carece de simetría de revolución y la ecuación [90] debe sustituirse por la de Laplace completa en coordenadas cilíndricas x, r, θ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0, \quad [105]$$

donde θ es el ángulo formado por el plano meridiano que se considera, con el definido por la dirección de la corriente incidente α , como ilustra la figura.

En este caso se comprueba fácilmente que la aproximación lineal para la condición de tangencia de la velocidad al obstáculo en el punto es:

$$\frac{\varphi_r}{V \cdot \cos \alpha} = \frac{d r_c}{d \xi} - \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \theta. \quad [106]$$

(56) Ver WARD, ya citado.

De los dos términos del segundo miembro de esta condición, el primero, que es independiente de θ , corresponde a una corriente axial de velocidad $V \cdot \cos \alpha$, en tanto que el segundo, que es independiente de x , corresponde a una corriente transversal de velocidad $V \cdot \sin \alpha$.

La solución de la primera de estas dos corrientes se consigue, como hemos visto, mediante una distribución de fuentes sobre el eje del cuerpo de revolución, con lo que el potencial $\varphi_1(x, r)$ correspondiente a la misma está dado por la expresión [101], sin más que multiplicar dicha expresión por $\cos \alpha$.

En cuanto a la solución de la segunda, se obtiene también mediante una distribución continua de dobletes (57) sobre el intervalo $0 \leq \xi \leq l$ del eje x , cuya intensidad local $b(\xi)$ está dada por la expresión:

$$b(\xi) = - \frac{\sigma(\xi) \cdot V \cdot \sin \alpha}{2\pi} \quad [107]$$

y cuyo eje está situado en el plano $\theta = 0$ y es normal al eje x .

Con ello, el potencial $\varphi_2(x, \theta, r)$ correspondiente a esta solución resulta ser:

$$\varphi_2(x, \theta, r) = - \frac{V \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta}{2\pi} \int_0^l \frac{\sigma(\xi) \cdot r \cdot d\xi}{[(x - \xi)^2 + r^2]^{3/2}} \quad [108]$$

lo que resuelve el problema.

Para terminar este punto es necesario hacer referencia a la teoría de Munk (58) sobre cuerpos fuselados, cuyas secciones transversales no tienen que ser necesariamente circulares. Dicha teoría fue extendida posteriormente por Jones (59) al estudio de determinados tipos de alas de pequeña envergadura y otros obstáculos de forma adecuada.

(57) Ver, por ejemplo, N. CURLE y H. J. DAVIES: *Modern Fluid Dynamics*, D. van Nostrand Co., Londres, 1968, vol. I, págs. 99 y sigts.

(58) M.M. MUNK: *The Aerodynamic Forces on Airship Hulls*. NACA Rep., núm. 184, año 1924.

(59) Ver la referencia del epígrafe 9.

La idea básica de Munk consiste en suponer que, como ocurre en los cuerpos fuselados, las variaciones en la dirección x del movimiento principal son pequeñas con respecto a las transversales, con lo que la ecuación de Laplace en tres dimensiones

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad [109]$$

puede aproximarse por la ecuación [83] del movimiento plano mediante adecuadas condiciones de contorno, las cuales quedan determinadas por la forma de la sección transversal del cuerpo en el punto x .

Como la justificación y el desarrollo completo de esta aproximación extendería demasiado el contenido del presente epígrafe, remitimos al lector, para un estudio más detallado del procedimiento, a las referencias citadas (60).

Por otra parte, las aproximaciones lineales que acabamos de mencionar son aproximaciones de primer orden del desarrollo asintótico de las soluciones exactas, en función de un parámetro mucho menor que la unidad, que mida el espesor del obstáculo.

Ello permite, por tanto, obtener aproximaciones crecientes, a partir de la primera, mediante la consideración de los términos correspondientes a los sucesivos órdenes de magnitud, de aquel desarrollo asintótico.

Son particularmente valiosos, a este respecto, los métodos llamados de «Desarrollos asintóticos acoplados» (61) inicialmente desarrollados para la Mecánica de Fluidos y que han encontrado aplicación posterior en otros muchos campos, los cuales permiten obtener aproximaciones «uniformemente» válidas en todo el espacio fluido y de los que encontraremos numerosos ejemplos más adelante (62).

(60) Ver también la obra de WARD ya mencionada, especialmente las páginas 187 y sigts.

(61) M. VAN DYKE: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Acad. Press, Nueva York, 1964; J. D. COLE: *Perturbation Methods in Applied Mechanics*. Blaisdell Publ. Co., 1968.

(62) En particular, para el caso de los cuerpos de revolución, ver la obra de COLE, págs. 182 y sigts.

8. MOVIMIENTOS CON SUPERFICIES DE DISCONTINUIDAD

La paradoja de d'Alembert implica, entre otras hipótesis que se han señalado, la de que el movimiento sea continuo en todo el espacio fluido.

Por ello, un intento acertado de escapar a la misma, sugerido por la experiencia, es a través de la formación de una estela detrás del obstáculo, separada de la masa fluida en movimiento por una o varias superficies de discontinuidad de la velocidad, llamadas habitualmente «superficies libres», tal como ilustra la figura I-2, b), en contraposición al modelo continuo, de corriente de Dirichlet, que también muestra la figura I-2, a) y que sirvió de base para aquella paradoja.

La teoría de los movimientos con superficies libres, llamada generalmente Teoría de los Chorros y Estelas, fue iniciada hace un siglo por Helmholtz (63) y Kirchhoff (64), abriendo con ello uno de los campos de mayor complejidad matemática de toda la Mecánica de Fluidos.

Si bien esta teoría permitió escapar, naturalmente, a la paradoja de d'Alembert, al dar lugar la formación de la estela a una resistencia no nula del obstáculo contra el movimiento del fluido, la llamada «resistencia de forma», la comparación de sus resultados con las mediciones experimentales mostró discordancias demasiado grandes (65), las cuales son debidas a la excesiva simplificación del modelo empleado para la descripción de la estela, cuya estructura real es muy compleja, como aparece esquematizada en la figura I-2, c) (66).

Por el contrario, los resultados han sido más satisfactorios en el tratamiento de otros problemas, tales como el de la «vena contracta», en la salida de líquidos por orificios.

Más recientemente, la teoría ha encontrado una aplicación de gran

(63) H. VON HELMHOLTZ: *Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen*. «Monatsber Berliner Akad. Weiss.», 1868, págs. 215-28.

(64) G. KIRCHHOFF: *Zur Theorie Freier Flüssigkeitsstrahlen*. «J. Reine Angew. Math.», 1869, págs. 289-98.

(65) Por ejemplo, en el caso de una placa plana bidimensional a la corriente, la resistencia teórica es inferior a la mitad de la experimental.

(66) Ver los trabajos de TH. Y. WU que se citan en en las referencias de la página 44 para una descripción pormenorizada de la verdadera estructura de la estela bajo diferentes regímenes de movimiento.

original, en cuanto a las fuerzas hidrodinámicas y a las distribuciones de presiones sobre los obstáculos.

Una contribución importante al estudio teórico de la estructura dinámica de las estelas se debe a von Karman mediante el análisis del comportamiento de las calles de torbellinos que se forman detrás de los obstáculos para determinado intervalo del número de Reynolds de la corriente (67), incluido el estudio de la estabilidad de las mismas. Los resultados de von Karman han sido plenamente confrontados por las observaciones experimentales.

Debe advertirse, sin embargo, que el problema está todavía lejos de haberse resuelto en su totalidad, especialmente por lo que respecta al caso de movimientos en tres dimensiones, a los efectos de compresibilidad, a los movimientos no estacionarios y a cuestiones relacionadas con la estabilidad, por lo que las investigaciones en este campo prosiguen intensamente y ello, tanto desde el punto de vista de su análisis matemático como de la puesta a punto de métodos específicos de cálculo numérico.

No puede intentarse desarrollar aquí una exposición completa del problema, por su amplitud y complejidad, pero en años recientes han aparecido un conjunto de tratados y de trabajos de revisión, a los que remitimos al lector que encontrará en ellos, además, bibliografía muy abundante y completa (68).

Por nuestra parte, nos limitaremos a enunciar aquí los fundamentos de la teoría para movimientos planos estacionarios, de fluidos incompresibles, la cual aplicaron Helmholtz y Kirchhoff inicialmente, como cabe prever, a contornos formados por segmentos rectos, tales como la placa plana y figuras poligonales.

(67) TH. VON KARMAN: *Über den Mechanismus des Widerstandes, den ein bewegter Körper in einer Flüssigkeit erfährt*. «Göttinger Nachrichten», 1911, páginas 509-17 y 547-56; ídem: *Über den Mechanismus des Flüssigkeits- und Luftwiderstandes*. «Phys. Zeits.», 1912, págs. 49-59. Ver también *Collected Works of Theodore von Karman*. «Butterworths Sci. Publ.», Londres, 1956, vol. 1, págs. 324-58.

(68) Ver G. BIRKHOFF, ya citado, págs. 40 y sigts.; G. BIRKHOFF y E. H. ZARANTONELLO: *Jets, Wakes and Cavities*. Acad. Press. Inc., Nueva York, 1957; D. GILBARG: *Jet and Cavities*. «Encycl. Phys.», vol. IX, Fluid. Dyn. III J. Springer, Berlín 1960, págs. 311-445; J. V. WEHAUSEN: *Free-Surface Flows*. Research Frontiers in Fluid Dynamics. Edit. por R. J. Eeeger y G. Temple. Interscience Publ., Nueva York, 1965; TH. Y. WU: *Inviscid Cavity and Wake Flows*. «Basic Devel. in Fluid Dyn.», vol. 2.. Ed. por M. Holt. Acad. Press. Nueva York, 1968, págs. 2-116; TH. Y. WU: *Cavity and Wake Flows*. «Annd. Rev. Fluid. Mech.», 1972, págs. 243-84.

Puesto que nos hallamos ante un movimiento plano, irrotacional, de un fluido ideal e incompresible, es aplicable al mismo todo lo que se dijo para tales movimientos en el epígrafe precedente.

En particular, el potencial $\varphi(x, y)$ y la función de corriente $\psi(x, y)$ son funciones armónicas conjugadas, es decir, las partes real e imaginaria, respectivamente, de un potencial complejo $f(z)$, dado en [79], que deberá cumplir las condiciones de contorno adecuadas al caso.

Veamos cuáles son éstas.

Fuera de la estela, cuando $|z| \rightarrow \infty$ debe tender a $V_\infty z$ mientras que en el interior de aquélla el fluido está, como muestra la figura 1-2, b), en reposo a la presión p_∞ .

Resta ver ahora cuáles son las relaciones que deben existir entre las magnitudes fluidas a ambos lados de la superficie libre.

En el capítulo II se desarrolla la Teoría de las Superficies de Discontinuidad con mayor detenimiento, por lo que aquí nos limitaremos a señalar, en primer lugar, que la presión debe ser obviamente la misma en ambas caras, puesto que no hay transporte normal de cantidad de movimiento a través de la discontinuidad, que es una superficie fluida, es decir, que está formada siempre por las mismas partículas.

Por tanto, si la estela está en reposo, a la presión p_∞ del fluido no perturbado, la discontinuidad es una superficie de presión constante:

$$p_s = p_\infty. \quad (110)$$

Habida cuenta de que el movimiento del fluido es irrotacional, la constancia de la presión implica, en virtud de la ecuación de Bernoulli [47], el que la velocidad v sea también constante sobre la citada superficie, es decir, que en ella ha de cumplirse la condición:

$$\left| \frac{df}{dz} \right|^2 \equiv v_x^2 + v_y^2 \equiv \varphi_x^2 + \varphi_y^2 = 2(p_0 - p). \quad (111)$$

Además, en el caso en que el obstáculo tenga ángulos vivos, como ocurre con los bordes de una placa, tales ángulos fijan los puntos de arranque de las superficies libres (69) cuya forma geométrica se des-

(69) Contrariamente a lo que ocurre en caso como el de la fig. 1-2 b, donde la

conoce, en cambio, si bien se sabe que la velocidad ha de ser tangente a ella, es decir, que ha de ser una línea de corriente:

$$\psi(x, y) = \text{const.} \quad [112]$$

Aun cuando se trata de un problema armónico, es decir, lineal, la condición de contorno [111] no lo es, por lo que introduce una dificultad específica fundamental, que Kirchhoff soslayó mediante la transformación al plano hodógrafo (70), es decir, adoptando como variables independientes las componentes de la velocidad, lo que linealiza la condición de contorno (71) y aplicando los recursos de la representación conforme (72).

La extensión de la teoría al caso de los obstáculos limitados por superficies curvas como el de la figura I-2, b), ha sido desarrollado por Levi-Civita (73), si bien en este caso se resuelve el problema inverso de calcular el contorno del obstáculo dado el de su transformación en el plano hodógrafo y además se plantea una dificultad fundamental al no estar inicialmente determinados los puntos de separación de la corriente, cuestión difícil que ha dado lugar a uno de los aspectos más polémicos de la teoría, incluidas las delicadas cuestiones de existencia y unicidad de las soluciones (74).

Se ha dicho al comienzo que una de las causas fundamentales de la discrepancia entre los valores teóricos y experimentales de la resistencia se debe a un exceso de simplicidad en el modelo de estela.

Se sabe, efectivamente, desde que se inició la teoría, que super-

fijación de los puntos de separación de la corriente da lugar a uno de los aspectos más problemáticos de la teoría, como se dirá después.

(70) Para una referencia más detallada a este tipo de transformación, ver el epígrafe 14, más adelante.

(71) Más concretamente, la variable independiente introducida por Helmholtz no es la velocidad compleja $w = \frac{df}{dz} = V \cdot e^{-i\theta}$, sino el logaritmo de ésta

$L n \cdot w = L n \cdot V - i\theta$, donde θ es la inclinación de la velocidad y el módulo V lo refiere, además, para hacerlo adimensional, a su valor V_∞ en la corriente no perturbada.

(72) Para las figuras poligonales, la transformación de Schwarz y Christoffel. Ver GILBARG, ya citado, págs. 326 y sigts.

(73) T. LEVI-CIVITA: *Scie e Leggi de Resistenza*. «Rend. Circ. Mat.», Palermo, 1907, págs. 1-37.

(74) A. WEINSTEIN: *Non-linear Problems in the Theory of Fluid Motion with Free Boundaries*. «Proc. First Symp. Appl. Math. Am. Math. Soc.», 1949.

ficies libres como la descrita son inestables (75), por lo que no cabía esperar que la realidad respondiese al modelo propuesto y ya se ha visto en la figura 1-2, c) que las cosas ocurren, efectivamente, de forma mucho más complicada.

Una de las consecuencias básicas de todo ello, comprobada experimentalmente, es que la presión p_* en la zona de la estela próxima al obstáculo es, en realidad, inferior a p_∞ :

$$p_* < p_\infty. \quad [113]$$

Si bien resulta difícil, en general, calcular el valor de p_* , puede adoptarse éste como un parámetro del problema (76) empleando para ello el único número adimensional N_* que puede componerse con los datos del movimiento, a saber:

$$N_* = \frac{p_\infty - p_*}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2} \quad [114]$$

que coincide precisamente con el número característico en los procesos de cavitación (77) cuando p_* se sustituye por la presión de vapor del líquido o por la presión de la cavidad que se aludía al comienzo.

Al estudiar las soluciones posibles para los valores de N_* que cumplan la condición

$$N_* > 0 \quad [115]$$

se comprueba que, mediante algunos artificios, puede obtenerse un conjunto de modelos diversos con estelas de dimensiones finitas, las cuales representan aproximaciones satisfactorias y coincidentes para el problema de la cavidad (78) y para la zona de la estela próxima al obstáculo en los de resistencia, soluciones que, además, pueden hacerse tender a la de Kirchhoff cuando $N_* \rightarrow 0$.

Para terminar diremos que si se calcula la circulación γ de la ve-

(75) Ver epígrafe 11, más adelante.

(76) Ver A. ROSKHO: *On the Wake and Drag of Bluff Bodies*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1955, págs. 124-32.

(77) Este número no apareció en el epígrafe 2 de la semejanza dinámica porque corresponde a una condición de contorno que allí no se contempló.

(78) En rigor la teoría es más satisfactoria para cavidades y chorros que para estelas, por la mayor estabilidad de la superficie libre entre un líquido y un gas, a causa de la diferencia de densidades entre ambos.

locidad alrededor de un circuito como el C de la figura I-2, b), aquélla resulta ser, por unidad de longitud, igual al salto de velocidades tangenciales

$$\gamma = v, \quad [116]$$

por lo que la superficie libre se comporta, en virtud del teorema de Stokes, como una «capa de torbellinos» de intensidad γ , propiedad que encuentra aplicaciones importantes en la Teoría de la Sustentación, cuyos fundamentos se exponen más adelante.

9. TEORÍA DE LA SUSTENTACIÓN

Si el cálculo de la resistencia de un fluido al movimiento de un obstáculo en su seno ha sido uno de los problemas fundamentales de la Mecánica de Fluidos, prácticamente desde sus orígenes hasta nuestros días, otra cuestión más reciente pero igualmente básica, sobre todo desde que se inició el desarrollo de la Aeronáutica, ha sido el estudio de la «sustentación», es decir, de la fuerza perpendicular a la dirección del movimiento que pueden generar determinados cuerpos de forma apropiada, al desplazarse convenientemente en el seno de un fluido.

La confirmación teórica de esta posibilidad, de la que se tenía evidencia experimental previa, se obtuvo, en primer lugar, al calcular la fuerza que ejerce un fluido ideal, incompresible e indefinido, sobre un cilindro de longitud ilimitada y de sección arbitraria que se mueve normalmente a sus generatrices, con velocidad uniforme V , como ilustra la figura I-3.

El estudio de este problema conduce a las conclusiones siguientes:

a) La resistencia del obstáculo al movimiento es nula, como en el caso de tres dimensiones. Es decir, se confirma para este caso la paradoja de d'Alembert.

b) Si la circulación Γ de la velocidad alrededor de cualquier contorno que rodee el obstáculo (19) es distinta de cero, entonces se produce sobre el cilindro una fuerza normal a la dirección del movi-

(79) Γ es un invariante, según resulta de lo que se vio en el epígrafe 5, al ser el movimiento potencial.

miento, llamada «sustentación» L , cuyo valor por unidad de longitud del cilindro está dado por la expresión:

$$L = \rho V \Gamma. \quad [117]$$

Es decir, que la sustentación resulta ser proporcional a la circulación y a la velocidad del movimiento.

Este es el famoso teorema llamado generalmente de Kutta (80) y Joukowsky (81), que ambos autores dedujeron por separado en 1902 y 1906, respectivamente.

Como ocurría para la resistencia en el caso de tres dimensiones, el resultado no precisa del conocimiento detallado de la forma del contorno del obstáculo, porque tan sólo depende del comportamiento del potencial de velocidades $\varphi(x, y)$, o bien del potencial complejo $f(z)$, en el entorno del infinito, el cual, al no ser ahora el espacio simplemente conexo como sucedía en aquel caso, es de la forma:

$$|z| \gg 1, \quad f(z) = Vz - \frac{i\Gamma}{2\pi} L_n z + \frac{A}{z} + \dots \quad [118]$$

Este comportamiento, al aplicar el método allí descrito para el cálculo de la fuerza sobre el obstáculo, da un resultado no nulo si es $\Gamma \neq 0$ y además resulta que la fuerza se ejerce en dirección transversal al movimiento.

La expresión general para el cálculo de la fuerza que se ejerce sobre un obstáculo en movimiento plano estacionario e irrotacional, se debe a Blasius (82) y es la siguiente:

$$\bar{F} \equiv F_x - i F_y = \frac{1}{2} i \rho \oint \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dz, \quad [11]$$

donde F_x y F_y son las componentes de la fuerza compleja $\bar{F}$, siendo $\bar{F}$ el valor conjugado de la misma y la integral se extiende al

(80) W. M. KUTTA: *Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten*, «III Aer. Mitt.», 1902, págs. 133 y sigts.

(81) N. JOUKOWSKY: *De la chute dans l'Air des Corps Légers de Forme Allongée, animés, d'un Mouvement Rotatif*, «Bulletin de l'Institut Aérodyamique de Koutchine», San Petersburgo, 1906.

(82) H. BLASIUS: *Funktion theoretische Methoden in der Hydrodynamik*, «Zeitschr. für Math. und Phys.», 1910.

contorno del obstáculo o a cualquier otro reconciliable con él y tal que no existan singularidades del integrando entre ambos.

Al ser $f(z)$ una función analítica, el cálculo de la integral se reduce, en virtud de un conocido teorema de Cauchy, al de los residuos de las singularidades de $\left(\frac{df}{dz}\right)^2$ en el espacio fluido, lo que simpli-

fica extraordinariamente la obtención de F , de la que la expresión [117] es el valor particular correspondiente al caso en que la única singularidad es la del infinito.

Una vez establecida la fórmula [117], que determina el valor de la sustentación L en función del de la circulación Γ alrededor del obstáculo, queda por esclarecer la cuestión fundamental de saber qué condición determina el valor concreto de esta circulación entre los infinitos que puede adoptar dicho parámetro.

La respuesta no puede proporcionarla por sí sola la Teoría de los Fluidos Ideales que deja indeterminado el valor de Γ , pero se encuentra en la célebre «hipótesis de Kutta-Joukowski», la cual resulta plenamente confirmada por las observaciones experimentales. Dicha hipótesis consiste en suponer que si la sección del cilindro tiene un borde de salida agudo, como suele ocurrir en los perfiles de alas, rotores, etc., donde se buscan efectos de sustentación, la circulación que se produce es justamente la necesaria para lograr que la corriente no doble el ángulo de salida sino que, por el contrario, se desprenda suavemente de él, tal como ilustra la figura I-3, efecto que se debe precisamente a la acción de la viscosidad del fluido.

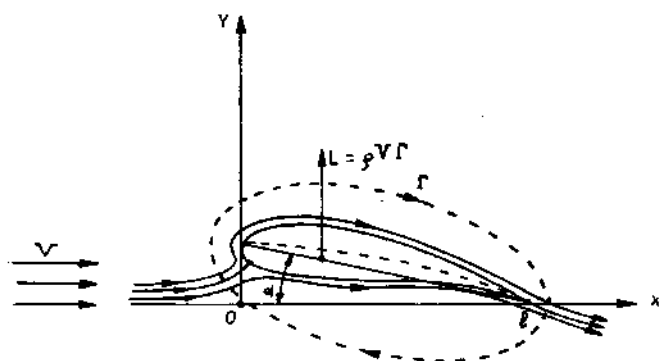
Ello equivale a situar el segundo punto de remanso, de los dos de bifurcación y encuentro de las líneas de corriente sobre el perfil, precisamente en el borde de salida, como muestra la figura I-3, lo cual ocurre solamente para un valor bien determinado y calculable de la circulación alrededor de aquél.

La conclusión a que se llega es la de que, en cuerpos alargados como los de los perfiles aerodinámicos, inclinados un ángulo α pequeño con respecto a la dirección del movimiento, el valor de la circulación generada y, por tanto, el de la sustentación, son proporcionales al seno del ángulo de inclinación

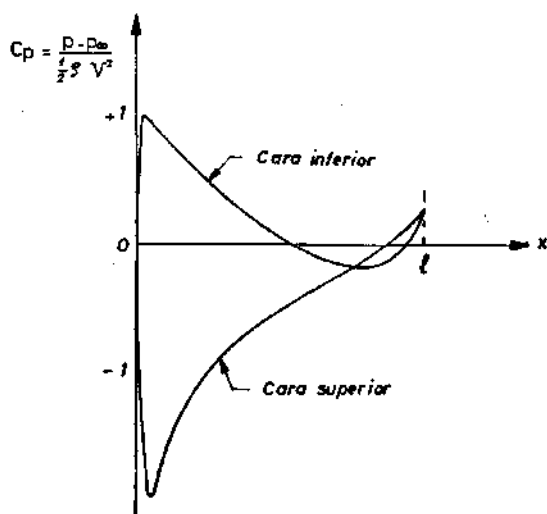
$$L \sim \Gamma \sim \sin \alpha \simeq \alpha, \quad [120]$$

en tanto que el coeficiente de proporcionalidad depende débilmente de la forma del perfil.

Esta expresión hace que la sustentación sea en realidad mucho mayor que la que resulta de la célebre ley del seno cuadrado de Newton (83), que durante mucho tiempo se consideró correcta y que, de



a) Sustentación



b) Distribución de presiones

Fig. 1-3.—Teoría del perfil

(83) TH. VON KARMAN: *Isaac Newton and Aerodynamics*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1942, págs. 521 y sigts. Coll. WORKS, ya citado, vol. 4, págs. 184-88.

haberlo sido realmente, hubiera constituido un serio obstáculo para el desarrollo de la Aeronáutica.

Al ser el perfil aerodinámico un elemento cuyo trazado es fundamental para la generación de una fuerza de sustentación, de cuya satisfactoria realización junto con la reducción de la resistencia depende el éxito de muchas aplicaciones tecnológicas, es comprensible el gran esfuerzo teórico y experimental que se ha llevado a cabo para agotar el tema, sobre el que existe una bibliografía muy abundante y completa (84).

Por ello nos limitaremos a mencionar aquí que, al igual que en otras muchas cuestiones y como ya se indicó en el epígrafe 6.º, los dos problemas básicos de la teoría son, el «directo» que consiste en determinar el campo de presiones y velocidades alrededor de un perfil de forma dada y el «inverso», en que hay que calcular la forma del perfil correspondiente a una distribución de presiones o de velocidades prefijada.

Por lo que respecta al problema «directo», su solución es clara, bien sea mediante procedimientos como el de Hess y Smith que se describió en el epígrafe 6.º, bien mediante la aplicación de la Representación Conforme, que constituye el método habitual y permite transformar la corriente alrededor de un cilindro de sección circular, cuya solución exacta es bien conocida para cualquier valor de la circulación, en la corriente alrededor de un perfil de forma arbitraria.

A tal efecto se han puesto a punto técnicas de cálculo numérico, entre las que es clásica la de Theodorsen y Garrick (85), extendida posteriormente por otros investigadores (86).

Por el contrario, el problema inverso, llamado generalmente del

(84) Una obra clásica es el famoso tratado de H. GLAUERT: *Elements of Aerofoil and Airscrew Theory*, cuya primera edición data de 1926 y de la que existe traducción española, efectuada por el INTA. Entre otras más recientes, seguramente la más detallada y completa es la de H. J. ABBOT y A. E. VON DOENHOFF: *Theory of Wing Sections*, Mc Graw-Hill, Nueva York, 1949. Asimismo, A. POPE: *Basic Wing and Airfoil Theory*, Mc Graw-Hill, 1951. Ver también la de WOODS, ya citada en el epígrafe 7, especialmente el capítulo VIII, así como el capítulo IV de la obra de B. THWAITES: *Incompressible Aerodynamics*. Oxford Clarendon Press., 1960.

(85) TH. THEODORSEN y J. E. GARRICK: *General Potential Theory of Arbitrary Wing Sections*. «Tech. Rept.», núm. 452, NACA, 1938.

(86) S. GOLDSTEIN: *Approximate Two-dimensional Aerofoil Theory*. «Curt. Pap.», núms. 68 a 73, Aaer. Res. Counc., Londres, 1952.

«diseño» de un perfil con una distribución dada de presiones o de velocidades sobre su superficie, no resulta tan sencillo de resolver, aparte de que, como cabe prever, las distribuciones propuestas tampoco pueden ser arbitrarias. Efectivamente, se comprueba (87) que tales distribuciones han de satisfacer tres condiciones integrales para la corriente a gran distancia del perfil tienda a un movimiento uniforme de velocidad dada y para que el contorno de aquél resulte cerrado.

En definitiva, no se dispone de un método que resuelva enteramente el problema del «diseño» de un perfil de características aerodinámicas dadas, si bien existen procedimientos que permiten obtener soluciones suficientemente satisfactorias, entre los que destaca el de Lighthill (88).

Como los perfiles aerodinámicos son, generalmente, cuerpos de poco espesor y poco inclinados respecto de la corriente incidente, resulta justificado aplicar a su estudio la Teoría de las Perturbaciones Pequeñas que se introdujo en el epígrafe núm. 7, la cual se llama generalmente «Teoría de Perfiles Delgados» y fue iniciada por Munk, ya citado en relación con el estudio de los cuerpos fuselados (89).

Puesto que la ecuación diferencial del potencial de velocidades es ya lineal (la de Laplace), la linealización del problema hay que buscarla, como vimos en el ejemplo sobre los cuerpos fuselados del epígrafe 7.º, en las condiciones de contorno.

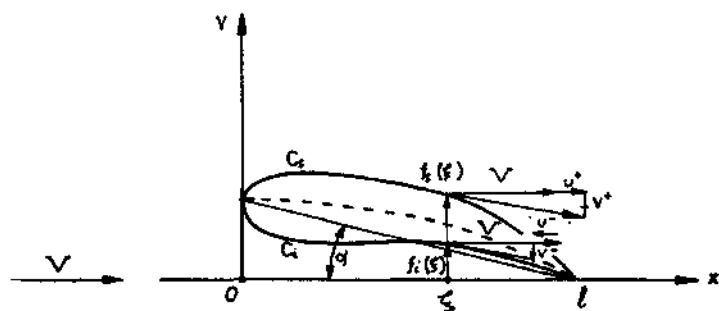
En tales circunstancias, el problema se puede reducir a la superposición de otros tres: uno simétrico, que tiene en cuenta el efecto del espesor del perfil, pero no el de su curvatura ni el de la incidencia α ; otro antisimétrico, que tiene en cuenta el efecto de la curvatura pero no el del espesor; y, finalmente, un tercero que determina el efecto de la incidencia α , el cual es independiente de la forma del perfil.

(87) Ver THWAITES, ya citado, págs. 138 y sigts.

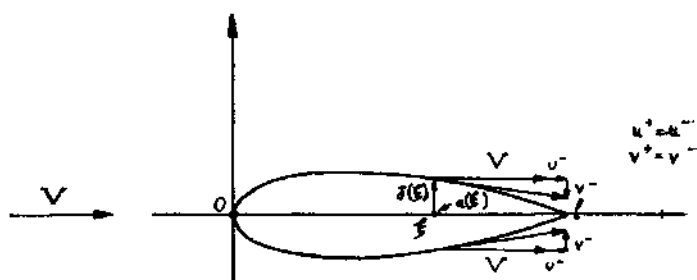
(88) M. J. LIGHTHILL: *A New Method of Two-dimensional Aerodynamic Design*. «Rep. Mem.», núm. 2112, Aer. Res. Coun. Londres, 1945.

(89) M. M. MUNK: *General Theory of Thin Wing Sections*. «Tech. Rept.», núm. 142, NACA, 1922. Ver también W. BIRNBAUM: *Die Tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie*. ZAMM, 1923, págs. 290 y sigts., así como la obra clásica de GLAUERT ya citada. Una excelente descripción de esta teoría se puede hallar en la obra de THWAITES, ya mencionada, págs. 120 y sigts.

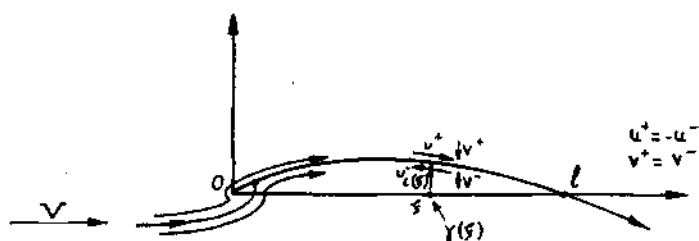
En efecto; la figura I-4 ilustra la situación, en virtud de la cual, en la aproximación lineal, y por las mismas razones que se vieron en el caso de los cuerpos fuselados, las condiciones de contorno, sobre ambas caras del perfil, resultan ser las siguientes



a) Condiciones de contorno



b) Problema simétrico



c) Problema antisimétrico

Fig. I-4.—Teoría de perfiles delgados.

Cara superior, C_s :

$$\frac{\varphi_s^+(\xi, 0)}{V} \equiv \frac{v_s}{V} \simeq f_s(\xi) - \alpha. \quad [121]$$

Cara inferior, C_i :

$$\frac{\varphi_s^-(\xi, 0)}{V} \equiv \frac{v_i}{V} \simeq f_i(\xi) - \alpha. \quad [122]$$

Por tanto, el problema se puede descomponer en suma de los tres siguientes, para los potenciales simétricos φ_s ; antisimétricos φ_a y de ángulo de ataque φ_α :

Potencial simétrico:

$$\frac{\varphi_{s,s}^+}{V} = -\frac{\varphi_{s,s}^-}{V} = \frac{1}{2} [f_s(\xi) - f_i(\xi)] \equiv \delta'(\xi). \quad [123]$$

Potencial antisimétrico:

$$\frac{\varphi_{a,s}^+}{V} = \frac{\varphi_{a,s}^-}{V} = \frac{1}{2} [f_s(\xi) + f_i(\xi)] \equiv c'(\xi). \quad [124]$$

Potencial para el ángulo de ataque:

$$\frac{\varphi_{\alpha,s}^+}{V} = \frac{\varphi_{\alpha,s}^-}{V} = -\alpha. \quad [125]$$

Con lo que la solución está dada por la suma:

$$\varphi(x, y) = \varphi_s(x, y) + \varphi_a(x, y) + \varphi_\alpha(x, y). \quad [126]$$

La primera de las tres condiciones es idéntica a la del cuerpo fuselado con simetría de revolución bajo incidencia nula, que se vio en el epígrafe 7. Por tanto, se puede satisfacer mediante un potencial de simple hoja que corresponde a una distribución continua de fuentes de intensidad $\alpha(\xi)$ sobre el eje x , pero teniendo en cuenta

que, en problemas planos, la solución elemental correspondiente a una fuente es de la forma:

$$\varphi_s(x, y) \sim L_n \sqrt{(x - \xi)^2 + y^2}. \quad [127]$$

La aplicación de la condición de contorno [123] da, para la distribución de intensidades $a(\xi)$, la expresión:

$$a(\xi) = 2V \delta'(\xi), \quad [128]$$

con lo que resulta, finalmente, para el potencial $\varphi_s(x, y)$:

$$\varphi_s(x, y) = 2V \int_0^l L_n [(x - \xi)^2 + y^2]^{1/2} \cdot d\delta(\xi). \quad [129]$$

La segunda condición corresponde a un potencial de doble hoja que se puede satisfacer mediante una distribución continua de torbellinos sobre el eje x , es decir, mediante una distribución de soluciones elementales de la forma:

$$\varphi_s(x, y) \sim \text{arc} \cdot \text{tg} \frac{y}{x - \xi} \quad [130]$$

con lo que resulta:

$$\varphi(x, y) = - \frac{1}{2\pi V} \int_0^l \gamma(\xi) \cdot \text{arc} \text{tg} \frac{y}{x - \xi} \cdot d\xi. \quad [131]$$

La intensidad $\gamma(\xi)$ se determina mediante la condición de contorno [124], la cual proporciona la ecuación integral:

$$C'(x) = - \frac{1}{2\pi V} \cdot P \int_0^l \frac{\gamma(\xi)}{x - \xi} d\xi, \quad [132]$$

en donde la letra P designa el «valor principal» de la integral «impropia», en el sentido de Cauchy.

Por último, el caso del ángulo de ataque es idéntico al anterior, sin más que hacer en [132]

$$C'(x) = -x. \quad [133]$$

Una condición adicional, que determina el valor de la circulación total $\Gamma = \int \gamma(\xi) d\xi$ alrededor del perfil y , por tanto, el de la sustentación del mismo, en virtud de [117], es la de Kutta-Joukowski, la cual requiere que el fluido no dé la vuelta alrededor del borde de salida, condición que equivale, en este caso, a la siguiente:

$$\gamma(l) = 0. \quad [134]$$

Por el contrario, en general esta condición no puede satisfacerse simultáneamente en el borde de ataque, lo que da lugar a una singularidad en él que distorsiona localmente la validez del método, en la proximidad de dicho punto, como ocurre también en la del punto de remanso. Esta cuestión ha sido analizada matemáticamente por Lighthill (90), mediante la aplicación al caso de su método general para hacer «uniformemente» válidas las soluciones aproximadas de muchos otros problemas.

Por último, como se desprende de la figura I-4 y demuestra la teoría del potencial, entre la velocidad horizontal de perturbación $u = \varphi_x$ y la distribución $\gamma(\xi)$ de circulación existe la relación

$$u^+(\xi, 0) \equiv \varphi_{x,x}^+(\xi, 0) = -u^-(\xi, 0) \equiv -\varphi_{x,x}^-(\xi, 0) = \frac{1}{2} \gamma(\xi). \quad [135]$$

Por otra parte, se ha visto en el epígrafe 7 que el coeficiente de presión C_p se expresa en la forma:

$$C_p \simeq -2 \frac{u}{V}. \quad [136]$$

(90) M. J. LIGHTHILL: *A New Approach to Thin Aerofoil Theory*. «Aeronaut. Quart.», 1951. págs. 198 y sigts.

De ello resulta que la distribución $l(x)$ de sustentación a lo largo de la cuerda del perfil está dada por la expresión

$$l(\xi) = \frac{i}{2} \rho V^2 [C_p^-(\xi, 0) - C_p^+(\xi, 0)] = \rho V \gamma(\xi), \quad [137]$$

que muestra la validez local, además de la global, de la fórmula [117] de Kutta-Joukowski.

Así, pues, la ecuación [132], con la condición [134], constituye el resultado fundamental de la Teoría de Perfiles Delgados que permite resolver tanto el problema directo como el inverso.

En efecto; dada la curvatura $C(\xi)$ del perfil, dicha expresión es una ecuación integral impropia para el cálculo de la distribución de torbellinos $\gamma(\xi)$ y, consiguientemente, de la sustentación, merced a [137]. Existen diversos procedimientos para la resolución aproximada de esta ecuación, que se hallarán en la bibliografía citada.

Recíprocamente, si se da la distribución de sustentación, la ecuación [132] proporciona la forma de la curvatura del perfil, mediante una simple cuadratura.

Debe señalarse que, en este último caso, existe un parámetro indeterminado en el cálculo de $C(x)$ a partir de [132], que depende del ángulo de ataque que se fije.

La Teoría de Perfiles Delgados constituye una primera aproximación a la solución exacta. Existen procedimientos de desarrollo asintótico que permite obtener, a partir de ella, aproximaciones de órdenes crecientes, bien sea mediante la aplicación del método de desarrollos acoplados al que se hizo alusión en la Teoría de Cuerpos Fuselados, bien por otros procedimientos, como el de Lighthill que se cita en la página 71 del presente epígrafe (91).

En la Teoría del Perfil, otra cuestión a esclarecer, de la mayor importancia, es la de averiguar cómo se produce la circulación alrededor de aquél, puesto que si el movimiento se inicia, por ejemplo, a partir del reposo, el valor de la circulación es evidentemente nulo en el instante inicial y debiera seguir siéndolo después, en virtud del Teorema de Kelvin, expresando en la ecuación [66].

La respuesta a esta cuestión aparece esquematizada en la figura I-5 y consiste en el proceso siguiente.

En el instante inicial, el punto de remanso posterior a la corriente

(91) Para un estudio más completo de esta materia, ver THWAITES, ya citado.

se sitúa en el punto R_2 del esquema a), posición que corresponde al movimiento con circulación nula. Pero la acción de la viscosidad, al doblar el fluido el ángulo de salida con gradientes de velocidad muy grandes, origina un torbellino que es arrastrado por la corriente y cuya intensidad es la necesaria para desplazar finalmente el punto de remanso R_2 hasta el borde la salida.

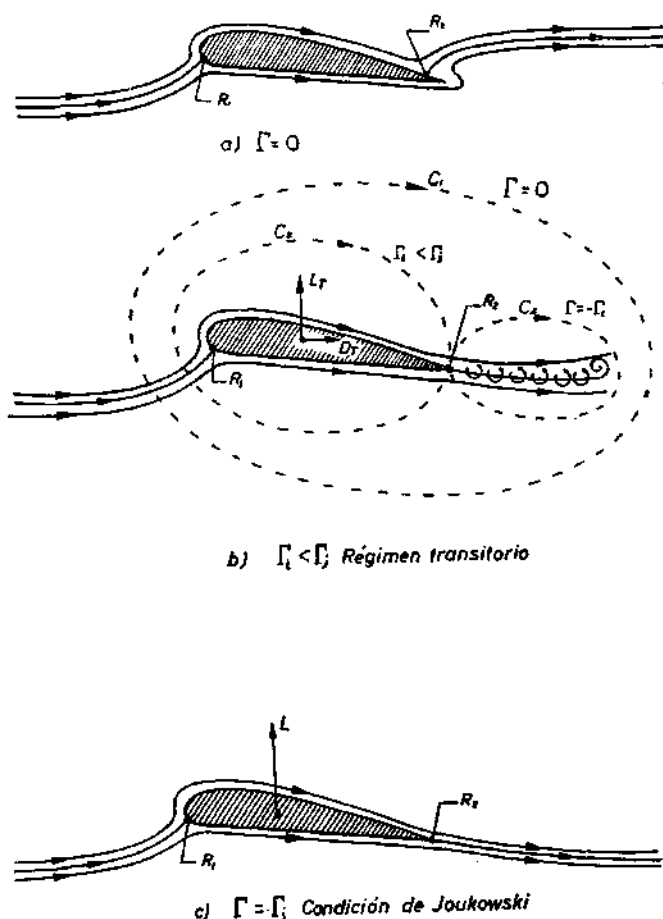


Fig. 1-5.—Formación y determinación de la circular alrededor de un perfil aerodinámico.

Ocorre entonces que la circulación total sobre el circuito C_1 del esquema b), por ejemplo, es nula, de acuerdo con los requerimientos

del citado Teorema de Kelvin, pero no así en el C_2 que sirve para fijar su valor alrededor del perfil.

Transcurrido un cierto intervalo de régimen transitorio, durante el cual la circulación Γ , es inferior al de valor de Joukowsky Γ_j y se produce además una fuerza de resistencia decreciente con la distancia y proporcional a Γ^2 , el torbellino inicial se ha alejado lo suficiente del perfil como para que resulte aplicable la solución correspondiente al régimen estacionario del esquema (92).

Esta cuestión guarda relación con el problema más general del movimiento no estacionario de perfiles, el cual ofrece un interés práctico muy grande, tanto para estudiar los fenómenos de «flameo» de que se ocupa la Aeroelasticidad, por ejemplo, como para analizar el comportamiento de las fuerzas aerodinámicas bajo la acción de perturbaciones de la corriente tales como oscilaciones, ráfagas, etc.

En la hipótesis, bien justificada, de que el movimiento no estacionario del fluido alrededor del perfil sea potencial, parecería que el tratamiento de este problema quedaba incluido en el modelo que acaba de describirse para el régimen estacionario, sin más modificaciones que las que resultan de incluir los términos dependientes del tiempo en la ecuación de Bernoulli y en las condiciones de contorno sobre el perfil, puesto que la ecuación diferencial que gobierna el proceso es la misma en ambos casos: la ecuación de Laplace.

Sin embargo, las cosas no son así en la realidad porque, al no ser estacionario el movimiento, la circulación alrededor del perfil varía de un instante a otro y, por tanto, se produce una estela de torbellinos como la que muestra la figura I-5, b), cuya forma geométrica es desconocida «a priori» y cuya presencia modifica el campo del movimiento y la distribución de presiones y velocidades sobre el perfil, haciendo que el régimen no estacionario resulte, en definitiva, bastante más complicado que aquél. Estamos, por tanto, ante una situación parecida a la del movimiento de Kirchhoff, que se analizó en el epígrafe precedente.

En este caso, la dificultad inherente al problema ha dado lugar a que su tratamiento se haya basado principalmente en la Teoría Li-

(92) En rigor, el régimen estacionario corresponde a la solución asintótica del transitorio para $t \rightarrow \infty$, y si el arranque del movimiento no es instantáneo, el torbellino inicial desprendido tiene una distribución continua sobre la línea de discontinuidad de la figura, la cual constituye una capa de torbellinos del tipo que se ha comentado en el final del epígrafe 8.

neal desarrollada por Birnbaum (93), Wagner (94), Theodorsen (95), Küssner (96), von Karman (97) y otros y cuyos fundamentos vamos a exponer brevemente a continuación (98).

Para ello veamos cómo se modifican las condiciones sobre el perfil, adoptando un sistema de referencia ligado al movimiento «medio» o movimiento «principal» de éste, que supondremos uniforme y de velocidad V en dirección del eje x .

Respecto de este sistema de referencia, el contorno del perfil, que supondremos reducido al de su línea media (99), experimentará pequeñas variaciones temporales, debidas a las perturbaciones no estacionarias del movimiento de aquél. Por tanto, el citado contorno estará definido por una expresión de la forma:

$$0 \leq \xi \leq l, \quad y_c = c(\xi, t). \quad [138]$$

A su vez, el potencial de velocidades de perturbación dependerá explícitamente del tiempo $\varphi \equiv \varphi(x, y, t)$ y la condición de tangencia de la velocidad al perfil, que en el régimen estacionario estaba dada por la expresión [124], adoptará, en este caso, la forma:

$$0 \leq \xi \leq l. \quad \varphi_v^+(\xi, 0, t) = \varphi_v^-(\xi, 0, t) = \\ = c_t(\xi, t) + V c_\xi(\xi, t). \quad [139]$$

(93) W. BIRNBAUM: *Das ebene Problem des schlagenden Flügels*. ZAMM, 1924, págs. 277-92.

(94) H. WAGNER: *Dynamischer Auftrieb von Tragflügeln*. ZAMM, 1925, páginas 17 y sigts.

(95) TH. THEODORSEN: *General Theory of Aerodynamic instability and the Mechanism of Flutter*. «Tech. Rept.», núm. 496, NACA, 1935.

(96) H. G. KÜSSNER: *Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flügeln*. «Luftf. Forsch.», 1936, págs. 410-24.

(97) TH. VON KARMAN y W. R. SEARS: *Airfoil Theory for Non-Uniform Motion*. «Jour. Aer. Sci.», 1938, págs. 379-90. Coll. WORKS, ya citado, vto. III, páginas 324-45.

(98) Una excelente formulación matemática del problema se encontrará en la obra del Prof. K. O. FRIEDRICHS, del Inst. Courant de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York: *Special Topics in Fluid Dynamics*. Nelson, Londres, 1967. Un trabajo de revisión muy completo, que incluye además los efectos de la compresibilidad en régimen subsónico y supersónico, se debe a A. I. VAN VOOREN: *Unsteady Airfoil Theory*. «Advances in Applied Mechanics», vol. V, págs. 35-89, Acad. Press, Nueva York, 1958.

(99) El carácter lineal de la teoría permite separar los efectos del espesor, como se hizo para el régimen estacionario.

En cuanto al coeficiente de presión, al linealizar la ecuación de Bernoulli [75] se comprueba que la expresión [136], propia del régimen estacionario, debe sustituirse por la siguiente:

$$C_p(x, y, t) \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho V^2} = -2 \frac{\varphi_t}{V^2} - 2 \frac{\varphi_x}{V} \quad [140]$$

Por tanto, la sustentación local $l(x, t)$ está dada por la expresión:

$$\begin{aligned} l(x, t) &\equiv [p^-(x, 0, t) - p^+(x, 0, t)] = \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 [C_p^-(x, 0, t) - C_p^+(x, 0, t)] = \\ &= \rho [\varphi_t^+(x, 0, t) - \varphi_t^-(x, 0, t)] + \rho V \gamma(x, t), \end{aligned} \quad [141]$$

en donde $\gamma(x, t)$, al igual de lo que ocurría en el régimen estacionario, es la intensidad del torbellino local, dada por [135].

Esta expresión muestra que, además del término $\rho V \gamma(x, t)$ de Kutta-Joukowski, aparece, en régimen no estacionario, un término adicional $\rho (\varphi_t^+ - \varphi_t^-)$. Es el efecto llamado, generalmente, de la «masa virtual», propio de los movimientos acelerados (100).

Por lo que respecta a la estela que arranca del borde de salida $x = l$ del perfil, se trata de una superficie de discontinuidad de la velocidad que debe de cumplir las siguientes condiciones (101).

No existe flujo de fluido a través de ella. Por tanto, si la forma de la estela está dada por la expresión $y_e \equiv e(x, t)$, la condición de tangencia da, en aproximación lineal:

$$\begin{aligned} l \leq x < \infty, \quad \varphi_t^+(x, 0, t) &= \varphi_t^-(x, 0, t) = \\ &= e_t(x, t) + V \cdot e_x(x, t), \end{aligned} \quad [142]$$

en donde la condición se impone, como para el perfil, sobre el eje $y = 0$, por las mismas razones que allí.

Esta condición es, en realidad, una ecuación para el cálculo de $e(x, t)$, una vez resuelto el problema.

Además, el salto de presiones a través de la discontinuidad debe

(100) Ver, por ejemplo, MILNE-THOMPSON: *Theoretical Hydrodynamics*. Mac Millan Co. Ltd., Londres, 1988, pág. 235.

(101) Ver la obra de FRIEDRICHS, ya citada, págs. 33 y sigts.

ser nulo, como se indicó en el epígrafe 8. Por tanto, la segunda condición es la siguiente, en virtud de [140]:

$$\begin{aligned} l \leq x < \infty, \quad \varphi_t^+(x, 0, t) - \varphi_t^-(x, 0, t) = \left\{ \right. \\ = -V [\varphi_x^+(x, 0, t) - \varphi_x^-(x, 0, t)] \equiv -V \cdot \gamma(x). \end{aligned} \quad [143]$$

Por último, en el borde $x = l$ de salida del perfil, se debe cumplir la condición de Kutta-Joukowski, la cual exige que sea

$$x = l, \quad \varphi_t^+ - \varphi_t^- + V(\varphi_x^+ - \varphi_x^-) = 0. \quad [144]$$

El problema consiste, por tanto, en determinar el potencial de velocidades de perturbación $\varphi(x, y, t)$ que satisfaga las condiciones de contorno indicadas, sobre el perfil y sobre la estela, conocida la ley del movimiento de perturbación del perfil, la cual está dada por la expresión [138].

Existe una gran variedad de procedimientos de cálculo aplicables a movimientos oscilatorios, cambios instantáneos de la posición del perfil, accionamiento de flaps, deformaciones aeroelásticas, etc., cuya descripción y resultados, bastante laboriosos de obtener, se pueden encontrar en la bibliografía mencionada (102).

El resultado fundamental de la Teoría, por lo que respecta a la sustentación L del perfil, es que ésta resulta de la suma de tres términos (103).

$$L = L_0 + L_i + L_e. \quad [145]$$

De ellos, el primero $L_0 = \rho V \Gamma_0$ corresponde a la Ley de Kutta-Joukowski para el movimiento instantáneo del perfil, en ausencia de estela.

El segundo,

$$L_i = -\rho \frac{d}{dt} \int_0^l \gamma_0(x) \left(x - \frac{l}{2} \right) dx, \quad [146]$$

(102) Ver también Woods, ya citado, cap. IX, págs. 36 4y sigts., así como R. TIMMAN: *Linearized Theory of Unsteady Flow of a Compressible Fluid*. «Handbuch der Physik», vol. IX, tomo 3, págs. 283 y sigts., Springer, Berlin, 1960.

(103) VON KARMAN, ya citado, pág. 331.

corresponde a la «masa virtual» de la aceleración del movimiento principal, siendo $\gamma_0(x)$ la distribución de torbellinos correspondiente al movimiento instantáneo, como si fuese estacionario, es decir, la que produce Γ_0 .

Por último, el tercero,

$$L_e = \rho V \int_{-l}^l \frac{\gamma(x)}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 1}} dx. \quad [147]$$

corresponde a la influencia de los torbellinos de la estela.

Para terminar este punto deben señalarse los recientes intentos de extensión de la teoría para tomar en consideración los efectos no lineales, cuya principal dificultad procede del desconocimiento de la configuración geométrica de la estela, cambiante con el tiempo y sobre la que hay que imponer, como se ha visto, una parte de las condiciones de contorno del problema.

La cuestión tiene interés porque solamente una aproximación no lineal permitirá calcular correctamente la distribución de presiones sobre ambas caras del perfil, ya que, como hemos visto en [141], la teoría lineal proporciona tan sólo la diferencia entre las presiones de ambas caras. Aquella distribución resulta necesaria, por ejemplo, como veremos en el epígrafe siguiente, para calcular debidamente la acción del rozamiento sobre la superficie del perfil.

Como hemos visto en el epígrafe 6, al describir el procedimiento de Hess y Smith, solamente los modernos procedimientos del cálculo electrónico están permitiendo abordar con éxito la resolución de estos problemas no lineales.

Por lo que respecta concretamente al caso del movimiento no estacionario de perfiles, J. Giesing ha puesto a punto una extensión del procedimiento de Hess y Smith, con resultados altamente satisfactorios (104). Dicha extensión exige, entre otras cosas, calcular a intervalos sucesivos de tiempo la forma que va adquiriendo la estela, lo cual hace que el procedimiento resulte, inevitablemente, muy laborioso.

(104) J. P. GIESING: *Nonlinear Two-Dimensional Unsteady Potential Flow with Lift*. «Jour. Aircraft», 1968. págs. 135-48.

Sin embargo, el autor ha calculado un conjunto de casos que compara satisfactoriamente con las observaciones experimentales, en especial por lo que respecta a la configuración de la estela.

Se ha dicho anteriormente en [120] que el ángulo de inclinación del perfil respecto de la corriente principal, que produce la sustentación, es pequeño.

Ello es una exigencia del comportamiento del fluido para obtener una corriente de Dirichlet.

Efectivamente; ocurre que, al aumentar el ángulo de ataque por encima de un cierto valor límite se produce, en general bruscamente, un cambio en el régimen de la corriente, la cual se desprende de la cara superior del perfil y forma una gruesa estela.

Este fenómeno, que obedece al desprendimiento de la capa límite, por las causas que se explican más adelante, en el epígrafe 10, origina una disminución de la sustentación y un aumento de la resistencia, junto con otros efectos adversos de estabilidad.

Por ello se ha trabajado intensamente para conseguir formas y dispositivos que permitan aumentar aquel ángulo de desprendimiento.

Tal es el fundamento de los llamados dispositivos hipersustentadores, cuyo desarrollo teórico y experimental constituye uno de los capítulos fundamentales de la Aerodinámica, como puede comprobarse en cualquiera de las referencias anteriormente mencionadas (104a).

Con esto ponemos término a la Teoría del Perfil y pasamos a ocuparnos en lo que sigue de la del Ala de Envergadura Finita.

Al intentar trasladar los resultados bidimensionales que acaban de exponerse al caso más real de un movimiento en tres dimensiones, es decir, al pasar de la Teoría del Perfil Aerodinámico a la del Ala de Envergadura Finita, surge la dificultad de que, en este caso, si el movimiento es continuo en todo el espacio fluido, éste es simplemente conexo y al ser aquél irrotacional, el comportamiento del potencial de velocidades es el que se indicó en el epígrafe 6, con lo que la sustentación, al igual de lo que pasaba con la resistencia, resulta ser cero.

La solución de esta dificultad se debe a Lanchester y Prandtl, quie-

(104a) Ver, por ejemplo, el reciente trabajo de revisión de G. K. KORBACHER: *Aerodynamics of Powered High-Lift Systems*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1974, págs. 319-58.

nes propusieron separadamente un modelo, confirmado plenamente por la experiencia, que resuelve el problema al hacer el espacio múltiplemente conexo, mediante la introducción de superficies de discontinuidad que son equivalentes, como ya se ha dicho antes, a capas de torbellinos.

Lanchester (105) propuso el modelo de la solución con anterioridad a Prandtl, pero su desarrollo matemático fue muy insuficiente, en tanto que el modelo de Prandtl (106), que elaboró antes de conocer los trabajos de aquél, fue más correcto y además Prandtl y sus colaboradores Munk, Betz, Trefftz, etc., formularon una teoría matemática completa del mismo, que proporciona resultados en perfecta concordancia con las mediciones experimentales y que ha podido generalizarse más tarde a otras aplicaciones importantes, tales como el estudio de las fuerzas sobre hélices, rotores, turbinas, etc.

Por ello, la teoría de Prandtl se extendió rápidamente a los demás países y conserva plena vigencia en nuestros días, habiendo servido de base a importantes desarrollos que se han efectuado con posterioridad.

Como la teoría es hoy clásica y forma parte, con una extensión más o menos amplia, de todos los tratados de Aerodinámica, nos limitaremos aquí a resumir sus fundamentos, remitiendo a la abundante bibliografía existente (107) para un estudio más detallado de ella.

La idea básica del modelo de Lanchester-Prandtl es la que ilustra la figura I-6.

(105) F. W. LANCHESTER: *Aerodynamics*. Londres, 1907. También *Sustentation in Flight*, Wilbur Wright Mem. Lect. J. Roy. Aer. Soc., Londres, 1926, págs. 587-606. Para un estudio crítico de la contribución de Lanchester a la Aerodinámica, ver TH. VON KARMAN: *Lanchester's contributions to the Theory of Flight and Operational Research*, «Jour. Roy. Aer. Soc.», 1958, págs. 80-98, Coll. Works, vol. V, págs. 213-34, Rhode-St. Genése, Bélgica, 1975.

(106) L. PRANDTL: *Tragflächentheorie I y II*. «Nachr. Wiss. Cotinga», 1918 y 1919. Estos dos trabajos constituyen la exposición completa de la teoría cuyo desarrollo inició bastantes años antes. Concretamente, la primera publicación en que Prandtl alude al problema data de 1911. También, *The Generation of Vortices in Fluids of small Viscosity*, W. WRIGHT: «Mem. Lec. Jour. Roy. Aer. Soc.», Londres, 1927, págs. 720-41. Para la historia del desarrollo de la teoría, que a veces se llama de Lanchester-Prandtl, ver los trabajos de Giacomelli, Pistolesi y Goldstein, que se citan en la introducción.

(107) Ver, por ejemplo, las obras de Durand y Milne-Thomson, ya citadas. Asimismo se recomienda, por su tratamiento matemático, la *Aerodinámica* de R. FUCHS, de la que existe traducción española, INTA, 1945.

En a), que corresponde al modelo llamado del «torbellino en herradura» el ala se prolonga en sus extremos por dos torbellinos libres, arrastrados por la corriente, los cuales se extienden hasta el infinito en el régimen estacionario o, por el contrario, se cierran con un torbellino inicial, del tipo que se indicó en la figura I-5, b).

En cualquiera de los dos casos, el recinto es múltiplemente conexo y, por tanto, la circulación alrededor de un circuito como el C puede ser distinta de cero, lo que da lugar a una fuerza sobre el ala que, por unidad de envergadura, está dada por la fórmula [92] de Kutta-Joukowski.

Ahora bien, ocurre que la presencia de los torbellinos exteriores al ala que cierran el circuito, da lugar, en forma similar a lo que ocurría en el régimen transitorio del movimiento con un torbellino inicial de la figura I-5, b), a la aparición, junto a la sustentación, de una resistencia que, en este caso, se llama «inducida» y que subsiste aquí, incluso en el régimen estacionario que corresponde a la situación asintótica, es decir, cuando el torbellino inicial se ha alejado indefinidamente del ala y el modelo se reduce al torbellino en herradura formado por ésta y por los dos torbellinos libres que escapan de sus extremos.

La formación de los torbellinos libres, cuya existencia real se comprueba experimentalmente, se explica al considerar que la sustentación se debe, en definitiva, a que la presión sobre la cara superior del ala es menor, a causa de la circulación, que la de la cara inferior y esta diferencia, al aproximarse a los extremos del ala, origina una corriente transversal en las puntas, que da lugar a la formación de los citados torbellinos libres.

En el modelo que acaba de describirse, es claro que la circulación es constante en todas las secciones del ala y que su valor es también el mismo alrededor de los torbellinos libres, en virtud de los teoremas de Helmholtz.

Pero, al desarrollar el cálculo de la solución para este modelo en «herradura», se comprueba que resulta excesivamente rudimentario, especialmente al aproximarse a los extremos del ala.

Por ello, Prandtl reemplazó este esquema por otro más real, como el que ilustra la figura I-6, b), en que la herradura se sustituye por una superficie de discontinuidad, que escapa del borde de salida del ala.

En tal caso, los dos torbellinos concentrados en los extremos, de

intensidades de circulación $\pm \Gamma$ se sustituyen por una distribución continua de los mismos sobre la superficie de discontinuidad, de intensidad local $\gamma_t(y)$ por unidad de longitud, la cual está relacionada con el salto transversal de velocidades mediante la expresión (108):

$$\gamma_t(y) = v_t^+(y) - v_t^-(y). \quad [148]$$

Asimismo, la existencia de esta distribución continua de torbellinos libres permite que la circulación Γ alrededor del ala, varíe de una sección a otra y, además, en virtud de los teoremas de Helmholtz, entre ambas magnitudes debe existir la relación:

$$\frac{d\Gamma}{dy} = \gamma_t(y). \quad [149]$$

El desarrollo matemático de este modelo, cuya formulación permite generalizar la expresión [117] de Kutta-Joukowski al esfuerzo local sobre cada punto del ala (109), conduce a un problema muy complejo de la Teoría del Potencial, cuya resolución completa es prácticamente inabordable, especialmente a causa de la existencia de la estela, cuya forma geométrica se desconoce «a priori», como se vio que ocurría en el movimiento no estacionario de los perfiles bidimensionales.

Afortunadamente, aquí como en muchas otras aplicaciones tecnológicas tampoco es necesario disponer de la solución exacta, lo que permite introducir simplificaciones que eliminan las dificultades fundamentales y proporcionan resultados válidos dentro del orden de aproximación requerido en las aplicaciones.

La Teoría del Ala de Envergadura Finita constituye, sin duda, un excelente ejemplo de este tipo de aproximación a un problema y corresponden a Prandtl y al equipo de sus colaboradores, como se ha dicho, el mérito de haber adoptado un modelo realista suficientemente sencillo y de haber puesto a punto métodos de cálculo asequibles y cuyos resultados son válidos: así como el de haber establecido

(108) Debe tenerse presente que el salto de velocidades a través de la superficie de discontinuidad tiene que serlo solamente de la dirección, puesto que el módulo es igual en ambos casos, en virtud de la ecuación de Bernoulli, al serlo también la presión y el régimen estacionario.

(109) Ver FUCHS, ya citado, págs. 152 y sigts.

con su teoría los fundamentos necesarios para el desarrollo posterior de soluciones más elaboradas.

La solución de Prandtl se basa en el método de las pequeñas perturbaciones que ya hemos expuesto en varios ejemplos y que permite linealizar las ecuaciones y las condiciones de contorno.

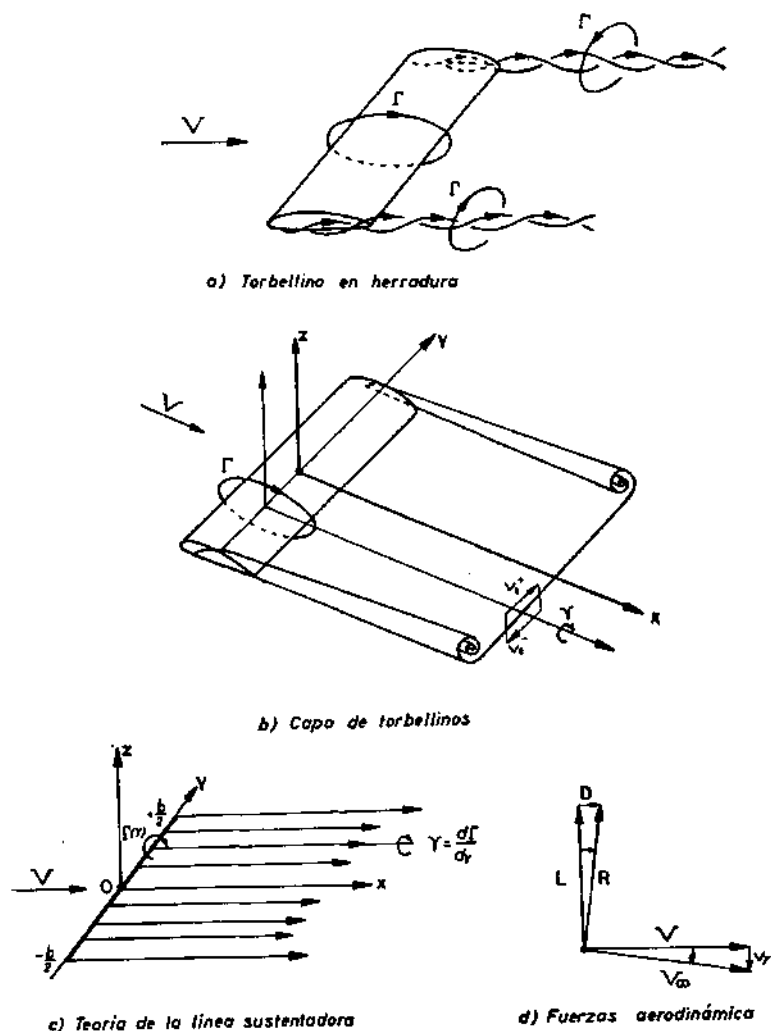


Fig. 1-6.—Teoría del ala de envergadura finita.

Para ello se empieza por expresar el potencial Φ de velocidades en la forma:

$$\Phi(x, y, z) = V \cdot x + \varphi(x, y, z), \quad [150]$$

donde se ha supuesto que la corriente principal, de velocidad V , es paralela al eje x y $\varphi(x, y, z)$ es el potencial de perturbación, cuyas derivadas φ_x , φ_y y φ_z , que son las velocidades de perturbación, cumplen la doble condición de ser muy pequeñas con respecto a V (110) y de tender a cero en el infinito.

Esta hipótesis linealiza las condiciones de contorno y permite conocer la forma de la superficie de discontinuidad, la cual coincide con la sección del plano x, y que forma la «sombra» del ala, como muestra la figura I-6, c).

Por otra parte, Prandtl supone que la envergadura del ala es grande con respecto a sus dimensiones transversales, lo que le permite asimilarla a un segmento del eje y entre los extremos $-\frac{b}{2}$ y $+\frac{b}{2}$, si es b la envergadura del ala, como ilustra la figura I-6, c).

Se trata del modelo llamado de la «línea sustentadora» (111).

Con ello, el problema se hace perfectamente asequible al cálculo, cuyos principales resultados son los siguientes:

1) La circulación $\Gamma(y)$ en torno al perfil del ala, en la sección de coordenada y , es la que correspondería a ese perfil en un movimiento plano cuya velocidad V_∞ en el infinito fuese la resultante de componer vectorialmente la V de la corriente principal con la $\varphi_z = w$ de perturbación, como muestra la figura I-6, d).

2) La fuerza aerodinámica por unidad de envergadura, en la sección y , es la que corresponde al teorema de Kutta-Joukowski para la circulación $\Gamma(y)$ y para la velocidad compuesta V_∞ y es normal a ésta.

Por tanto, puesto que la relación $\frac{w}{V}$ es, por hipótesis, muy pe-

(110) Salvo en puntos excepcionales, como son los puntos de remanso.

(111) El modelo es fácilmente generalizable al caso del ala en «flecha».

queña, dicha fuerza tiene una componente de sustentación $L(y)$, normal al plano (x, y) , cuyo valor es

$$L(y) = \rho V \Gamma(y) \quad [151]$$

y una componente de resistencia $D(y)$ en la dirección del eje x , la cual está dada, evidentemente, por la expresión (112):

$$D(y) = \rho \cdot \Gamma(y) w(y). \quad [152]$$

En vista de todo ello, el problema se reduce, en definitiva, a calcular la distribución de $w(y)$ sobre la envergadura del ala, puesto que una vez obtenido este valor, la Teoría del Perfil proporciona el de $\Gamma(y)$ y ambas magnitudes, los de la sustentación $L(y)$ y de la resistencia inducida $D(y)$, así como los de sus resultantes L y D sobre toda el ala:

$$L = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} L(y) \cdot dy; \quad D = \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} D(y) \cdot dy. \quad [153]$$

Ahora bien; como se vio en la ecuación (46) del epígrafe número 4, la velocidad inducida $w(y)$, puede expresarse en función de la intensidad $\gamma_i(y)$ de los torbellinos libres de la estela, o bien, merced a [149], en función de $\frac{d\Gamma(y)}{dy}$, en la forma:

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{\eta - y}, \quad [154]$$

en donde, al calcular la integral, hay que tomar el «valor principal» de Cauchy, en el punto singular $\eta = y$.

(112) El hecho de que sea $\frac{w}{V} \ll 1$, demuestra que también es $\frac{D}{L} \ll 1$. Por

tanto, la tracción necesaria para compensar la resistencia inducida es muy inferior a la sustentación que motiva dicha resistencia.

Por tanto, al combinar esta ecuación con la [120], teniendo en cuenta la primera condición de las dos enunciadas en la página anterior, se obtiene, para el cálculo de la distribución de la circulación $\Gamma(y)$ sobre la envergadura del ala, la siguiente ecuación integrodiferencial:

$$\Gamma(y) = a(y) \left[\alpha(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \cdot \frac{d\eta}{\eta - y} \right], \quad [155]$$

en donde $a(y)$ depende tan sólo de la geometría del perfil en la sección de coordenada y , en tanto que $\alpha(y)$ es su ángulo de ataque o inclinación con respecto al eje x , en esa sección.

Esta célebre ecuación, llamada de Prandtl, permite resolver el problema directo de buscar la distribución de sustentación correspondiente a una geometría e inclinación dadas del ala, las cuales quedan determinadas por las distribuciones de $a(y)$ y $\alpha(y)$, así como el recíproco de buscar la forma correspondiente a una distribución de $\Gamma(y)$ prefijada.

Por ejemplo, al plantearse el problema variacional de determinar la distribución de circulación sobre la envergadura del ala que produce resistencia inducida mínima, se demuestra que dicha distribución es la elíptica

$$\Gamma(y) = \Gamma_m \sqrt{1 - \left(\frac{2y}{b}\right)^2}, \quad [156]$$

en cuyo caso ocurre, además, que la velocidad inducida $w(y)$ es constante sobre toda la envergadura:

$$w(y) = \frac{2b}{\Gamma_m} \quad [157]$$

y que si el ala no tiene torsión, es decir, si es $\alpha(y)$ const., entonces la forma en planta del ala que satisface la condición [156] es también elíptica.

Para casos distintos de este de la distribución elíptica, se han puesto a punto números procedimientos de integración numérica de la ecuación de Prandtl, cuya exposición se encontrará en la bibliografía citada (113).

Asimismo, como se dijo al comienzo, se ha extendido la aplicación de la Teoría de Sustentación a otros muchos casos de sistemas sustentadores más o menos complejos, tales como multiplanos, hélices, rotores, etc., calculando las mutuas interacciones.

La teoría se ha extendido también al caso de la Superficie Sustentadora, para incluir formas de ala cuya envergadura no sea muy grande, así como para calcular la distribución de la sustentación en dos dimensiones, sobre la superficie de aquélla.

El problema, que consideraremos primero en régimen estacionario, aparece esquematizado en la figura I-7, donde se indica la notación empleada.

El ala se supone de espesor nulo (114) y situada sobre el plano (x, y) , de tal modo que, para poder aplicar la Teoría Lineal, la ordenada

$$z_c = c(x, y) \quad [158]$$

de uno cualquiera de sus puntos es muy pequeña con respecto a la longitud característica del proceso (115); por ejemplo, con respecto a la cuerda l_0 de la sección central.

Además, del borde de salida EDF del ala se desprende la superficie Σ de discontinuidad de velocidades, necesaria, como se ha visto, para asegurar el cumplimiento de la condición de Kutta-Joukowski sobre aquella línea.

El problema consiste, entonces, en determinar el potencial de velocidades de perturbación $\phi(x, y, z)$, que sea regular y de gradiente nulo a gran distancia del ala y de la estela y que satisfaga, además, las condiciones de contorno adecuadas sobre las regiones del plano (x, y) correspondientes, respectivamente, a cada una de aquéllas.

(113) Uno de los métodos más comúnmente empleados es el de H. MULTHOPP: *Die Berechnung der Auftriebsverteilung von Tragflügeln*. «Luft. Forsch.», 1938, págs. 153-69.

(114) Para un estudio de la influencia del espesor, ver F. KEUNE: *Singularitätenverfahren zur Berechnung der Strömung um mässig dicke Flügel endlicher Spannweite*. «Z. Flugwiss.», 1954, págs. 253-59.

(115) Si son n_x, n_y, n_z los cosenos directores de la normal a la superficie del ala en el punto (x, y) , el carácter «casi» plano de aquélla se expresa mediante las condiciones $|n_x| \ll 1; |n_y| \ll 1; |n_z| \sim 1$.

Veamos cuáles son estas condiciones de contorno.

En la aproximación lineal, la condición de tangencia de la velocidad en cada punto (ξ, η) de la superficie S del ala, se expresa, evidentemente, en virtud de [158], en la forma:

$$\begin{aligned} w^+(\xi, \eta, 0) &\equiv \varphi_z^+(\xi, \eta, 0) = w^-(\xi, \eta, 0) \equiv \\ &\equiv \varphi_z^-(\xi, \eta, 0) = V \cdot c_x(\xi, \eta). \end{aligned} \quad [159]$$

Por el contrario, la componente $u \equiv \varphi_x$ de la velocidad será discontinua al atravesar el ala y se cumplirá la siguiente condición para el coeficiente $C_l(\xi, \eta)$ de sustentación en el punto (ξ, η) del ala:

$$\begin{aligned} C_l(\xi, \eta) &\equiv C_p^-(\xi, \eta, 0) - C_p^+(\xi, \eta, 0) = \\ &= \frac{2}{V} [\varphi_x^+(\xi, \eta, 0) - \varphi_x^-(\xi, \eta, 0)] = 2\gamma(\xi, \eta), \end{aligned} \quad [160]$$

donde $\gamma(\xi, \eta)$ es la intensidad de un torbellino local paralelo al eje y , en el punto indicado.

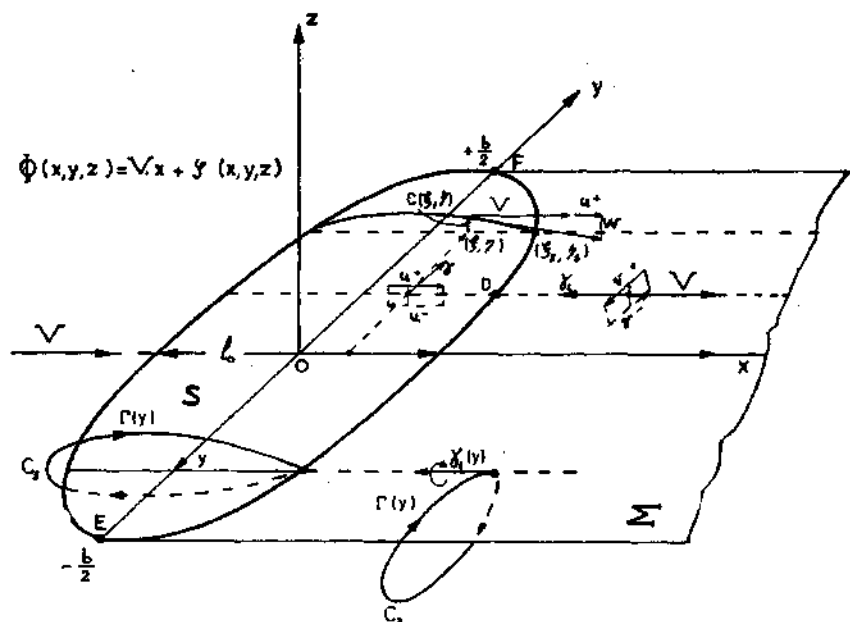


Fig. 1-7.—Teoría de la superficie sustentadora.

Por tanto, la circulación total $\Gamma(y)$ alrededor del ala, en la sección y de ésta, resulta ser:

$$\Gamma(y) = \int_{\xi_a(y)}^{\xi_s(y)} \gamma(\xi, y) d\xi, \quad [161]$$

en donde $\xi_a(y)$ y $\xi_s(y)$ son, respectivamente, las coordenadas de los bordes de ataque y salida del ala, en aquella sección.

Además, sobre cada uno de los puntos (ξ_s, η_s) del borde de salida del ala, tiene que cumplirse la condición de Kutta-Joukowski:

$$\varphi_x^+(\xi_s, \eta_s, 0) = \varphi_x^-(\xi_s, \eta_s, 0) \quad [162]$$

Por último, en la superficie Σ de la estela se ha de cumplir la condición de que el salto de presión sea nulo, lo que se expresa, evidentemente, en la forma:

$$\varphi_x^+(\xi, \eta, 0) = \varphi_x^-(\xi, \eta, 0), \quad [163]$$

que muestra la continuidad de la componente u de la velocidad al atravesar aquélla.

Asimismo, la componente $w = \varphi_z$ debe ser también continua, por la misma razón que en el ala:

$$\varphi_z^+(\xi, \eta, 0) = \varphi_z^-(\xi, \eta, 0). \quad [164]$$

Por consiguiente, la discontinuidad puede darse solamente en la componente transversal $v \equiv \varphi_y$ de la velocidad. Ahora bien, puesto que la circulación $\Gamma(y)$ es la misma sobre los circuitos C_1 y C_2 de la figura, al ser reconciliables entre sí, la discontinuidad debe ser tal que cumpla la condición:

$$\varphi_y^+(\xi, \eta, 0) - \varphi_y^-(\xi, \eta, 0) = \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \equiv \gamma_t(\eta), \quad [165]$$

donde $\gamma_t(\eta)$ es la intensidad de una distribución continua de torbellinos, paralelos al eje x .

En definitiva, a la vista de estas condiciones, hay que buscar un potencial $\varphi(x, y, z)$ que sea continuo en todo el espacio fluido, a excepción de las superficies $S + \Sigma$ del ala y de la estela, donde sus

derivadas deben cumplir las condiciones anteriormente formuladas.

Enseña la Teoría del Potencial (116) que estas condiciones de contorno pueden satisfacerse mediante una distribución $\delta(\xi, \eta)$ de dobletes de eje paralelo a z , sobre aquellas superficies, con lo que se obtiene para φ una expresión de la forma:

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{s+\Sigma} \delta(\xi, \eta) \frac{\partial \left(\frac{1}{r} \right)}{\partial z} \cdot d\xi d\eta, \quad [166]$$

en donde es

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}, \quad [167]$$

y donde la intensidad $\delta(\xi, \eta)$ de la distribución de dobletes debe ser tal que se cumplan las condiciones de contorno que hemos visto, sobre S y Σ .

Al aplicar la condición [159] resulta, finalmente, la siguiente ecuación exclusivamente sobre la superficie del ala:

$$C_x(x, y) = \frac{1}{4\pi V} \iint_s \frac{\gamma(\xi, \eta)}{(y - \eta)^2} \left\{ 1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right\} d\xi d\eta. \quad [168]$$

Esta expresión es una ecuación integral de núcleo

$$K(x - \xi, y - \eta) \equiv \frac{1}{(y - \eta)^2} \left\{ 1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \right\} \quad [169]$$

singular para el cálculo de la distribución $\gamma(\xi, \eta)$ de sustentación por unidad de superficie del ala, dada la forma $C(\xi, \eta)$ de ésta, que corresponde al problema directo.

Al ser el núcleo singular en el punto $\eta = y$, debe tomarse la parte principal de la integral, al calcular [168] (117).

Por el contrario; si se da la citada distribución $\gamma(\xi, \eta)$ de susten-

(116) Ver WARD, ya citado en el epigrafe 7. También J. WEISSINGER: *Theorie des Tragflügels*. «Handbuch der Physik», vol. VIII, tomo 2.º, págs. 402 y siguientes, Springer, Berlin, 1963. Asimismo, A. ROBINSON y J. A. LAURMAN: *Wing Theory*, Cambridge Univ. Press, 1956, págs. 169 y sigts.

(117) J. HADAMARD: *Le Problème de Cauchy*. Hermann et Cie., París, 1932. También H. LOMAX, M. A. HEASLET y F. B. FULLER: *Integrals and Integral Equations in Linearized Wing Theory*. «Tech. Repa.», núm. 1.054. NACA, 1951.

tación, es decir, en el problema «inverso», la ecuación anterior proporciona la curvatura del ala, mediante una cuadratura, al igual de lo que ocurría en el perfil.

Conocida esta distribución, el potencial de velocidades $\varphi(x, y, z)$ en el punto (x, y, z) está dado por la expresión:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \iint_s \gamma(\xi, \eta) \frac{z}{(y - \eta)^2 + z^2} \left\{ 1 + \frac{x - \xi}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} \right\} d\xi d\eta. \quad [170]$$

Por otra parte, resulta sencillo deducir de la ecuación [168] la de Prandtl correspondiente a la Teoría de la Línea Sustentadora. En efecto, para ello basta con suponer que la envergadura del ala es grande con respecto a las cuerdas de los perfiles y efectuar en [168] una primera integración respecto de ξ (118).

Debe señalarse a este respecto que la teoría de la línea sustentadora ofrece un excelente ejemplo, como ha puesto de manifiesto van Dyke (118a), de aplicación del método de las perturbaciones singulares, del que veremos numerosos casos en los epígrafes y capítulos siguientes, cuando se trata de desarrollar asintóticamente la solución en función del recíproco del alargamiento del ala, para obtener aproximaciones de orden superior al primero, dado por la teoría de Prandtl.

Finalmente, para desarrollar la solución se puede utilizar también, en lugar de φ , el potencial $\Omega(x, y, z)$ de aceleraciones, concepto introducido por Prandtl y que se expresa, en función del de velocidades $\varphi(x, y, z)$, en la forma:

$$\Omega(x, y, z) = V \cdot \varphi_x(x, y, z) = - \frac{p - p_\infty}{\rho}, \quad [171]$$

con lo cual el valor de Ω proporciona, directamente, la distribución de presiones. Es claro que este potencial Ω debe satisfacer también la ecuación diferencial de Laplace.

(118) Ver WEISSINGER, ya citado.

(118a) Ver VAN DYKE, citado en la introducción, capítulo IX, págs. 167 y siguientes.

Por otra parte, una vez calculado $\Omega(x, y, z)$, el valor de $\varphi(x, y, z)$ se obtiene a partir de él, en virtud de [171], y habida cuenta del comportamiento de φ en el infinito, mediante la simple cuadratura:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{V} \int_{-\infty}^x \Omega(\xi, y, z) d\xi. \quad [172]$$

La ecuación integral [168] sólo se puede resolver analíticamente en alas de forma en planta muy especial, tales como la circular (119) y la elíptica (120), casos ambos en que se puede aplicar una separación de variables.

Por ello ha sido necesario, en general, poner a punto procedimientos de cálculo numérico, mediante una distribución discreta de torbellinos sobre la superficie del ala, para cuya descripción hay que remitir a la bibliografía especializada (121).

Con ello se han podido calcular las distribuciones de sustentación y otras muchas características de una gran variedad de alas. La comparación de estos cálculos con las mediciones experimentales resulta muy satisfactoria, por lo que se trata de un problema que puede considerarse resuelto.

Asimismo y como ya se anticipó al tratar de los cuerpos fuselados en el epígrafe 7.º, Jones (122) ha puesto a punto una extensión del método de Munk que allí se mencionó, para determinar las características aerodinámicas de las alas de poca envergadura, como son

(119) W. KINNER: *Die Kreisförmige Tragfläche auf potential theoretischer Grundlage*. «Ing. Arch.», 1937, págs. 47-80.

(120) K. KRINNES: *Die elliptische Tragfläche auf potential theoretischer Grundlage*. ZAMM, 1940, págs. 65-88.

(121) H. G. KÜSSNER: *Allgemeine Tragflächen Theorie*. «Luft. Forsch.», 1940, págs. 370-78. Existe traducción inglesa en «Tech. Mem.», núm. 079 de NACA. H. MULTHOPP: *Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings*. (Subsonic Lifting-Surface Theory.) «Res. Mem.», núm. 2.884. Aer. Res. Council. Londres, 1955; E. TRUCKENBRODT: *Tragflächentheorie bei incompressibler Strömung*. WGL, 1954, págs. 40-65. También ROBINSON y LAURMAN, ya citados; C. E. WATKINS, D. S. WOOLSTON y H. J. CUNNINGHAM: *A Systematic Procedure for Determining Aerodynamic Forces on Oscillating or Steady Finite Wings at Subsonic Speeds*. Rept. R-48-NASA, 1959.

(122) R. T. JONES: *Properties of Low-Aspect-Ratio Pointed Wings at Speeds Below and Above the Speed of Sound*. «Tech. Rept.», núm. 835, NACA, 1946.

algunas de las formas que se emplean en aviones muy rápidos y en proyectiles.

Por otra parte, al igual de lo que ocurría con los perfiles y por las mismas razones, ha sido necesario generalizar la Teoría de la Superficie Sustentadora al caso de los movimientos no estacionarios que resultan, por ejemplo, de superponer al movimiento «principal» uniforme, de velocidad V paralela al eje x , el de perturbación $\varphi(x, y, z, t)$ producido por oscilaciones, giros, deformaciones, etcétera, del ala, de pequeña amplitud.

Por ejemplo, en el caso de oscilaciones de frecuencia circular ω , si es $f(x, y, z, t)$ una cualquiera de las funciones del proceso, el problema consiste en buscar soluciones que sean de la forma

$$f(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \bar{f}(x, y, z), \quad [173]$$

en donde $\bar{f}(x, y, z)$ es la distribución de amplitudes de la oscilación de la función f .

En el caso de un fluido incompresible que estamos tratando, como ya vimos en la Teoría del Perfil, ocurre que la ecuación diferencial del potencial de velocidades es la de Laplace, independientemente de que el movimiento sea estacionario o no (123).

Por tanto, la influencia del tiempo ha de hacerse explícita al aplicar las condiciones de contorno, al igual de lo que ocurría en los movimientos planos.

Al proceder así, se obtiene una ecuación integral parecida a la [168], pero cuyo núcleo depende, en una forma bastante complicada, de las características de la oscilación (124).

En efecto, dicha ecuación es:

$$\begin{aligned} \bar{w}(x, y) &= \left(V \frac{\partial}{\partial x} + i\omega \right) \bar{c}(x, y) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \iint_S \gamma(\xi, \eta) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \end{aligned} \quad [174]$$

(123) En la dinámica de gases que se analiza a partir del epígrafe 13, se verá que la ecuación del potencial de velocidades, en régimen no estacionario, incluye términos que no existen en el régimen estacionario.

(124) Ver H. LOMAX, M. A. HEASLET, B. FULLER y L. SLUDER: *Two-and Three-Dimensional Unsteady Lift Problems in High-Speed Flight*, «Tech Rept.», núm. 1.077, NACA, 1952; H. G. KÜSSNER: *A General Method for Solving Problems of the Unsteady Lifting Surface Theory in the Subsonic Range*. «Jour.

donde el núcleo singular $K(x - \xi, y - \eta)$ está dado, en este caso, por la expresión:

$$K(x - \xi, y - \eta) \equiv \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} e^{-i \frac{\omega(x - \xi)}{V}} \int_{-\infty}^{x - \xi} \frac{e^{-\frac{\omega}{V} \zeta}}{\sqrt{\zeta^2 + (y - \eta)^2 + z^2}} d\zeta. \quad [175]$$

Otro aspecto de la Teoría del Ala de Envergadura Finita, que conviene señalar, es la existencia de un conjunto de teoremas variacionales y de inversión de la corriente, debidos al profesor Flax de la Universidad de Cornell, que permiten obtener soluciones a partir de otras conocidas (125).

Para terminar con esta teoría diremos, finalmente, que siendo el de la sustentación uno de los problemas fundamentales de la Aerodinámica y bajo exigencias de diseño, cada vez más rigurosas y precisas, durante los últimos años se ha hecho un gran esfuerzo de desarrollo y puesta a punto de métodos numéricos para un gran número de casos, estacionarios o no e incluyendo los efectos de compresibilidad que consideraremos, como ya hemos señalado a partir del epígrafe número 13.

Dos referencias de interés que permiten apreciar el estado de la cuestión en estos momentos y que incluyen abundante bibliografía, son las debidas a Ashley et al. (126), del Instituto Tecnológico de Massachusetts y a Landahl y Stark (127), del Instituto Real de Tecnología de Suecia.

En este mismo orden de ideas, se ha intentado, también, extender el método de Hess y Smith al estudio del problema no lineal del ala

Aer. Sci.), 1954, págs. 17-27: CH. E. WATKINS, H. L. RUNYAN y D. S. WOOLSTON: *On the Kernel Function of the Integral Equation Relating the Lift and Downwash Distributions of Oscillating Finite Wings in Subsonic Flow*, «Tech. Rept.», número 1.234, NACA, 1955; R. TIMMAN, ya citado en la teoría del perfil.

(125) A. H. FLAX: *Reverse-Flow and Variational Theorems for Lifting Surfaces in Nonstationary Compressible Flow*, «Jour. Aer. Sci.», 1953, págs. 120-26. Ver también WARD, ya citado, págs. 86 y sigts.

(126) H. ASHLEY, SH. WINDALL y M. T. LANDAHL: *New Directions in Lifting Surface Theory*, «AIAA Jour.», 1965, págs. 3-16.

(127) M. T. LANDAHL y V. J. E. STARK: *Numerical Lifting-Surface Theory Problems and Progresses*, «AIAA Jour.», 1968, págs. 2049-60.

de envergadura finita en régimen estacionario o no (128), si bien la dificultad de la configuración de la estela hace que el progreso en esta dirección sea lento.

Debe advertirse, sin embargo, que el conocimiento de la configuración de la estela es importante desde el punto de vista de sus posibles interacciones con otros órganos del propio avión o de otras aeronaves, cuestión que ha sido tratada recientemente desde este punto de vista, por ejemplo, con métodos teóricos y experimentales, por Mc Cormick, de la Universidad de Pensilvania y otros (129).

Por lo demás, éste es tan sólo un caso particular del problema llamado generalmente de «Interacción» aerodinámica entre los diversos elementos constitutivos de una aeronave.

Se trata de una cuestión de la máxima importancia para el proyecto de tales vehículos, a cuyo estudio se viene dedicando, por consiguiente, un gran esfuerzo desde hace años (130).

Resulta imposible entrar aquí en la exposición de una materia tan compleja como ésta, respecto de la cual se han efectuado muy importantes progresos durante los últimos años, merced, sobre todo, a las posibilidades del cálculo electrónico.

Por ello, nos limitaremos a señalar que se ha publicado recientemente un trabajo de revisión muy completo (131), el cual incluye, además, una bibliografía seleccionada, extensa y al día.

Por último, las teorías que acabamos de exponer para las alas, se han extendido con éxito al estudio de otros elementos tales como las hélices (132), los rotores de helicópteros (133), las turbomá-

(128) R. H. DJOJODIHARDJO y SH. E. WIDNALL: *A Numerical Method for the Calculation of Nonlinear, Unsteady Lifting Potential Flow Problems*. «AIAA Jour.», 1969, págs. 2001-9.

(129) B. W. MC CORMICK, J. L. TAngLER y H. E. SHERRIEN: *Structure of Trailing Vortices*. «Jour. Aircraft», 1968, págs. 260-67.

(130) Una obra clásica sobre la materia es el trabajo de C. FERRARI en el volumen VII de la Enciclopedia de Princeton.

(131) H. ASHLEY y W. P. RODDEN: *Wing-Body Aerodynamic Interaction*. «An. Rev. Fluid. Mech.», 1972, págs. 431-72.

(132) S. GOLDSTEIN: *On the Vortex Theory of Screw Propellers*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1929, págs. 440-65.

(133) L. A. A. NIKOLSKY: *Helicopter Analysis*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1951; A. GESSOW y G. C. MYERS: *Aerodynamics of the Helicopter*. Macmillan, Nueva York, 1952. También R. ISAACKS: *Airfoil Theory for Rotary Wing Aircraft*. «Jour. Aer. Sci.», 1946, págs. 218 y sigts. Asimismo R. G. LOEWY: *A Two-Dimensional Approximation to the Unsteady Aerodynamics of Rotor Wings*.

quinas (134), etcétera, y, sin ninguna duda, tendrán resultados decisivos en la optimización y diseño de estos componentes.

10. INFLUENCIA DE LA VISCOSIDAD. TEORÍA DE LA CAPA LÍMITE

Hemos visto en los epígrafes precedentes que la doble condición de incompresibilidad y de ausencia de la viscosidad ha permitido hacer grandes progresos en la comprensión y tratamiento matemático de procesos de la Dinámica de Fluidos muy complejos y de gran importancia en los aspectos científico y tecnológico.

Concretamente, la solución de tales problemas se ha conseguido mediante la aplicación de la teoría de los movimientos potenciales, ampliada con la incorporación de determinadas singularidades, aisladas o distribuidas sobre superficies como las capas de torbellinos, cuyo reparto y naturaleza condicionan esencialmente la de la solución buscada.

Pero también se ha visto que algunos fenómenos igualmente básicos, tales como los desprendimientos de la corriente, la formación de torbellinos en los bordes agudos de los obstáculos, etc., sólo pueden explicarse haciendo apelación a la influencia de la viscosidad del fluido.

Sin que la cuestión pueda resolverse entonces, como sería de desear, mediante la integración del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, porque las dificultades intrínsecas del mismo sólo permiten tratar, como se vio en el epígrafe primero, un reducido número de casos, que guardan poca relación con los problemas que aquí interesan.

Así las cosas, el paso decisivo para salir de esta situación fue dado por el profesor L. Prandtl, al introducir el concepto de la «capa límite», en un memorable trabajo que presentó ante el Tercer Congreso de Matemáticos celebrado en Heidelberg, en 1904 (135).

«*Jour. Aer. Sci.*», 1957, págs. 81-92; H. ASHLEY, E. BRUNELLE y H. H. MOSER: *Unsteady Flow Through Helicopter Rotors*, ZAMP, 1958, págs. 57-89; R. H. MILLER: *Rotor Blade Harmonic Loading*, «*AIAA Jour.*», 1964, págs. 1254-60, y *Unsteady Air Loads on Helicopter Rotor Blades*, «*Jour. Roy. Aer. Soc.*», 1964, págs. 640 y sigts.

(134) W. R. HAWTHORNE y R. A. NOVAK: *The Aerodynamics of Turbo-Machinery*, «*An. Rev. Fluid. Mech.*», 1969, págs. 341-66.

(135) L. PRANDTL: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung*.

La idea básica de Prandtl consiste en reconocer que, en el caso de fluidos de viscosidad pequeña, como el aire o el agua, la acción de aquélla se manifiesta tan sólo en una pequeña capa próxima a las paredes de los obstáculos, la llamada «capa límite», donde la condición de adherencia origina fuertes gradientes de velocidad que hacen que los esfuerzos de viscosidad, que son proporcionales a esos gradientes, resulten de igual orden de magnitud que los de la presión y que las fuerzas de inercia. En el interior de esta capa el movimiento, evidentemente, es turbillionario.

Por tanto, es en esa zona solamente donde es necesario tomar en cuenta la acción de la viscosidad, mientras que en el espacio exterior a la misma el fluido puede tratarse como un medio ideal, aplicando la teoría de los movimientos irrotacionales y los procedimientos que se han descrito en los epígrafes precedentes.

Así resulta que, en tanto la capa límite permanezca adherida a las paredes y puesto que su espesor es, entonces, muy pequeño, el movimiento «exterior» podrá calcularse como si fuese el de un fluido ideal, lo que proporcionará, además, las distribuciones de velocidades y de presiones sobre las paredes, cuyos valores determinan, como vamos a ver, las características de la capa límite.

Estas dos magnitudes serán, pues, datos de partida para el cálculo de la capa límite, la cual permitirá, a su vez, determinar efectos tales como la resistencia de rozamiento del fluido sobre el contorno y, eventualmente, efectuar correcciones a la solución que se obtuvo antes para el movimiento en las zonas exteriores a la misma.

Pero ocurre que, en determinadas circunstancias, la capa límite se separa de la superficie del obstáculo, alterando fuertemente, entonces, las características del movimiento potencial exterior a ella, al que incorpora masas turbillonarias procedentes de aquélla, las cuales, una vez separadas, conservan su identidad durante mucho tiempo.

Este fenómeno de desprendimiento se produce, concretamente, cuando la corriente en el seno de la capa límite se ve sometida a gradientes adversos de presión suficientemente intensos o persistentes, como suele ocurrir en determinadas zonas de las superficies convexas de obstáculos tales como el que ilustra la figura I-2, b).

Todo lo cual permite explicar satisfactoriamente la aparición de

torbellinos en la corriente exterior y los fenómenos a que se hizo referencia al comienzo del presente epígrafe.

Con su teoría de la capa límite, Prandtl desveló uno de los más fecundos campos de la moderna Mecánica de Fluidos y, aunque sus ideas tardaron algunos años en ser debidamente apreciadas, el desarrollo posterior de esta teoría ha sido enorme y está todavía lejos de haberse completado.

Debiendo agregarse que, al igual de lo que se dijo para el desarrollo de la Teoría de la Sustentación, en la de la capa límite de Prandtl no sólo proporcionó el modelo adecuado al caso sino que, además, llevó a cabo su formulación matemática, lo que permitió poner a punto estos problemas, como han confirmado sistemáticamente y a entera satisfacción las observaciones experimentales.

Veamos brevemente cuál es esa formulación (136), cuyo planteamiento requiere algunas consideraciones delicadas acerca de los órdenes de magnitud relativos de las diversas magnitudes que intervienen, limitando el planteamiento al caso del movimiento plano de deslizamiento sobre una pared recta que ilustra la figura I-8, a) de un fluido incompresible y cuyo coeficiente de viscosidad es constante y satisface la condición de Stokes ($\mu' = 0$) (137).

En tales circunstancias, y con la notación que se indica en la citada figura, las ecuaciones de Navier-Stokes quedan así:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad [176]$$

Ecuaciones de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad [177]$$

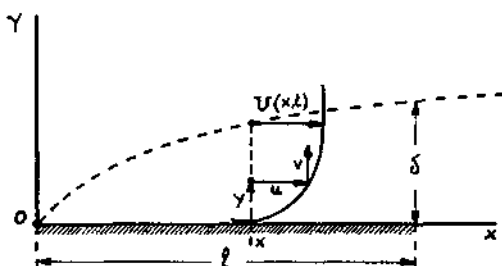
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad [178]$$

(136) La obra más completa acerca de la capa límite es la debida a H. SCHLICHTING: *Grenzschicht-Theorie*. G. Braun, Karlsruhe, 1966, de la que existe traducción española: *Teoría de la capa límite*. Edición URMO, Bilbao, 1972. También L. ROSENHEAD: *Laminar Boundary Layers*. Oxford Clar. Press, 1963.

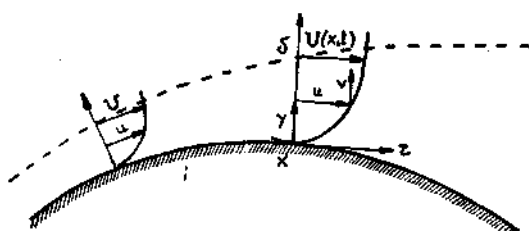
(137) Como se indica después, las conclusiones son válidas para el caso de una pared curva.

Además, sobre la pared, que se supone en reposo, el fluido ha de cumplir las condiciones de adherencia

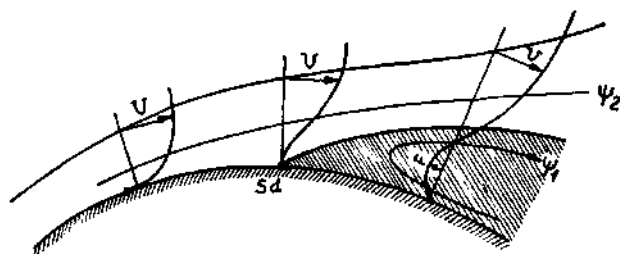
$$y = 0, \quad u = v = 0. \quad [179]$$



a) Definición



b) Pared curva



c) Desprendimiento de la corriente

Fig. I-8.—Capa límite.

Es claro que el estudio de la evolución de las soluciones de este problema, cuando la viscosidad ν disminuye, no puede resolverse mediante el paso al límite para $\nu = 0$, porque estamos ante un caso bien conocido de los llamados de «perturbaciones singulares» (138), en que dicho paso al límite elimina los términos de orden más alto en el sistema diferencial, haciendo con ello imposible el cumplimiento de la doble condición de contorno [179].

Para eludir esta dificultad, al mismo tiempo que simplifica el sistema anterior con objeto de hacerlo asequible al cálculo, reteniendo en él solamente aquellos términos que son indispensables, Prandtl considera, de acuerdo con su modelo de la capa límite, que el espesor de ésta, el cual mediremos por una longitud característica δ , es pequeño con respecto a las distancias medidas en la dirección x de la placa, cuya longitud característica llamaremos l ; es decir, supone que en el espacio del movimiento de la capa límite se cumple la condición:

$$\frac{\delta}{l} \ll 1. \quad [180]$$

Si se expresan ahora adimensionalmente las ecuaciones [176], [177] y [178] mediante el siguiente cambio de variables:

$$t = t_0 \cdot t' \quad x = l \cdot \xi \quad y = \delta \cdot \eta \quad u = U \cdot v_x \\ v = U \cdot v_y \quad p = \rho \cdot U^2 \cdot \pi,$$

donde t_0 es un tiempo característico y la velocidad de referencia U es del orden de magnitud de la de la corriente en el exterior de la capa límite, el sistema anterior se transforma en el siguiente:

$$\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{1}{\delta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad [181]$$

$$\frac{U}{t_0} \cdot \frac{\partial v_x}{\partial t'} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{l}{\delta} v \frac{\partial v_x}{\partial \eta} = - \frac{\partial \pi}{\partial \xi} + \\ + \frac{1}{R_\epsilon} \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi^2} + \frac{l^2}{\delta^2} \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} \right) \quad [182]$$

(138) Ver, por ejemplo, M. VAN DYKE: *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Acad. Press. Nueva York, 1964, donde el problema de la capa límite, entre otros, se trata desde este punto de vista.

$$\frac{U}{t_0} \frac{\partial v_y}{\partial t'} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial \xi} + \frac{l}{\delta} v_y \frac{\partial v_y}{\partial \eta} = - \frac{l}{\delta} \frac{\partial \pi}{\partial \eta} + \\ + \frac{1}{R_s} \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi^2} + \frac{l^2}{\delta^2} \frac{\partial^2 v_y}{\partial \eta^2} \right) \quad [183]$$

donde

$$R_s = \frac{\rho U l}{\mu} \quad [184]$$

es el número de Reynolds característico del proceso y hay que tener presente que v_x y v_y deben cumplir sobre la placa la doble condición

$$v_x = 0 \quad v_y = 0. \quad [185]$$

Al comparar ahora los órdenes de magnitud de los diversos términos, teniendo presente la condición [180], se llega a las siguientes conclusiones (139):

Puesto que para $\eta = 0$ es $v_y = 0$, la ecuación de continuidad enseña que en toda la capa límite es

$$v_x \equiv \frac{v}{U} \ll 1 \quad [186]$$

y que esta relación es del orden de magnitud $\frac{\delta}{l}$

$$v_x \sim 0 \left(\frac{\delta}{l} \right) \quad [187]$$

En virtud de esto, en la ecuación [182] deben subsistir todos los términos de inercia del primer miembro, así como el de presión del segundo, puesto que los gradientes de ésta a lo largo de la pared son del mismo orden de magnitud que la presión dinámica de referencia ρU^2 en la corriente exterior.

(139) Para una análisis matemático más riguroso de la deducción, ver H. SCHMIDT y K. SCHROEDER: *Laminare Grenzschichten. Ein Kritischer Literaturbericht*. «Luftfahrtforschung», 1942, págs. 65-97.

Por el contrario, de los dos términos de viscosidad, el segundo es mucho mayor que el primero, a causa del coeficiente $\frac{l^2}{\delta^2} \gg 1$, por lo que es el único que debe retenerse y además debe cumplir la condición

$$\frac{1}{R_s} \cdot \left(\frac{l}{\delta} \right)^2 \sim 0 \quad (1). \quad [188]$$

lo que da una medida del orden de magnitud del espesor de la capa límite

$$\frac{\delta}{l} \sim 0 \quad (R_s^{-1/2}) \quad [189]$$

y pone de manifiesto que la teoría, que está basada en la hipótesis [180], es aplicable solamente cuando el número de Reynolds es muy grande

$$R_s \gg 1. \quad [190]$$

Por último, la tercera ecuación [183] expresa que, en el seno de la capa límite, el gradiente transversal de la presión es muy pequeño:

$$\frac{\partial \pi}{\partial \eta} \sim 0 \quad \left(-\frac{\delta}{l} \right) \quad [191]$$

Todo lo cual permite reducir el sistema inicial de tres ecuaciones, el de las dos siguientes, de la capa límite, que escribimos volviendo a las variables dimensionales de origen.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad [192]$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad [193]$$

En él la distribución $p(x, t)$ de la presión es un dato del problema, proporcionado, como se dijo, por la solución de la corriente exterior a la capa límite; u y v son, por tanto, las dos únicas incógnitas del sistema, las cuales han de cumplir las siguientes condiciones de contorno:

$$y = 0 \quad u = v = 0 \quad [194]$$

$$y \rightarrow \infty \quad u \rightarrow U(x, t), \quad [195]$$

en donde $U(x, t)$ es también otro dato del problema: la velocidad de deslizamiento sobre la pared de la solución de la corriente exterior.

Además, en los movimientos no estacionarios $\left(\frac{\partial}{\partial t} \neq 0\right)$ hay que precibir una adecuada distribución para u y v , en el instante inicial $t = 0$, mientras que en los estacionarios, hay que prescribir una distribución de u en el punto de arranque de la capa límite, que supondremos coincidente con el origen $x = 0$:

$$x = 0 \quad u(0, y) = u_0(y)$$

tal que para

$$y \rightarrow \infty, \quad u_0(y) \rightarrow U(0). \quad [196]$$

Se demuestra fácilmente que las ecuaciones [192] y [193] son también válidas sobre una pared curva, en cuyo caso x es la longitud el arco a lo largo de la pared e y a la distancia a ella sobre la normal en el punto x (140), como ilustra la figura I-8, b).

En cuanto al esfuerzo τ de rozamiento sobre la pared, el cual da origen a la resistencia llamada de «rozamiento», está dado, evidentemente, por la expresión:

$$\tau = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad [197]$$

(140) Ver, por ejemplo, SCHLICHTING, ya citado.

Asimismo, el rotacional ω_z del movimiento turbillonario en la capa límite es

$$\omega_z \simeq - \frac{\partial u}{\partial y} \neq 0. \quad [198]$$

Aun cuando las soluciones de la capa límite tienden asintóticamente a los valores de la corriente exterior para $y \rightarrow \infty$, según resulta de la condición [196], es posible definir un espesor δ de aquélla por varios procedimientos.

Por ejemplo, puede definirse un espesor geométrico $\delta_g(x)$ determinado por el valor de y en que $u(x, \delta_g)$ sea el 99 por 100 del valor límite de $U(x)$.

Sin embargo, la definición habitualmente empleada es la que corresponde al llamado «espesor de desplazamiento» δ , concepto debido a Prandtl, de interpretación física inmediata, cuya expresión es:

$$\delta(x, t) = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad [199]$$

Por ejemplo, en el caso de la placa plana que se muestra en la figura I-4, a) y al que nos referiremos después, el espesor relativo es:

$$\frac{\delta}{l} = \frac{1,72}{R_l}. \quad [200]$$

Por último, el desprendimiento de la capa límite se produce, como ilustra la figura I-8, c), en el punto S_d , donde se invierte el sentido de la corriente en el interior de aquélla, es decir, en el punto donde se cumple sobre la pared la condición

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = 0, \quad [201]$$

esto es, donde el rozamiento τ dado por [197] es nulo.

Pero como ya se ha dicho, en caso de desprendimiento el espesor

crece tan rápidamente que la aproximación de la capa límite deja de ser válida a partir de aquel punto.

En el aspecto matemático, el análisis del comportamiento de las soluciones del sistema [192] y [193] más allá del punto de separación de la corriente es muy difícil, tanto analíticamente como por integración numérica, porque aquel punto es, en general, una singularidad de la solución, de índole bastante complicada, como puso de manifiesto Goldstein (141).

Volviendo ahora al sistema de la capa límite, la ecuación de continuidad [192] muestra que existe una función de corriente $\psi(x, y, t)$ tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad [202]$$

Esta función, que cumple evidentemente las condiciones [86] y [87] enunciadas en el epígrafe 7, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \\ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_s} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \end{aligned} \quad [203]$$

con las condiciones de contorno evidentes:

$$\left. \begin{aligned} y = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0; \\ y \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow U(x, t). \end{aligned} \right\} \quad [204]$$

Además, como ya se ha dicho, para completar la determinación

(141) Para un análisis general y reciente de este difícil problema, ver S. N. BROWN y K. STEWARTSON: *Laminar Separation*. «An. Rev. Fluid. Mec.», 1969, págs. 45-72. Un ejemplo de cálculo numérico de separación en régimen no estacionario ha sido realizado muy recientemente por D. P. TELIONIS y D. TH. TSAHALIS: *Unsteady Laminar Separation over Impulsively Moved Cylinders*. «Acta Astronáutica», 1974, págs. 1487-1505.

del problema en el instante inicial $t = 0$, hay que prescribir la distribución de velocidad $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ en todo el espacio.

Es claro que el sistema [192] y [193] de las ecuaciones de la capa límite constituye una importante simplificación respecto al [176], [177] y [178] de Navier-Stokes, del que se ha deducido, puesto que, en primer lugar, reduce en una unidad el número de variables y, consiguientemente, el de ecuaciones.

Por ejemplo, en el caso estacionario, von Mises (142) ha demostrado que, adoptando como variables independientes x, ψ , en lugar de x, y , la ecuación [203] de la función de la corriente se reduce a la siguiente:

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \nu u \frac{\partial^2 p_0}{\partial \psi^2}, \quad [205]$$

en donde la función incógnita es la presión de remanso $p_0(x, \psi)$:

$$p_0(x, \psi) = p(x) + \frac{1}{2} \rho U^2, \quad [206]$$

ecuación que, además, permite expresar u en función de p_0 en [205].

Las condiciones de contorno que debe satisfacer la presión de remanso son, evidentemente,

$$\left. \begin{aligned} \psi = 0 & \quad p_0 = p(x) \\ \psi \rightarrow \infty & \quad p_0 \rightarrow p(x) + \frac{1}{2} \rho U^2 = \text{const.} \end{aligned} \right\} \quad [207]$$

Pero, como es bien conocido, la ecuación [205] es justamente la de propagación unidimensional del calor en régimen no estacionario, es decir, el ejemplo más clásico de ecuación diferencial de tipo parabólico; si bien debe señalarse que el coeficiente de difusividad térmica es, en este caso, νu , lo que significa que la pared $\psi = 0$, donde es también $u = 0$ es una singularidad de aquella ecuación,

(142) R. VON MISES: *Bemerkungen zur Hydrodynamik*, ZAMM, 1927, páginas 425-31.

cuya presencia dificulta sensiblemente la integración numérica de la mencionada ecuación.

El primer caso de integración de las ecuaciones de la capa límite fue, como cabía prever, el de la placa plana representada en la figura I-8, a) para el caso de un movimiento estacionario, de corriente exterior uniforme:

$$p(x) = \text{const.}; \quad U(x) = \text{const.}$$

y se debe a Blasius (143), discípulo de Prandtl.

Para resolver el problema, Blasius introduce el concepto de semejanza de los perfiles de velocidad, del que posteriormente se haría uso muy generalizado (144), al suponer que la distribución de aquélla en el seno de la capa límite, es de la forma:

$$\frac{u}{U} = F\left[\frac{y}{\delta(x)}\right] \equiv F\left(y \cdot \sqrt{\frac{U}{\nu x}}\right) \equiv F(\eta), \quad [208]$$

donde

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad [209]$$

es una ordenada adimensional, cuya introducción se justifica por la relación [189] entre las longitudes características de las dimensiones longitudinal y transversal, respectivamente.

(143) H. BLASIUS: *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*. ZAMP, 1908, págs. 1-37. Trad. ingl. NACA TM 7256.

(144) Para un estudio del método de semejanza, que en muchos casos permite reducir las ecuaciones en derivadas parciales a ecuaciones en derivadas totales, ver, por ejemplo, W. F. AMES: *Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering*. Acad. Press, Nueva York, 1965, págs. 133 y sigts. Para un ejemplo de aplicación a las ondas de choque y combustión que constituye el objeto de la segunda parte de este trabajo, ver H. M. STERNBERG: *Similarity Solutions for Reacting Shock Waves*. «Quart. Jour. Mech. and Appl. Math.», 1970, págs. 77-90. Ver también otros ejemplos en G. I. BARENBLATT y YA. B. ZELDOVIC: *Self-Similar Solutions as Intermediate Asymptotics*. «An. Rev. Fluid. Mech.», 1972, páginas 285-312.

Al incorporar este concepto a la definición de la función de corriente $\psi(x, y)$, ésta puede expresarse en la forma:

$$\psi(x, y) = \sqrt{v U x} \cdot f(\eta), \quad [210]$$

y al introducir esta magnitud en [134] se obtiene, en lugar de ésta, la siguiente ecuación diferencial ordinaria para el cálculo de la función $f(\eta)$:

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \cdot \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0, \quad [211]$$

cuya solución debe satisfacer las tres condiciones de contorno, de fácil comprobación:

$$\left. \begin{array}{l} \eta = 0 \quad f = \frac{df}{d\eta} = 0 \\ \eta \rightarrow \infty \quad \frac{df}{d\eta} \rightarrow 2 \end{array} \right\} \quad [212]$$

La integración de la ecuación [212] de Blasius ha sido efectuada por numerosos autores empleando procedimientos analíticos y numéricos cuya descripción y valoración se encuentra en la abundante bibliografía sobre la materia (145).

Obtenida esta solución, se calculan fácilmente todas las magnitudes que interesan de la capa límite, tales como el perfil de velocidades, el coeficiente de rozamiento, el espesor δ , etc.

Asimismo se han tratado con posterioridad otros muchos casos de capas límites, correspondientes a movimientos estacionarios o no, de cuerpos planos o con simetría de revolución (146), desarrollándose

(145) Ver la obra de SCHLICHTING reiteradamente mencionada.

(146) En cuyo caso es necesario modificar la ecuación de continuidad [192], sustituyéndola por la siguiente:

$$\frac{\partial(r u)}{\partial x} + \frac{\partial(r v)}{\partial y} = 0,$$

donde x e y tienen el mismo significado que en el movimiento plano, en una sección mediana del cuerpo de revolución, y r es el radio de su contorno en el punto x .

procedimientos aproximados de integración, algunos de los cuales son sumamente ingeniosos y han encontrado aplicación posterior en otros problemas de índole distinta.

Todo lo cual resulta imposible exponerlo aquí incluso a título meramente enunciativo, por lo que remitimos al lector a la muy abundante bibliografía que existe sobre la materia (147).

Progresos mucho menores se realizaron durante bastante tiempo, en cambio, en la resolución de los problemas en tres dimensiones, si bien se trabaja intensamente en ellos desde 1950 (148) y se dispone ya de procedimientos satisfactorios para abordar numerosos casos de interés (149).

Antes de terminar con los procedimientos de resolución de las ecuaciones de la capa límite, vamos a referirnos brevemente al método de la ecuación integral de von Karman (150) porque con él se abrió un campo de aplicación muy extenso.

La llamada ecuación integral del impulso de la capa límite se obtiene por integración transversal, es decir, con respecto a y , de las ecuaciones de aquella y proporciona una relación de la forma

$$\tau_p = \rho \frac{\partial}{\partial x} (U \cdot \theta) + \rho \cdot U \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \delta + \rho \frac{\partial}{\partial t} (U \cdot \delta) \quad [213]$$

entre el rozamiento τ_p en la pared, en el punto x y en el instante t ; la velocidad exterior $U(x, t)$; el espesor de desplazamiento $\delta(x, t)$ definido en [199] y el espesor de impulso $\theta(x, t)$, el cual se define en la forma:

$$\theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad [214]$$

(147) Para una clasificación de los métodos empleados y alguna bibliografía de importancia, ver la referencia de NICKEL que se cita en la página 141.

(148) Para un reciente trabajo de revisión sobre la cuestión, ver E. A. EICHEL-BRENNER: *Three-dimensional Boundary Layers*. «An. Rev. Fluid Mech.», 1973, págs. 539-60.

(149) Para varios ejemplos de soluciones tridimensionales ver, por ejemplo, L. HOWARTH: *Laminar Boundary Layers*. «Handbuch der Physik», vol. VIII, 1, año 1959, págs. 307 y sgts.

(150) TH. VON KARMAN: *Über laminare und turbulente Reibung*. ZAMM, 1921, págs. 253-53. Trad. ingl. NACA TM 1092.

La ecuación [213] de von Karman proporciona, por tanto, una relación entre las tres magnitudes τ , δ , θ , cuyo conocimiento presupone el del perfil de velocidades $u(x, y, t)$, es decir, el de la solución del problema.

Pero esta dificultad puede eludirse suponiendo para el citado perfil una forma que cumpla las condiciones de contorno en ambos extremos de la capa límite y que dependa de un parámetro indeterminado.

Entonces, al introducir aquel perfil en la ecuación de von Karman, se obtiene una ecuación diferencial en derivadas parciales para el cálculo del citado parámetro, como función de x y de t a través de $U(x, t)$, cuya integración proporciona una solución aproximada del problema, con la ventaja de que, al operar con integrales, se atenúan los errores debidos a las inexactitudes locales en la forma de los perfiles supuestos.

Se trata del método de resolución de las ecuaciones de la capa límite llamado de Karman-Pohlhausen (151), el cual se ha aplicado con éxito a una gran variedad de situaciones.

Pasemos ahora a considerar la influencia de los efectos de compresibilidad.

La teoría de la capa límite se extiende con facilidad a los movimientos de fluidos compresibles, en cuyo caso las ecuaciones [192] y [193] se sustituyen, como se comprueba fácilmente (152), por las siguientes, que limitaremos, por brevedad, al caso de los movimientos estacionarios.

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0. \quad [215]$$

Ecuación del impulso:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad [216]$$

(151) K. POHLHAUSEN: *Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Reibungsschicht*, ZAMM, 1921, págs. 252-68.

(152) Ver S. GOLDSTEIN, 1953, citado en la página 1. Se supone también aquí que el segundo coeficiente de viscosidad μ' es nulo.

donde el último término no puede escribirse ahora en la forma $v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, porque la viscosidad del gas varía mucho con la temperatura y ésta puede variar también mucho en el interior de la capa límite, a causa de la disipación viscosa de la energía.

Para calcular la variación de la temperatura, hay que recurrir a la ecuación de la energía, la cual, si se trata, como supondremos, de un gas perfecto, se obtiene a partir de [6], por el mismo procedimiento que las anteriores y resulta ser

$$u \frac{\partial (C_p T)}{\partial x} + v \frac{\partial (C_p T)}{\partial y} - \frac{u}{\rho} \frac{d p}{d x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad [217]$$

Por último, existe la ecuación de estado, que en el caso de un gas perfecto se reduce a [23],

$$\frac{p}{\rho} = R T$$

En cuanto a las condiciones de contorno, para u, v subsisten las mismas que se enunciaron en el caso de un fluido incompresible.

Por lo que respecta a la temperatura T , si la pared $y = 0$ es adiabática, la condición será de transferencia nula de calor, es decir:

Pared adiabática:

$$y = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad [218]$$

mientras que si lo que se da es la temperatura T_p de aquella, la condición será:

Pared no adiabática:

$$y = 0 \quad T = T_p(x). \quad [219]$$

Asimismo, en el límite exterior, la temperatura debe ser, en cualquier caso, la de la corriente exterior:

$$y \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow T_\infty(x), \quad [220]$$

la cual se relaciona con la velocidad $U(x)$ mediante la ecuación de Bernoulli [30] que si es $C_p = \text{const.}$ (153), se reduce a

$$C_p T_e + \frac{1}{2} U^2 = C_p T_{e0}, \quad [221]$$

siendo T_{e0} la temperatura de remanso de aquella corriente.

A la vista de este sistema diferencial, es evidente que la compresibilidad complica de modo fundamental el problema de la capa límite, esencialmente a causa del acoplamiento entre los fenómenos mecánicos y termodinámicos tan característicos de la Dinámica de Gases, el cual aumenta, tanto el número de ecuaciones diferenciales del sistema como la no linealidad de las mismas.

Como resulta imposible extenderse aquí en el desarrollo de las soluciones de este problema, remitimos al lector, una vez más, a la bibliografía (154), limitándonos a señalar aquellas analogías y diferencias más significativas entre este caso y el de los fluidos incompresibles que hemos analizado anteriormente.

En este aspecto mecánico, el comportamiento de los perfiles de velocidad, coeficientes de rozamiento, etc., es similar en ambos casos, si bien la compresibilidad tiende a aumentar el espesor de la capa límite. Por ejemplo, en el caso de una pared adiabática, el espesor se duplica al hacerlo el número de Mach.

La determinación de las condiciones que permiten reducir la solución de una capa límite compresible a otra incompresible, mediante una transformación adecuada, es del mayor interés, habida cuenta de la dificultad del caso compresible y del archivo de resultados disponible para el incompresible.

La cuestión ha sido analizada, por ello, entre otros, por Crocco, Howarth, Stewartson e Illingworth, quienes han demostrado que cualquier caso compresible, para un número de Prandtl unidad y con pared adiabática, puede reducirse a otro incompresible (155).

(153) Lo que ocurre mientras no varíe la composición del gas o se exciten grados de libertad internos.

(154) Un excelente trabajo de revisión hasta 1950, que incluye todo lo esencial para el entendimiento de la cuestión, se debe a G. KUERTI: *The Laminar Boundary Layer in Compressible Flow*. «Advances in Applied Mechanics», vol. II, Acad. Press., Nueva York, 1951, págs. 21-92.

(155) Ver L. HOWARTH, ya citado, págs. 236 y sigts.

Por otra parte, si el movimiento es supersónico y se forman ondas de choque (156), éstas producen un incremento muy rápido de presión en la dirección de la corriente, el cual, al penetrar en la capa límite, puede dar lugar a una nueva causa de desprendimiento de aquélla.

Pero las principales diferencias de comportamiento, en el caso de la compresibilidad, se deben, como se ha dicho, al calentamiento del gas producido por la disipación en el seno de la capa límite.

El parámetro de semejanza dinámica más importante para el análisis de estos fenómenos, como ya se adelantó en el número e) del epigrafe 2, es el número de Prandtl

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} \quad [222]$$

cuyo verdadero significado puede apreciarse plenamente si se introduce la temperatura T_0 de remanso isentrópico (157)

$$T_0 = T + \frac{1}{2} \frac{U^2}{C_p} \quad [223]$$

en la ecuación de la energía y se supone, además, que C_p y Pr son constantes (158), en cuyo caso se obtiene, al combinarla con la del impulso:

$$u \frac{\partial T_0}{\partial x} + v \frac{\partial T_0}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\mu T_0)}{\partial y} + \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad [224]$$

Por consiguiente, si el número de Prandtl es igual a la unidad (159) $Pr = 1$ se anula el último término de [224] y una integral primera del sistema de la capa límite es entonces, evidentemente:

$$T_0 \equiv T + \frac{1}{2} \frac{U^2}{C_p} = \text{const.} = T_{e,0}. \quad [225]$$

(156) Ver epigrafe 16.

(157) La cual es, en general, variable de un punto a otro, puesto que en el seno de la capa límite el movimiento no es isentrópico.

(158) Hipótesis que representa una buena aproximación, como enseña la teoría cinética de gases. Ver, por ejemplo, capítulo IV, más adelante.

(159) Por ejemplo, en el aire, $Pr \approx 0,715$, y además es sensiblemente constante.

donde la constante está determinada por las condiciones de la corriente exterior y la temperatura T_p de la pared es también T_{eo} . Además, el flujo de calor a través de ella es nulo, al ser allí $u = 0$. Es decir, en este caso se cumple la doble condición:

$$y = 0, \quad T_p = T_o = T_{eo}, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad [226]$$

Ello permite calcular el calentamiento de una pared adiabática debido a la acción de la viscosidad, el cual resulta ser, habida cuenta de [226]:

$$\frac{T_p}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2. \quad [227]$$

Por ejemplo, en el aire, para una velocidad doble de la del sonido, la temperatura absoluta de la pared se incrementa en un 8% por 100 respecto de la T_e de la corriente libre.

Las conclusiones anteriores son válidas cualquiera que sea la distribución de la velocidad y , consiguientemente, de la presión y temperatura de la corriente exterior, sin más requerimientos que el de que el número de Prandtl sea igual a la unidad y la pared sea adiabática.

Otra integral primera para $Pr = 1$, limitada al caso de una corriente exterior uniforme (placa plana; $T_e = \text{cte}$) y a una temperatura de la pared también uniforme ($T_p = \text{cte}$), pero no la adiabática ($(\frac{\partial T}{\partial y})_{y=0} \neq 0$) es la siguiente, debida a Crocco:

$$T_o \equiv T + \frac{1}{2} \frac{U^2}{C_p} = \alpha U + T_p, \quad [228]$$

la cual proporciona soluciones con escape de calor a través de la pared (pared refrigerada) si es $T_p < T_{eo}$, en cuyo caso los perfiles de temperatura presentan un máximo en el seno de la capa límite, o bien con flujo de calor desde la pared hacia el gas, si es $T_p > T_{eo}$.

Por último, hay que advertir que si el calentamiento del gas es muy grande, como ocurre para velocidades hipersónicas, se pueden producir en el seno de la capa límite fenómenos de disociación, reacciones químicas entre las especies que lo forman, ionización y transferencia de energía, todo lo cual se complica enormemente la cues-

tión, como veremos, por ejemplo, en el Cap. IV al estudiar las ondas de choque, donde también las elevaciones de temperatura que se producen dan lugar, en ocasiones, a fenómenos de esta naturaleza.

Es claro que estos fenómenos de calentamiento de los movimientos supersónicos e hipersónicos plantean algunos de los problemas de más difícil solución en la moderna Tecnología Aeroespacial (160).

El éxito realmente espectacular de la Teoría de la Capa Límite ha motivado que el esfuerzo para su desarrollo se haya centrado durante más de medio siglo en el estudio de los procesos cada vez más complejos, así como en la puesta a punto y perfeccionamiento de los métodos de cálculo necesarios para su tratamiento, descuidando, en cambio, el análisis de los fundamentos matemáticos de una Teoría a la que llegó Prandtl por procedimientos heurísticos y cuya justificación rigurosa quedaba pendiente, por tanto, del resultado final de dicho análisis.

Aun cuando esta cuestión no se halla todavía enteramente despejada, se han efectuado progresos muy grandes durante los últimos veinte años en torno a temas tan fundamentales como la existencia y unicidad de las soluciones del sistema diferencial formado por las ecuaciones y condiciones de contorno de la capa límite, la convergencia y estabilidad de los métodos numéricos de integración, la acotación de errores, etc.

Uno de los instrumentos que más han contribuido al cambio operado durante los últimos años en el esclarecimiento de estas cuestiones, ha sido la aplicación llevada a cabo por Nickel (161) de la Teoría de las Inecuaciones Diferenciales Parabólicas al problema de la capa límite.

Otra cuestión igualmente básica es la de determinar en qué medida las ecuaciones de Prandtl son aproximaciones asintóticas de las de Navier-Stokes para valores muy grandes del número de Reynolds R_* , o bien muy pequeños de la viscosidad cinemática ν , así

(160) A título de ejemplo de uno de los más característicos, el del calentamiento de una cápsula espacial en su retorno a la tierra, ver lo que se dice en el epígrafe 20.

(161) Un reciente trabajo de revisión, en el que se hallará toda la bibliografía pertinente, es el de K. NICKEL: *Prandtl's Boundary-Layer Theory from the Viewpoint of a Mathematician*. «An. Rev. Fluid. Mech.», 1973, págs. 405-428.

como su relación con las de Euler que corresponden a un fluido de viscosidad nula.

También aquí, haciendo uso de la Teoría de las Inecuaciones Diferenciales, ha podido demostrarse (162) que, bajo condiciones muy generales, la solución del sistema diferencial de Prandtl converge «uniformemente», para $\nu \rightarrow 0$, hacia la solución correspondiente del de Navier-Stokes, en todo el espacio.

Asimismo se ha visto que converge también hacia la del sistema de Euler, si bien, en este caso, la convergencia no puede ser uniforme, puesto que la condición de contorno sobre la pared $y = 0$ es, evidentemente, distinta en los sistemas de Prandtl y de Euler.

Por último, si el sistema diferencial de la capa límite es una aproximación asintótica al de Navier-Stokes, se plantea la cuestión de calcular aproximaciones de orden superior.

Se trata, en este caso, de un problema difícil, cuyo interés está lejos de ser puramente académico en tales casos como el de los movimientos hipersónicos a que se alude en el epígrafe.

El esclarecimiento y la correcta formulación y tratamiento de este problema ha sido también objeto de especial atención y esfuerzo durante los últimos años, lo que ha permitido obtener soluciones satisfactorias para la aproximación de segundo orden en un gran número de casos.

La sistematización de este problema, de otro modo difícil de tratar, se consigue mediante la aplicación del moderno Método de los Desarrollos Asintóticos Acoplados puesto a punto por van Dyke (163) y otros para el tratamiento de problemas de perturbaciones singulares, del que el de la capa límite constituye un ejemplo especialmente representativo.

La primera aproximación, que corresponde al sistema de Prandtl, no es lineal, como se ha visto, pero todas las de orden superior sí lo son, lo cual permite separar las influencias de los diversos efectos, tales como los de las curvaturas longitudinal y transversal de la

(162) Ver el trabajo de NICKEL ya citado.

(63) M. VAN DYKE, ya editado, así como J. D. COLE: *Perturbation Methods in Appl. Math.* Blaisdell Publ. Co., 1968. Para una formulación estrictamente matemática del problema, ver W. ECKHAUS: *Matched Asymptotic Expansions and Singular Perturbations*. Holland Publ. Co. Amsterdam, 1973. Ver también, en relación con este punto, R. B. DINGLE: *Asymptotics Expansions: Their Derivation and Interpretation*. Acad. Press, Nueva York, 1973.

superficie del obstáculo; el del espesor de desplazamiento de la capa límite, equivalente a una modificación del contorno del obstáculo para el cálculo de la corriente exterior y otros.

El desarrollo y tratamiento de la segunda aproximación es muy laboriosa, por lo que nos limitaremos a remitir a la bibliografía especializada sobre la materia (164).

II. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD HIDRODINÁMICA

Para que una solución del sistema diferencial de la Dinámica de Fluidos tenga significación real, no basta que satisfaga a las ecuaciones del movimiento y cumpla las condiciones iniciales y de contorno que corresponden al caso en estudio.

Es preciso, además, efectivamente, que dicha solución sea «dinámicamente estable», es decir, que las pequeñas perturbaciones que puedan producirse en las diversas magnitudes del movimiento, las cuales existen siempre en la realidad por multitud de causas, tiendan a amortiguarse al crecer el tiempo (165).

El análisis de la estabilidad de los movimientos fluidos plantea un problema sumamente complejo, incluso en un tratamiento lineal del mismo, del que tendremos ocasión de ver algunos ejemplos de especial interés en los Capítulos V y VI, al estudiar las causas de inestabilidad de las ondas de detonación y de las llamadas laminas premezcladas.

Por ello nos limitaremos aquí a recordar brevemente los fundamentos del método de tratamiento de este problema y algunos de sus resultados más importantes (166), que ilustraremos con su aplicación al caso de la capa límite.

En su tratamiento lineal, la formulación del problema consiste, como es bien sabido, en superponer a las diversas magnitudes, p , ρ ,

(164) M. VAN DYKE: *Higher-Order Boundary Layer Theory*. «An. Rev. Fluid Mech.», 1969, págs. 285-92.

(165) No se trata aquí, por tanto, de la «estabilidad matemática» que se requiere para que el problema esté «bien puesto», es decir, de la estabilidad de la solución respecto de pequeñas perturbaciones en los valores de los parámetros del sistema o en las condiciones iniciales y en los límites.

(166) Una excelente monografía sobre la cuestión es la debida a C. C. LIN: *The Theory of Hydrodynamic Stability*. Cambridge Univ. Press., 1955.

$T, \mathbf{v}$ de la solución que llamaremos «principal» y cuya estabilidad se va a investigar, la cual supondremos estacionaria, es decir, independiente del tiempo t , pequeñas perturbaciones $p'(\mathbf{x}, t)$; $\rho'(\mathbf{x}, t)$; $T'(\mathbf{x}, t)$; $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t)$ e introducir las magnitudes $p + p'$, etc., así perturbadas, en el sistema de ecuaciones del movimiento y en las condiciones en los límites, ya que las magnitudes perturbadas deben satisfacer también, evidentemente, tanto las ecuaciones diferenciales como las condiciones de contorno del problema.

Puesto que las perturbaciones se suponen pequeñas respecto de los valores de la solución principal, se procede entonces a una linealización de las ecuaciones y condiciones de contorno, incluida la ecuación de estado. Al retener tan solo los términos de primer orden (167), se obtiene un sistema lineal de ecuaciones en derivadas parciales para la determinación de p' , etc., cuyos coeficientes dependen de la posición $\mathbf{x}$ a través de las magnitudes p , etc., de la solución principal:

$$L_i(p', \rho', T', \mathbf{v}') = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad [229]$$

Ahora bien, como se comprueba fácilmente a la vista de las ecuaciones de Navier-Stokes, el sistema diferencial [229], que así se obtiene para el cálculo de las magnitudes perturbadas, depende del tiempo t solamente a través de las derivadas parciales $\frac{\partial}{\partial t}$

Por ello, si es $f_i(\mathbf{x}, t)$ una cualquiera de tales magnitudes $p'(\mathbf{x}, t)$, etcétera, la solución correspondiente a [229] puede expresarse en la forma:

$$f_i(\mathbf{x}, t) = e^{i\omega t} \cdot f_i^\omega(\mathbf{x}), \quad [230]$$

donde ω es una frecuencia compleja

$$\omega = \omega_r + i \cdot \omega_i \quad [231]$$

y $f_i^\omega(\mathbf{x})$ es la amplitud ligada a la misma para la perturbación f_i .

Al introducir ahora las expresiones [230] en el sistema [229], se

(167) Para una justificación más detallada de este proceso ver, por ejemplo, la monografía de LIN, pág. 8. Ver, también, la obra de A. S. MONIN y A. M. YAGLOM *Statistical Fluid Mechanics*, MIT Press, Cambridge Mass., 1971, a la que se hará permanente apelación en este epígrafe y en el siguiente.

obtiene un sistema diferencial lineal homogéneo de ecuaciones en derivadas parciales para el cálculo de las amplitudes $f_i^\omega(\mathbf{x})$, cuyos coeficientes, como los de [161], dependen de $\mathbf{x}$ a través de los valores de las diversas magnitudes en la solución principal, así como de la frecuencia compleja ω .

Por otra parte, las amplitudes $f_i^\omega(\mathbf{x})$ deben satisfacer, como es natural, las condiciones de contorno propias del movimiento cuya estabilidad se estudia, las cuales se comprueba que también son homogéneas.

Por consiguiente, como es característico de la Teoría de la Estabilidad, se está en presencia de un problema de valores propios, el cual posee soluciones no idénticamente nulas tan solo para el conjunto discreto y continuo de los valores propios de la frecuencia, los cuales son raíces de una ecuación «secular» de la forma

$$E(\omega; R_e, M, \text{etc.}) = 0. \quad [232]$$

En ella, el número de Reynolds R_e , el de Mach M , etc., son, respectivamente, los correspondientes al movimiento en estudio, los cuales se hacen explícitos en el sistema diferencial [229], al expresar éste en forma adimensional, como se hizo, por ejemplo, en la Teoría de la Semejanza Dinámica del epígrafe 2.

Por último, si la parte imaginaria ω_i de las raíces de la ecuación [232] es positiva, la solución del sistema [229] correspondiente a ese valor de ω , es una perturbación que, en virtud de [230], tiende a cero para $t \rightarrow \infty$, con lo que el movimiento resulta ser estable para perturbaciones de la citada frecuencia e inestable en caso contrario.

Ahora bien, si el sistema de funciones de amplitud $f_i^\omega(\mathbf{x})$ es completo, como suele ocurrir (168), resulta posible expresar cualquier perturbación inicial arbitraria $f_i(\mathbf{x}, t)$ mediante una combinación lineal de soluciones propias [230] y analizar, por tanto, el comportamiento de la solución principal respecto de toda perturbación inicial compatible con las condiciones de contorno, es decir, estudiar la estabilidad dinámica del movimiento a través del comportamiento del sistema respecto de las frecuencias propias del mismo.

Para terminar, debe señalarse que si la solución principal es independiente de alguna coordenada espacial, por ejemplo, de x_1 , enton-

(168) Para una discusión más detallada de este punto ver, por ejemplo, la obra de MONIN y YAGLOM, ya citada, págs. 92 y sigts.

ces puede procederse respecto de ella como se ha hecho con el tiempo, expresando la amplitud $f_i^\omega(\mathbf{x})$ en la forma

$$f_i^\omega(\mathbf{x}) = e^{ik_1 x_1} \cdot f_i^{\omega, k_1}(x_2, x_3), \quad [233]$$

lo que permite reducir el número de ecuaciones en tantas unidades como coordenadas x_j cumplan la condición anterior.

En tal caso, el parámetro k_1 , cuya parte real mide el número de onda de la oscilación en la dirección x_1 representada por [233], aparece, también, evidentemente, en la ecuación secular [232] que determina las frecuencias complejas propias de ese número de onda, las cuales varían al hacerlo k_1 .

En muchos casos de interés tecnológico, tales como los movimientos en el interior de conductos, en capas límites, chorros, etc., la ecuación secular permite definir un número de Reynolds crítico R_{cr} , por debajo del cual el movimiento laminar resulta estable, mientras que es inestable para valores de R , mayores que R_{cr} .

Cuestión más difícil es la de determinar la configuración final del proceso en el caso de inestabilidad, porque ello obliga a considerar aspectos no lineales del problema, sobre los que se dirá algo al tratar de la estabilidad de las ondas de combustión.

Aquí bastará con decir que, en muchos casos, se produce el tránsito al régimen turbulento, cuyo análisis hay que efectuar mediante la aplicación de los instrumentos propios de esta Teoría, a la que se aludió en el epígrafe 1.

Por último, desde el punto de vista físico tiene gran interés esclarecer los mecanismos de amortiguación o ampliación de las perturbaciones que determinan el carácter estable o no de cada movimiento, es decir, los mecanismos que producen las transferencias de energía entre el movimiento principal y el de perturbación, así como su disipación final, para lo cual remitimos a la bibliografía citada, limitándonos a señalar que, en algunos casos, la viscosidad puede actuar como factor desestabilizador, contrariamente a lo que cabría imaginar a primera vista.

El primer ejemplo del análisis cuantitativo de un problema de estabilidad hidrodinámica data de 1868, se debe a Helmholtz y corresponde al caso de una superficie de discontinuidad tangencial, como las que se estudiaron en la figura I-2. Tales superficies resultan ines-

tables para todas las frecuencias, como se comprueba fácilmente (169). Se trata de la llamada «inestabilidad de Helmholtz».

Con posterioridad se han estudiado otros muchos casos de complejidad creciente, cuyas referencias y desarrollos se encuentran en la bibliografía citada. Por nuestra parte, para terminar nos limitaremos, como hemos dicho, a resumir los fundamentos de la teoría de la estabilidad de la capa límite. Se trata de un caso de especial interés, que constituye un ejemplo muy representativo y de la mayor importancia, en numerosas aplicaciones tecnológicas, lo que ha motivado que haya sido objeto de investigaciones teóricas y experimentales muy completas, desde hace medio siglo (170).

Consideraremos para su análisis el ejemplo más sencillo posible, de una corriente «deslizante» de un fluido incomprensible como el que ilustra la figura I-9, a), en donde la única componente no nula de la velocidad del movimiento principal es $u(y)$, porque se puede demostrar que el más general de la capa límite bidimensional se reduce a él.

Si suponemos, además, que los movimientos de perturbación son bidimensionales (171), entonces las ecuaciones de perturbaciones [229] que resultan de aplicar el procedimiento de linealización que acabamos de exponer al sistema de [123] y [124] de la capa límite, se reducen a las tres siguientes, para la presión $p'(x, y, t)$ y para las dos componentes $u'(x, y, t)$, $v'(x, y, t)$ de la velocidad de perturbación:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + u(y) \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{du}{dy} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} \right) \quad [234]$$

(169) Ver, por ejemplo, LAMB, citado en las referencias de la introducción, epígrafe 232. También BIRKHOFF: *Helmholtz and Taylor Instability*. «Proc. Symp. Appl. Math.», núm. 13, 1962, págs. 55-76.

(170) Para una exposición más completa de la cuestión, en sus aspectos teórico y experimental, así como su desarrollo histórico, que arranca en 1920 con las investigaciones de Tollmien, ver la obra de SCHLICHTING, ya citada.

(171) También se demuestra que la influencia de la tercera coordenada es estabilizadora, es decir, que el número de Reynolds crítico de las perturbaciones tridimensionales es mayor que el de las bidimensionales, por lo que éstas son las que determinan el umbral de inestabilidad.

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + u(y) \frac{\partial v'}{\partial x} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} \right) \quad [235]$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0, \quad [236]$$

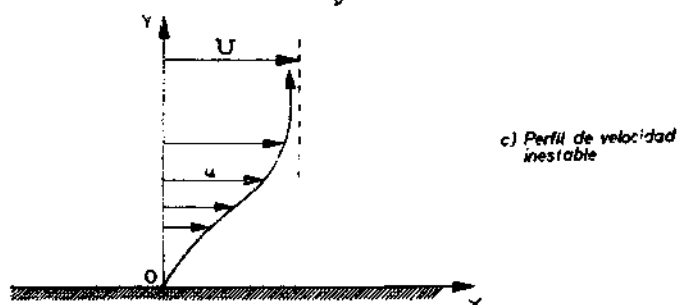
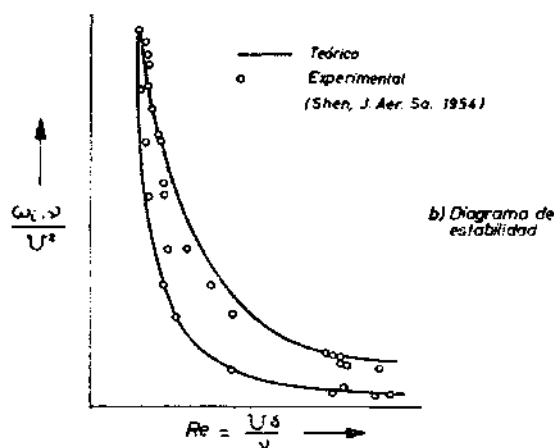
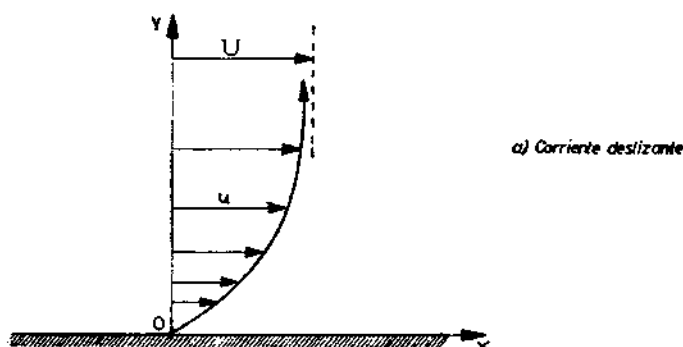


Fig. I-9.—Estabilidad de la capa límite.

cuyas soluciones deben de cumplir las siguientes condiciones en los límites:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{sobre la pared} & y = 0 : u' = v' = 0 \\ \text{en la corriente exterior} & y \rightarrow \infty : u', v', p' \rightarrow \infty \end{array} \right\} \quad [237]$$

a las que habría de agregarse la perturbación inicial $u'(x, y, 0)$; $v'(x, y, 0)$ cuya evolución se desea investigar.

Como se vio en el epígrafe 7, la ecuación de continuidad [236] asegura la existencia de una función de corriente $\psi(x, y, t)$ tal que

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v' = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad [238]$$

la cual debe satisfacer la ecuación diferencial que resulta de introducir estas expresiones en las ecuaciones [234] y [235] y de eliminar la presión p' entre ambas.

Por otra parte, puesto que los coeficientes del sistema del movimiento no dependen de x , se ha visto en [233] que la función ψ puede expresarse, en la forma:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) \cdot e^{i(kx + \omega t)}, \quad [239]$$

con lo que se obtiene para la amplitud $\varphi(y)$ la siguiente ecuación diferencial ordinaria, de cuarto grado:

$$\left(u(y) + \frac{\omega}{k} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - k^2 \varphi \right) - \frac{d^2 u}{dy^2} \cdot \varphi = - \frac{i}{k \cdot R_s} \left(\frac{d^4 \varphi}{dy^4} - 2k^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + k^4 \varphi \right) \quad [240]$$

en donde k ha de ser real para que la velocidad permanezca acotada en $x \rightarrow \pm \infty$ y $R_s = \frac{\rho U \delta}{\mu}$ es el número de Reynolds que resulta de referir las velocidades a la U de la corriente exterior y las longitudes al espesor δ de la capa límite.

En cuanto a las condiciones en los límites, son las siguientes, en virtud de [237] y [238]

$$\left. \begin{aligned} y = 0 : \varphi = 0 \quad \frac{d\varphi}{dy} &= 0; \\ y \rightarrow \infty : \varphi \rightarrow 0 \quad \frac{d\varphi}{dy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad [241]$$

La expresión [240] es la célebre «ecuación de Orr-Sommerfeld» (172), cuyas propiedades de integración aproximada, por procedimientos tanto analíticos como numéricos, han sido objeto de un tratamiento exhaustivo (173), al mismo tiempo que se extendía su aplicación a otros ejemplos de movimientos deslizantes y al caso de fluidos compresibles.

En particular, si se hace $R_e \rightarrow \infty$, la ecuación de Orr-Sommerfeld se reduce a su primer miembro

$$\left(u(y) + \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2\varphi}{dy^2} - k^2\varphi\right) - \frac{d^2u}{dy^2} \cdot \varphi = 0. \quad [242]$$

Se trata de la ecuación llamada de Rayleigh, detenidamente estudiada por este autor a partir de 1880 y cuyas soluciones proporcionan la condición de estabilidad en ausencia de viscosidad.

Esta simplificación permite una importante facilitación del problema, pero es a costa de una reducción en el orden de la ecuación, lo cual obliga a reducir consecuentemente el número de las condiciones de contorno que pueden imponerse e impide determinar el número de Reynolds crítico, puesto que este parámetro ha desaparecido de la ecuación [242].

Dado un perfil de velocidades $u(y)$ de la corriente principal en

(172) W. M. ORR: *The Stability or Instability of the Steady Motions of a Liquid*. «Proc. Roy. Irish Acad.», 1906, págs. 9-27; 1907, págs. 69-133; A. SOMMERFELD: *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen*. «Atti. 4 Congr. Int. Mat.», 1908, vol. III, págs. 116-24.

(173) Ver, por ejemplo, W. H. REID: *The Stability of Parallel Flows*. «Basic Devel. Fluid Dyn.», vol. I, ed. por M. Holt. Acad. Press, Nueva York, 1965, págs. 249-307, así como MONIN y YAGLOV, ya citado, págs. 111 y sigts. También R. BETCHOV y W. O. CRIMINALI: *Stability of Parallel Flows*. Acad. Press, Nueva York, 1967.

la capa límite, la solución no nula de la ecuación [240] correspondiente a una longitud de onda $l = \frac{2\pi\delta}{k}$ que satisfaga, además, las condiciones en los límites [241], proporciona la distribución $\varphi(y)$ de amplitudes para esa oscilación, así como el valor ω de su frecuencia propia. Esta es, evidentemente, la función del número de onda k y del número de Reynolds R_e de la corriente principal:

$$\omega = \omega(k, R_e) \quad [243]$$

y el signo de la parte imaginaria ω_i de esta frecuencia compleja determina la estabilidad o no, con respecto a las perturbaciones de aquella longitud de onda, lo que permite trazar un diagrama como el de la figura I-9, b) para cada perfil de velocidades $u(y)$.

En él, $R_{e,c}$ es el número de Reynolds crítico, puesto que si es $R_e < R_{e,c}$ la capa límite resulta estable para las perturbaciones de todas las longitudes de onda.

Se ha visto que la índole de las soluciones de la ecuación de Orr-Sommerfeld depende del perfil $u(y)$ de velocidades en el seno de la capa límite y del espesor δ de ésta, que fija el valor del número de Reynolds R_e .

Es, por tanto, a través de ambos elementos como interviene en el problema de la estabilidad la configuración local de la capa límite.

Por ejemplo, se comprueba que los perfiles $u(y)$ con un punto de inflexión como el que muestra la figura I-9, c) los cuales, según se vio en el epígrafe precedente corresponden a capas límites con gradientes de presión crecientes en el sentido de la corriente, resultan intrínsecamente inestables.

Para terminar, hay que decir que los resultados de esta Teoría recibieron la más plena confirmación experimental en observaciones llevadas a cabo con gran minuciosidad, en 1947, por Schubauer y Skramstad (174), del National Bureau of Standards de los Estados Unidos, dando con ello un paso fundamental en el esclarecimiento definitivo de uno de los problemas más importantes y complejos de la Teoría de la Capa Límite.

Por ejemplo, la comprensión del fenómeno permitió dar soluciones prácticas al problema de la «laminarización» de los aviones, con

(174) G. B. SCHUBAUER y H. K. SKRAMSTAD: *Laminar Boundary-Layer Oscillations and Stability of Laminar Flow*. «Journ. Aer. Sci.», 1947, págs. 69-78.

objeto de reducir su resistencia de rozamiento, idea de la que se hizo uso extenso durante los años de la segunda guerra mundial (175).

Uno de los instrumentos empleados para ello fue el de utilizar perfiles sustentadores cuya distribución de presiones diese lugar a perfiles laminares estables en el seno de la capa límite, eludiendo para ello los gradientes de presión positivos sobre casi todo el perfil.

Otra técnica, de la que se ha hecho también uso frecuente con propósitos similares, es la de la «succión» de la capa límite, para reducir su espesor (176).

12. CAPAS LÍMITES TURBULENTAS

Puesto que el espesor δ de la capa límite crece, en general, al trasladarse a lo largo de la misma en el sentido de la corriente exterior, como ilustra la figura I-4, en muchos casos se alcanzará un punto a partir del cual será $R_c \equiv \rho \frac{U \delta}{\mu} > R_{cr}$ y la capa límite laminar se hará inestable.

En tales circunstancias, las pequeñas perturbaciones que, como se ha dicho, siempre están presentes en la realidad, tienden a amplificarse, dando lugar a la formación de una zona de tránsito en el seno de la capa límite, en la que se produce el paso del régimen laminar al turbulento.

El estudio matemático del proceso completo de este tránsito es prácticamente imposible, a causa de su naturaleza esencialmente no lineal, por lo que, hasta el momento, ha debido limitarse al análisis de las primeras etapas del mismo (177), las cuales, unidas a los resultados de las observaciones experimentales (178), han permitido establecer la secuencia de los fenómenos que tienen lugar en la zona de transición.

(175) Ver, por ejemplo, SCHLICHTING, ya citado, págs. 479 y sigts.

(176) Ver, por ejemplo, G. V. LACHMANN: *The Case for Laminarization*. Selected Papers on Engineering Mechanics. Von Karman Tribute Volume. Butterworths Scientific Publ. Londres, 1955, págs. 142-86.

(177) D. J. BENNEY: *A nonlinear Theory for Oscillations in a Parallel Flow*. «J. Fluid Mech.», 1961, págs. 209-30, y *Finite-Amplitude Effects in an unstable Laminar Boundary Layer*. «Phys. Fluids», 1964, págs. 319-26.

(178) Ver el trabajo de revisión con abundante bibliografía de I. TANT: *Boundary-Layer Transition*. «An. Rev. Fluid. Mech.», 1969, págs. 109-96.

Así, ha podido comprobarse que el proceso empieza por el rápido desarrollo de oscilaciones transversales que transforman el movimiento de perturbación inicialmente bidimensional en otro fuertemente tridimensional. Sigue la ampliación no lineal de estas oscilaciones; la aparición de sistemas de torbellinos en el sentido de la corriente; el desarrollo de una capa de deslizamiento muy fuerte; la generación de fluctuaciones de alta frecuencia y, por último, la aparición de «focos» turbulentos distribuidos aleatoriamente, cuyo crecimiento y coalescencia conducen al régimen turbulento plenamente establecido (179).

La capa límite turbulenta se caracteriza por un crecimiento brusco de su espesor con respecto al de la zona laminar que le precede y por una gran intensificación de los procesos de transporte que tienen lugar en su seno, lo que determina que la resistencia de rozamiento y transferencia de calor a la pared, por ejemplo, sean mucho mayores que el régimen laminar.

Para poder llevar a cabo el estudio de su estructura, hay que empezar por establecer el sistema de ecuaciones que sustituyen en el régimen turbulento a las de Navier-Stokes que se utilizaron para el análisis de los procesos laminares.

Pues si bien el sistema de Navier-Stokes sigue siendo el que gobierna los movimientos del fluido también en el régimen turbulento, dicho sistema no sirve para describir los aspectos que interesan en este tipo de movimientos, los cuales tienen que expresarse mediante magnitudes de naturaleza estadística, a causa del carácter aleatorio de las «fluctuaciones» de las diversas variables que es propio de todo proceso turbulento.

Como ya se indicó en el epígrafe 1, fue Reynolds quien primero reconoció este carácter aleatorio de los movimientos turbulentos y formuló el sistema de ecuaciones que permite su estudio, al expresar cada una de las variables f_i del movimiento, tales como la presión, las tres componentes de la velocidad, etc., como suma de un valor medio $\bar{f}_i$ y de una fluctuación instantánea f'_i (180):

$$f_i(\mathbf{x}, t) = \bar{f}_i(\mathbf{x}, t) + f'_i(\mathbf{x}, t), \quad [244]$$

(179) Para un estudio más detallado del contenido de este epígrafe, ver la reciente obra de T. CEBECI y A. M. O. SMITH: *Analysis of Turbulent Boundary Layers*, Acad. Press, Nueva York, 1974.

(180) Siguiendo la notación habitual, el promedio se indica con una barra sobre la variable.

en donde, por definición, el promedio de f'_i debe ser nulo:

$$\overline{f'_i}(x, t) = 0. \quad [245]$$

Reynolds supuso que el promedio se toma en cada punto con respecto al tiempo, en un intervalo de duración suficiente para que su valor $\overline{f_i}$ resulte estable con respecto a las fluctuaciones.

Posteriormente, Kampé de Fériet en Francia y Kolmogorov en Rusia, introdujeron en el estudio de la turbulencia los conceptos de la Teoría Estadística (181), considerando las magnitudes fluidas como campos aleatorios para los que se define un sistema de densidades de probabilidades multidimensionales combinadas, las cuales es necesario relacionar con los promedios espaciales y temporales que se obtienen en las observaciones experimentales, lo que se consigue mediante «hipótesis o teoremas de ergodicidad», similares a los que se utilizan en la Mecánica Estadística (182).

Para hacer aplicación de estos conceptos a la Teoría de la Turbulencia, es necesario, en primer lugar, establecer las reglas operativas que debe de satisfacer el cálculo de dichos promedios estadísticos.

$$\left. \begin{aligned} \overline{\overline{f_i}} &= \overline{f_i} \\ \overline{f_i + f_j} &= \overline{f_i} + \overline{f_j} \\ \overline{\overline{f_i} \cdot f_j} &= \overline{f_i} \cdot \overline{f_j} \\ \frac{\partial \overline{f_i}}{\partial s} &= \overline{\frac{\partial f_i}{\partial s}} \\ \overline{\int f_i \cdot ds} &= \int \overline{f_i} \cdot ds \end{aligned} \right\} \quad [246]$$

en donde f_i, f_j son funciones del campo aleatorio y S es una cualquiera de las variables x_i, t .

Veamos ahora cómo se hace aplicación de todo ello a la obtención del sistema de ecuaciones de los movimientos turbulentos.

(181) Ver, por ejemplo, J. KAMPÉ DE FÉRIET: *Problèmes Mathématiques Posés par la Mécanique Statistique de la Turbulence*, Proc. Intern. Congress Math. Amsterdam, 1954, North. Holland Publ. Co., 1956.

(182) Ver, por ejemplo, A. I. KHINCHIN: *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics*, Trad. del ruso por G. Gamov. Dover Publ. Inc., Nueva York, 1956.

Tales reglas, llamadas generalmente «condiciones de Reynolds» son las siguientes, cuya interpretación resulta inmediata:

Para ello y puesto que en el Capítulo VI, al estudiar las llamas turbulentas, pondremos de manifiesto la influencia de las variaciones de densidad, temperatura y composición, nos limitaremos aquí, por brevedad, al movimiento de un fluido incompresible, cuyo coeficiente de viscosidad cumple la condición de Stokes ($\mu' = 0$) y en ausencia de fuerzas másicas, en cuyo caso el sistema [1] y [2] de Navier-Stokes que se dio en el epígrafe 1, se reduce al conjunto de las cuatro ecuaciones siguientes (183):

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0; \quad [247]$$

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho \cdot v_j \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right), \quad i = 1, 2, 3, \quad [248]$$

para el cálculo de la presión p y de las tres componentes v_i de la velocidad.

Al expresar en este sistema cada una de las cuatro magnitudes fluidas en la forma [244] y calcular el promedio estadístico del mismo, teniendo en cuenta las condiciones [246] de Reynolds se obtiene, en sustitución del de Navier-Stokes, el siguiente sistema de ecuaciones, llamadas de Reynolds, que gobierna el comportamiento de los promedios estadísticos de las diversas magnitudes fluidas en los movimientos turbulentos:

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad [249]$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \rho \cdot \bar{v}_j \cdot \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = & - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j^2} \right) - \\ & - \rho \frac{\partial (\overline{v_i' v_j'})}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad [250]$$

(183) Recordemos que la repetición de un subíndice indica sumación respecto del mismo.

La comparación de las ecuaciones de Reynolds con las de Navier-Stokes, muestra que ambos sistemas difieren únicamente en los términos $-\rho \frac{\partial (\overline{v'_i v'_j})}{\partial x_j}$, cuyo efecto es equivalente al de un «tensor de esfuerzos turbulentos», de componentes

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{(v'_i v'_j)}. \quad [251]$$

Como se ve, los esfuerzos turbulentos están originados por las fluctuaciones de la velocidad, en la misma forma en que los movimientos moleculares producen los esfuerzos de viscosidad en un gas.

La diferencia fundamental estriba, sin embargo, en que la Teoría Cinética proporciona los coeficientes de viscosidad que permiten expresar aquellos esfuerzos en cada punto, en función del comportamiento de las variables del movimiento en un entorno del mismo, mientras que, en las ecuaciones de Reynolds, los esfuerzos turbulentos son nuevas incógnitas que se añaden a la presión $\bar{p}$ y a las tres componentes $\bar{v}_i$ de la velocidad, haciendo con ello que este sistema de ecuaciones resulte indeterminado.

Es ésta, precisamente, la gran dificultad de la Teoría de la Turbulencia, porque todo intento de resolver la cuestión mediante la obtención de nuevas ecuaciones para el cálculo de los esfuerzos turbulentos, obliga a incorporar nuevas incógnitas al sistema, como son, por ejemplo, las covariancias de tercer orden entre las componentes de la velocidad que se obtendrían al promediar las ecuaciones de Navier-Stokes después de multiplicarlas, por ejemplo, por las componentes v_i de la velocidad, dando lugar con ello a un problema abierto, cuya solución hay que buscar mediante el descubrimiento de leyes estadísticas independientes, para el comportamiento de los procesos turbulentos (189).

En el intento de eludir esta dificultad básica, hace aproximadamente medio siglo se desarrollaron modelos de comportamiento de los movimientos turbulentos que dieron lugar a las llamadas «Teorías Semiempíricas de la Turbulencia», las cuales proporcionan expresiones plausibles de los esfuerzos de Reynolds en función de las magnitudes fluidas y de sus derivadas en el entorno de cada punto,

(184) Para una detallada discusión de esta materia, ver la obra de MONIN y YAGLOM, reiteradamente citada.

lo que permite hacer determinado e integrable, en algunos casos, el sistema de ecuaciones de Reynolds.

Con ello se obtuvieron resultados que muestran una concordancia suficientemente satisfactoria con las mediciones experimentales, por lo que algunas de aquellas teorías siguen aplicándose en la actualidad, en cálculos de ingeniería (185).

Sin embargo hoy, al disponer de observaciones experimentales más precisas, se ha podido comprobar que los esfuerzos turbulentos no dependen tan solo del comportamiento de las magnitudes medias en un entorno del punto, sino de lo que ocurre también fuera de ese entorno, por lo que los intentos recientes de completar las ecuaciones de Reynolds discurren por cauces distintos y bastante más complicados (186).

No obstante, la vigencia de aquellas Teorías para el cálculo aproximado de magnitudes tales como el perfil de velocidades en una capa límite o en el interior de un conducto, el coeficiente de rozamiento turbulento, etc., así como la imagen tan intuitiva que proporcionan los mecanismos en juego en los procesos turbulentos, justifican que nos detengamos por un momento en los fundamentos de su aplicación a algún caso de interés.

Para ello comenzaremos por señalar que tales teorías encuentran aplicación especial en el conjunto muy importante de los movimientos turbulentos llamados «deslizantes», en que una componente de la velocidad media es muy grande con respecto a las otras y su magnitud varía fuertemente en dirección transversal (187).

El ejemplo más representativo e interesante de tales movimientos es, naturalmente, el de las capas límites turbulentas, cuyas ecuaciones se obtienen a partir de las de capa laminar por el procedimiento de Reynolds o particularizando las ecuaciones de Reynolds para el caso en estudio, con lo que se obtiene el siguiente sistema, en sustitución

(185) B. E. LAUNDER y D. B. SPALDING: *Mathematical Models of Turbulence*. Acad. Press., Nueva York y Londres, 1972.

(186) Ver, por ejemplo, O. M. PHILLIPS: *Shear-Flow Turbulence*. «An. Rev. Fluid. Mech.», 1969, págs. 245-64.

(187) Un estudio general muy completo de las características de estos movimientos turbulentos es el de A. A. TOWNSEND: *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge Univ. Press., 1956.

de las ecuaciones [192] y [193], válido en el caso de un movimiento medio bidimensional y estacionario, de un fluido incompresible:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} = 0; \quad [252]$$

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{d \bar{p}}{d x} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y}, \quad [253]$$

con las condiciones de contorno

$$\left. \begin{aligned} y = 0 & : \bar{u} = \bar{v} = 0; \\ y \rightarrow \infty & : \bar{u} \rightarrow U(x); \\ x = 0 & : \bar{u}(0, y) = \bar{u}_0(y). \end{aligned} \right\} \quad [254]$$

A la vista de la ecuación [253], es claro que, solamente si se puede disponer de una expresión del esfuerzo turbulento $-\rho (\overline{u'v'})$ en función de las variables $x, y, \bar{u}, \bar{v}$ y de sus derivadas, se tendrá un sistema determinado, cuya integración, con las condiciones de contorno [254], podrá llevarse a cabo entonces, como se hizo en el caso laminar, mediante el desarrollo de los métodos apropiados.

Por ejemplo, el esfuerzo turbulento puede expresarse, como hizo Boussinesque (188) por analogía con el de viscosidad, en la forma:

$$\rho \overline{u'v'} = -\rho \sigma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \quad [255]$$

mediante un coeficiente σ de «viscosidad turbulenta», similar al de la viscosidad cinemática, con lo que el sistema anterior se hará determinado siempre que se conozca la ley de variación de σ y la cuestión consistirá, entonces, en formular hipótesis acertadas acerca del valor de este coeficiente.

En esta línea de desarrollo, Prandtl (189) introdujo el concepto del «camino de mezcla» turbulento l_m por analogía con el camino

(188) J. BOUSSINESQUE: *Théorie de l'Ecoulement Tourbillonnant et Tumultueux des Liquides dans les Lits Rectilignes a Grande Section*, Gauthier-Villars, Paris, 1897.

libre medio molecular de la Teoría Cinética, lo que le permitió expresar el coeficiente σ de Boussinesque en la forma:

$$\sigma = \mu_m \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right| \quad [256]$$

trasladando así el problema al de la determinación de l_m , longitud respecto de la cual pueden hacerse hipótesis plausibles en determinados problemas en los que exista una longitud característica con la que pueda relacionarse aquélla.

Por ejemplo, en el caso de un chorro, l_m puede relacionarse con el espesor de éste, hipótesis que proporciona resultados muy satisfactorios, como se ha podido comprobar (190).

Volviendo al sistema [252], [253] de las ecuaciones de la capa límite turbulenta, es claro que el problema fundamental consiste aquí también, como en el caso laminar, en la determinación del perfil de velocidades $\bar{u}(y)$ para cada valor de x porque, conocido éste, se puede calcular todas las magnitudes de interés.

Así, puesto que la condición de adherencia hace que sobre la pared sean nulas u', v' , también es nulo en ella el esfuerzo turbulento ($-\rho \overline{u'v'}$), con lo que el rozamiento τ_p en la pared está dado por la expresión:

$$\tau_p = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right)_{y=0} \quad [257]$$

Análogamente, el conocimiento del perfil $\bar{u}(y)$ permite calcular el espesor de la capa límite, bien sea el geométrico, el de desplazamiento $\bar{\delta}(x)$ o el de impulso $\bar{\theta}(x)$, cuyas definiciones son idénticas a las del caso laminar.

Por último, en el caso turbulento subsiste la ecuación inte-

(189) L. PRANDTL: *Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz*, ZAMM, 1925, págs. 136-39.

(190) Para una relación completa y sistemática de las fórmulas y modelos que se han propuesto hasta el momento en las diversas teorías semiempíricas de la turbulencia, junto con las referencias correspondientes, ver la obra de LAUNDER y SPALDING, citada en la página 157.

gral [213] de von Karman, la cual, en el caso estacionario que estamos considerando aquí, se reduce a la siguiente:

$$\frac{d}{dx}(U^2, \theta) + U \frac{dU}{dx} \cdot \delta = \frac{\tau_p}{\rho} \quad [258]$$

En particular, esta ecuación permite aplicar a la resolución del movimiento mediante las adaptaciones necesarias el método de Karman-Polhausen que se mencionó en el caso laminar y cuya descripción puede hallarse, por ejemplo, en la obra de Schlichting reiteradamente citada.

Constituye un notable ejemplo, digno de estudio, el esfuerzo teórico y experimental que se ha desarrollado durante muchos años para desvelar las leyes que determinan la forma de los perfiles de velocidades en los movimientos turbulentos deslizantes y la influencia que ejercen en ellos factores tales como los gradientes de presión y otros (191).

Como la descripción de tales procedimientos haría esta exposición demasiado prolija y se hallan detalladamente descritos en los tratados a que nos hemos referido, aquí nos limitaremos a indicar que, en el caso de una capa límite sobre una pared lisa, es decir, desprovista de rugosidad (192), el perfil de velocidades presenta tres zonas diferenciadas.

Una primera, en la inmediata proximidad de la pared, llamada «subcapa viscosa», en donde el esfuerzo turbulento es mucho menor que el viscoso y el perfil de velocidades es lineal $u(y) \sim y$.

Después de un breve espacio de tránsito, donde los esfuerzos viscoso y turbulento son de órdenes de magnitud comparables, existe una segunda zona, en que predomina el esfuerzo turbulento y es sensiblemente constante. En ella, el perfil de velocidades sigue una ley logarítmica de la forma $u(y) \sim \alpha \cdot L_n \left(\sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \cdot \frac{y}{\nu} \right) + \beta$, la cual

(191) Para una descripción de los diferentes métodos actualmente empleados en el cálculo de capas límites turbulentas, ver los «Proceedings» del Simposio sobre *Computation Turbulent Boundary Layers*, celebrado en la Universidad de Stanford, en 1963, donde se contiene una treintena de procedimientos diferentes.

(192) Si la pared es rugosa, hay que tomar en consideración las características que definen la rugosidad.

puede deducirse, por ejemplo, a partir de la teoría del camino de mezcla de Prandtl, suponiendo que es $l_m \sim y$.

Por último, existe una tercera zona exterior, en que únicamente actúa el esfuerzo turbulento, el cual tiende, además, a cero, como es natural, en el borde exterior de la capa límite.

Es esta zona la más difícil de tratar, incluso en el caso más sencillo de la placa plana con gradiente de presión nulo, porque, a diferencia de lo que ocurría en el régimen laminar, donde el perfil de velocidades era semejante para las diferentes secciones, lo que permitía obtener fácilmente la solución de Blasius, en el movimiento turbulento no se cumple aquella condición de semejanza que reducía el sistema de derivadas parciales a una ecuación diferencial ordinaria (193).

Para terminar con esta materia, señalaremos que, durante los últimos años, se ha producido una corriente de renovado interés por el estudio de la capa límite, mediante la aplicación de modelos más elaborados al cálculo de los esfuerzos de Reynolds, combinados con el empleo de técnicas de observación experimental más precisas. Una buena medida del punto alcanzado y de las líneas modernas de investigación de esta materia puede hallarse en un reciente trabajo de revisión del profesor Kovasznay, de la Universidad de John Hopkins (194), donde se da bibliografía muy reciente sobre el tema.

El propósito básico de este epígrafe ha sido únicamente el de completar la exposición de la Teoría de las Capas Límites, mediante una referencia a los problemas que plantea el estudio del régimen turbulento en los mismos.

Por ello, si bien ha tenido que hacerse una apelación restringida a la Teoría General de la Turbulencia, no se pretende entrar aquí en una exposición más amplia de la misma.

Efectivamente, el desarrollo y la exposición de los fundamentos de aquella Teoría, así como de los instrumentos matemáticos que emplea y la descripción de los modelos propuestos para los mecanismos de transferencia y disipación de la energía entre las diversas frecuencias del espectro de fluctuaciones y para el estudio de otros

(193) Sobre el problema de la semejanza de perfiles de velocidades en movimientos deslizantes turbulentos, ver la obra de TOWNSEND, ya citada.

(194) L. S. KOVASZNAY: *The Turbulent Boundary Layer*. «An. Rev. Fluid. Mech.», 1970. págs. 95-112.

procesos tales como la difusión turbulenta, exigirían una extensión considerable (195) que va más allá de nuestro propósito.

Para terminar con esta materia diremos que un ejemplo práctico de la forma de aplicar la Teoría de la Capa Límite que se ha expuesto en estos tres últimos epígrafes al cálculo numérico de la resistencia de un perfil aerodinámico, puede hallarse en un reciente trabajo de Cebeci y Smith, donde se comprueba que el error medio cuadrático con respecto a las mediciones experimentales, para casi un centenar de casos, es inferior al 3 por 100 (196).

13. DINÁMICA DE GASES IDEALES

En los epígrafes 10 a 12 se han tomado en consideración los efectos de la compresibilidad del fluido en las características de la Capa Límite, tanto en el régimen laminar como en el turbulento.

Ahora vamos a analizar aquella influencia en los movimientos «exteriores» a la capa límite, es decir, en la hipótesis de que los coeficientes de viscosidad y de conductividad térmica del medio son nulos (197).

En tal caso, el sistema diferencial del movimiento se reduce a las seis ecuaciones [25], [26] y [27] del epígrafe 3, las cuales, unidas a las ecuaciones [10] y [11] de estado del fluido, permiten calcular los valores de las tres componentes de la velocidad y de la presión, densidad y temperatura del gas, para las condiciones iniciales y de contorno que corresponden al problema en estudio.

En particular, por lo que respecta a las condiciones de contorno sobre la pared de un obstáculo que se mueve en la forma que resulta

(195) Para el tipo especial de turbulencia llamada homogénea, al que se ha consagrado una gran parte de tales estudios, ver la obra de G. V. BATCHELOR: *The Theory of Homogeneous Turbulence*. Cambridge Univ. Press, 1953.

(196) T. CEBECI y M. O. SMITH: *Calculation of Profile Drag of Airfoils at Low Mach Numbers*. «*Jour. Aircraft.*», 1968, págs. 535-42.

(197) Entre las referencias de carácter general para el estudio de estas materias se recomiendan, especialmente, la obra de HOWARTH, 1953, el volumen VI de la Enciclopedia de Princeton y el trabajo de M. SCHIFFER: *Analytical Theory of Subsonic and Supersonic Flows*, del tomo III, vol. IX del «*Handbuch der Physik*», que se citó en la introducción, así como el tratado de R. VON MISES: *Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow*. Acad. Press., Londres, 1958.

de la expresión [34], la condición de deslizamiento está dada por la ecuación [33].

Por otra parte se ha visto en los epígrafes 5 y 6 que si el gas no ha estado sometido a procesos disipativos ni existen discontinuidades en el movimiento, éste debe ser isentrópico e irrotacional, lo que confiere una importancia destacada a los casos en que se cumplan estas condiciones.

De ellas, la condición de irrotacionalidad significa, como se vio en el epígrafe 6.º, que el campo v_i de velocidades deriva de un potencial $\varphi(x_i, t)$:

$$v_i = \frac{\partial \varphi(x_i, t)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad [259]$$

en tanto que la condición de isentropía da lugar a que la presión p sea función únicamente de la densidad ρ :

$$p = p(\rho), \quad [260]$$

al hacer $S = \text{const.}$ en la ecuación [10] de estado termodinámico del gas.

En particular, si se trata de un gas perfecto con relación constante y de calores específicos, como ocurrirá en la mayoría de los casos tratados, la relación [260] se reduce a la expresión [50]:

$$\frac{p}{p_r} = \left(\frac{\rho}{\rho_r} \right)^\gamma, \quad [261]$$

en donde p_r y ρ_r son dos valores de referencia, cuya elección apropiada dependerá, naturalmente, del caso en estudio.

Al introducir las dos condiciones anteriores en la ecuación [27], se obtiene la siguiente integral primera de las ecuaciones del movimiento:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + h = \text{const.}, \quad [262]$$

que es la forma que toma en este caso la ecuación generalizada [75] de Bernoulli.

En el epigrafe 6 se vio que la ecuación diferencial que debe satisfacer el potencial de velocidades en el caso de un fluido incompresible es la [74] de Laplace.

En el caso de un gas, la ecuación correspondiente se obtiene por eliminación de v_i , p y ρ entre las ecuaciones anteriores, con lo que resulta, finalmente:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial t} + \right. \\ \left. + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right), \quad [263]$$

donde

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)}, \quad [264]$$

es, como se definió en [20], la velocidad de propagación del sonido en el gas, la cual se puede expresar fácilmente en función de las derivadas de φ mediante las relaciones anteriores.

Por ejemplo, en el caso de un gas perfecto se comprueba fácilmente que es

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1}, \quad [265]$$

lo que resuelve la cuestión, merced a [262].

La simple comparación de la ecuación de Laplace con la nueva [263] que acaba de obtenerse, permite anticipar la gran dificultad que introduce en el problema el efecto de la compresibilidad, como resultado del acoplamiento entre los fenómenos mecánicos y termodinámicos que es característico de estos procesos y al que ya se ha hecho referencia en otras ocasiones, así como el papel destacado que tiene que jugar en todo ello la velocidad de propagación del sonido.

Antes de analizar más detenidamente la cuestión, recordaremos que si se limita el estudio al caso de las perturbaciones pequeñas y

se linealiza la ecuación [263], se obtiene la célebre ecuación de ondas

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} \quad [266]$$

base de la Teoría del Sonido, cuyo desarrollo constituye uno de los capítulos clásicos de la Física Matemática (198).

Por otra parte, en el epígrafe 9, al estudiar la Teoría de la Sustentación en ausencia de efectos de compresibilidad, se vio que existe una gran variedad de movimientos de gran interés tecnológico, los cuales pueden considerarse como resultantes de superponer a una traslación uniforme de velocidad V , que constituye la corriente principal, una perturbación representada por un potencial φ cuyas velocidades son pequeñas con respecto a V , lo que permite linealizar las ecuaciones del movimiento, así como las condiciones de contorno y obtener soluciones aproximadas cuya utilidad práctica ha quedado plenamente comprobada.

Este procedimiento de linealización, que allí estaba exigido solamente por las condiciones de contorno, puesto que la ecuación de Laplace ya era lineal, resulta aún más justificado en el caso de un gas, en que la ecuación diferencial del potencial de velocidades tiene la complejidad que hemos visto, a condición de que la linealización sea posible, lo que no ocurre en todos los casos, como vamos a ver enseguida, pero sí en muchos de ellos, del mayor interés práctico.

Por sencillez vamos a limitar inicialmente el desarrollo a los movimientos estacionarios, en cuyo caso, procediendo como se hizo en [98] y con la misma notación que allí se empleó, se obtiene la siguiente ecuación lineal para el potencial de velocidades de perturbación:

$$(1 - M_\infty^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0, \quad [267]$$

en donde

$$M_\infty^2 = \frac{V^2}{a_\infty^2}. \quad [268]$$

es el número de Mach de la corriente principal.

(198) Para un estudio de esta teoría, ver la obra fundamental de Lord RAYLEIGH: *The Theory of Sound*. Dover Publ., Nueva York, 1945, cuya primera edición data de 1877.

En cuanto a la presión, se obtiene a partir de la ecuación de Bernoulli y resulta ser:

$$p - p_{\infty} = -\rho_{\infty} V \frac{\partial \varphi}{\partial x} . \quad [269]$$

Una primera consecuencia de la ecuación de perturbación [267], que resulta de la simple consideración de los órdenes de magnitud de los coeficientes de los diversos términos de la misma, es que la linealización no es válida para $|1 - M_{\infty}^2| \ll 1$, es decir, en el caso de los movimientos llamados «transónicos», los cuales plantean un problema especial y muy difícil, que trataremos más adelante, en el epígrafe núm. 18.

Asimismo y por análoga causa, cabe prever que tampoco será aplicable en el caso $M_{\infty}^2 \gg 1$ de los movimientos llamados «hipersónicos», en que la velocidad del movimiento principal es mucho mayor que la del sonido. Tales movimientos constituyen también, efectivamente, otro caso especial al que nos referimos en el epígrafe núm. 19.

Por último, una vez excluidos estos datos especiales, ocurre que la zona de validez de la ecuación [267] se divide en dos intervalos de naturaleza esencialmente distinta, según sea $1 - M_{\infty}^2$ mayor o menor que cero.

Efectivamente, en el primero, que corresponde a los movimientos llamados subsónicos por ser $V < a_{\infty}$, la ecuación es elíptica, como la de Laplace; en tanto que en el segundo, llamado supersónico por ser $V > a_{\infty}$, es de naturaleza hiperbólica, como la de ondas, cuyo ejemplo más representativo lo ofrece, como hemos visto en [266], la Teoría del Sonido.

En el epígrafe núm. 9 se hizo observar que, al ser la ecuación del movimiento de un fluido incompresible la de Laplace, independientemente de que éste fuera estacionario o no, la influencia del tiempo sólo aparecía en las condiciones de contorno, a través de la ecuación de Bernoulli [75].

En el caso de un gas, las cosas no ocurren así porque, al depender explícitamente del tiempo la ecuación del movimiento [263], si se linealiza ésta para los movimientos no estacionarios, se obtiene la ecuación

$$(1 - M_{\infty}^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} - 2 \frac{M_{\infty}}{a_{\infty}} \varphi_{xt} - \frac{1}{a_{\infty}^2} \varphi_{tt} = 0. \quad [270]$$

en lugar de [267] y la presencia de los dos últimos términos de [270] complica sensiblemente, en este caso, la obtención de las soluciones correspondientes a problemas como los que se trataron en el epígrafe núm. 9.

Antes de seguir adelante con el análisis de las consecuencias que de todo esto se derivan, consideremos por un momento todavía la ecuación no lineal completa [263], la cual, en el régimen estacionario que hemos supuesto y con la notación que estamos empleando se expresa en la forma

$$\left. \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} + \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2}\right) \varphi_{zz} - \\ & - 2 \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} \varphi_{xy} - 2 \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} \varphi_{yz} - 2 \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} \varphi_{zx} = 0. \end{aligned} \right\} \quad [271]$$

Como es sabido, el carácter de esta ecuación depende de la naturaleza real o imaginaria de las superficies características

$$f(x, y, z), \quad [272]$$

susceptibles de propagar las discontinuidades de las soluciones.

Tales superficies están dadas por la ecuación en derivadas parciales de primer orden (199)

$$\left. \begin{aligned} & \left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) f_x^2 + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right) f_y^2 + \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2}\right) f_z^2 - \\ & - 2 \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} f_x f_y - 2 \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} f_y f_z - 2 \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} f_z f_x = 0. \end{aligned} \right\} \quad [273]$$

y, caso de existir, juegan un papel fundamental en la construcción de las soluciones.

(199) Ver la obra clásica de J. HADAMARD: *Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique*. A. Hermann, París, 1903; así como, por ejemplo, M. G. SMITH: *Introduction to the Theory of Partial Differential Equations*. Van Nostrand Co. Ltd., Londres, 1967; o bien S. GOUCHONOV: *Equations de la Physique Mathématique*. Ediciones MIR, Moscú, 1973; o cualquier tratado clásico, tal como los de R. COURANT y D. HILBERT: *Methoden der mathematischen Physik*, vol. II, J. Springer, Berlín, 1937, o de A. G. WEBSTER: *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Hafner Publ. Co., Nueva York, 1947.

En nuestro caso, dichas superficies características dependerán, evidentemente, de la solución $\varphi(x, y, z)$, a través de los coeficientes de la ecuación [270], los cuales son funciones de las componentes $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ de la velocidad del movimiento en el punto, así como de la velocidad a del sonido en él.

El carácter imaginario o real de las superficies características en un entorno del punto (x, y, z) considerado depende, a su vez, como es sabido, de que la forma cuadrática

$$\left\{ \begin{aligned} &\left(1 - \frac{\varphi_x^2}{a^2}\right) x^2 + \left(1 - \frac{\varphi_y^2}{a^2}\right) y^2 + \left(1 - \frac{\varphi_z^2}{a^2}\right) z^2 - \\ &- 2 \frac{\varphi_x \varphi_y}{a^2} x y - 2 \frac{\varphi_y \varphi_z}{a^2} y z - 2 \frac{\varphi_z \varphi_x}{a^2} z x = 0 \end{aligned} \right. \quad [274]$$

sea definida o no, es decir, de que las tres raíces de la «ecuación característica» de [274] tengan el mismo signo o signos distintos.

Teniendo presente que el número de Mach M en el punto está dado por la expresión

$$M^2 \equiv \frac{v^2}{a^2} = \frac{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}{a^2}, \quad [275]$$

mediante un desarrollo de cálculo sencillo se obtiene la siguiente expresión para la ecuación característica:

$$\alpha^3 - (3 - M^2) \alpha^2 + (3 - 2 M^2) \alpha - (1 - M^2) = 0, \quad [276]$$

cuyas raíces $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ determinan la naturaleza de la forma [273] y su expresión canónica.

Finalmente, la aplicación de la regla de Descartes a esta ecuación permite concluir, como se comprueba fácilmente, que si es $1 - M^2 > 0$, es decir, si el movimiento es subsónico en el entorno del punto, la ecuación es «elíptica» en él, en coincidencia con lo que se había visto en [267] para la aproximación lineal, mientras que si es $1 - M^2 < 0$, o sea, en los movimientos supersónicos, la ecuación es de tipo hiperbólico, de acuerdo también con lo que se anticipó en aquella aproximación.

Existen, sin embargo, dos diferencias importantes entre ambos casos, que son las siguientes:

En la ecuación lineal [267], una vez dado el valor M_∞^2 del número de Mach del movimiento principal, la ecuación es hiperbólica o elíptica en «todo» el espacio, según que aquél sea mayor o menor que la unidad, respectivamente. Además, en el caso hiperbólico las superficies características del mismo son independientes de la solución buscada, puesto que los coeficientes de la ecuación [267] son constantes.

Es más, en virtud de [267], la ecuación [272] de las superficies características, en la aproximación lineal, se reduce a la siguiente:

$$(1 - M_\infty^2) f_x^2 + f_y^2 + f_z^2 = 0, \quad [277]$$

que puede escribirse también en la forma:

$$n_x = \pm \frac{1}{M_\infty} = \frac{a_\infty}{V}, \quad [278]$$

siendo n_x el coseno director de la normal a $f(x, y, z)$ en el punto.

Por consiguiente, la interpretación física de las superficies características es inmediata: la componente de la velocidad en la dirección normal a ellas es igual a la velocidad de propagación del sonido.

O bien, dicho de otro modo, las superficies características son tangentes al cono de revolución con eje paralelo al movimiento principal y de semiángulo θ en el vértice tal que sea

$$\text{sen } \theta = \pm \frac{a_\infty}{V}. \quad [279]$$

Dicha superficie se llama «cono de Mach» (200) y el ángulo θ de inclinación de sus generatrices con el eje se llama «ángulo de Mach».

Por el contrario, en el caso de la ecuación no lineal [271], el carácter hiperbólico o elíptico de la misma es de índole «local», puesto que depende del valor del número de Mach en el punto considerado y éste puede variar de un punto a otro, como de hecho varía siempre, lo que da lugar, en muchos casos, a que coexistan en el espacio del movimiento zonas subsónicas con otras supersónicas, de las que están separadas, bien sea por superficies sónicas ($M = 1$), bien por

(200) Ver la llamada del epígrafe 2.

superficies de discontinuidad: las «ondas de choque», cuya existencia y características consideraremos en el epígrafe 17.

En el campo de la Física Matemática, este carácter local del tipo de ecuación es un fenómeno prácticamente exclusivo de la Dinámica de Gases y da lugar a una de las más serias dificultades de la misma, como puede anticiparse al considerar que mientras el problema tipo de las ecuaciones elípticas es uno de «condiciones de contorno», bien sea de Dirichlet, de von Neumann o mixto, para las ecuaciones hiperbólicas es el de Cauchy, o sea, un problema de «condiciones iniciales».

Desde el punto de vista físico, la diferencia estriba en que en el caso elíptico, es decir, en el régimen subsónico, una modificación local de las condiciones de contorno, por ejemplo, en una porción de éste, afecta a la solución en todo el espacio.

Por el contrario, en el caso supersónico, las perturbaciones locales ejercen su influencia en una zona limitada por envolvente de las superficies características originadas a partir de ella (201).

Como consecuencia de esta diferencia de carácter, en el caso elíptico, las soluciones son analíticas en todo el espacio considerado salvo posiblemente en puntos singulares aislados o en capas de torbellinos, mientras que en el segundo pueden existir discontinuidades sobre las características, según se ha indicado ya.

Antes de terminar hagamos observar que, como se comprueba fácilmente, la interpretación física de la ecuación [274] es idéntica a la [278].

En efecto, si $f(x, y, z)$ es una superficie característica de la ecuación [274] para la solución $\varphi(x, y, z)$, la proyección sobre la normal a ella de la velocidad v del fluido en el punto x, y, z

$$v = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2} \quad [280]$$

es igual a la velocidad local a del sonido en él.

Incidentalmente puede señalarse que, precisamente esta propiedad exige que se cumpla la condición $M > 1$ para que la ecuación sea hiperbólica, puesto que para que el coseno director n_x sea real ha de ocurrir que

$$a^2 = (n_x v)^2 \leq v^2. \quad [281]$$

(201) Ver, por ejemplo, la obra clásica de J. HADAMARD: *Le Problème de Cauchy*. Hermann, París, 1932.

Una magnitud fluida importante en las aplicaciones tecnológicas (202) y cuyas propiedades ilustran bastante bien el diferente comportamiento de un gas según que el movimiento sea subsónico o supersónico, es el flujo

$$m \equiv \rho v \quad [282]$$

por unidad de superficie normal a la dirección local del movimiento, en donde v es el módulo de la velocidad en el punto, definido en [280].

La ecuación de Bernoulli, en régimen estacionario y para un gas perfecto con relación constante γ de calores específicos, proporciona la siguiente expresión para m :

$$\frac{\rho v}{\rho_0 a_0} = M \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}, \quad [283]$$

en donde ρ_0 y a_0 son los valores de la densidad y de la velocidad del sonido del gas, en las condiciones termodinámicas del punto de remanso.

Se comprueba fácilmente que

$$\frac{d(\rho v)}{dM} = s g n (1 - M^2). \quad [284]$$

Por tanto, al acelerar el gas, el flujo unitario crece en el régimen subsónico, decrece en el supersónico y pasa por un máximo en el punto sónico $M = 1$.

La interpretación física de esta propiedad es la siguiente: puesto que el flujo a través de un tubo de corriente de sección elemental $d\sigma$ es constante:

$$\rho v \cdot d\sigma = \text{const.}; \quad [285]$$

ello significa que ρv y $d\sigma$ varían en sentido contrario y que al máximo de ρv corresponde el mínimo de $d\sigma$.

Por tanto, en el régimen subsónico, al acelerar el gas se reduce

(202) Ver, por ejemplo, A. J. CHAPMAN y W. F. WALKER: *Introductory Gas Dynamics*. Holt, Rinehart and Winston, Inc., Nueva York, 1971.

la sección del tubo de corriente y recíprocamente en el supersónico. Por último, la sección sónica es una «garganta» del tubo (203).

Como es bien sabido, éste es el fundamento de las toberas de Laval, en las turbinas de vapor, así como en los cohetes, túneles aerodinámicos supersónicos y otras aplicaciones.

Volviendo nuevamente al problema general diremos, para terminar, que, en el caso de movimientos no estacionarios, las conclusiones generales son similares a las anteriores, si bien entonces hay que tomar en consideración la componente normal de la velocidad «relativa» con respecto a las superficies características puesto que éstas se mueven también.

Dicho esto, pasamos a considerar separadamente, en los epígrafes siguientes, primero algunas soluciones exactas del problema y a continuación las peculiaridades y formas de tratamiento matemático de cada uno de los cuatro regímenes distintos en que, como acaba de verse, pueden clasificarse los movimientos de los fluidos compresibles por lo que respecta al valor del número de Mach.

14. SOLUCIONES EXACTAS. TRANSFORMACIÓN HIDÓGRAFA

La ecuación diferencial [263]) del potencial de velocidades de un fluido compresible es del tipo llamado «casi lineal» porque los coeficientes de las derivadas segundas dependen de la función incógnita a través de sus derivadas primeras.

El carácter no lineal de esta ecuación hace muy difícil su integración y limita extraordinariamente el repertorio de soluciones exactas de que puede disponerse, a diferencia de lo que ocurre, como hemos visto, en el caso de un fluido incompresible, donde la Teoría del Potencial proporciona un conjunto prácticamente ilimitado de aquéllas, merced a las posibilidades que ofrece la superposición de soluciones, por el carácter lineal de la ecuación de Laplace.

En los epígrafes siguientes, al analizar cada uno de los diversos regímenes compresibles que hemos establecido en el anterior, veremos cómo se subsana esta dificultad en muchos casos, mediante la

(203) El tránsito discontinuo del régimen supersónico al subsónico a través de una onda de choque no cumple, evidentemente, esta condición, porque la ecuación [263] no es aplicable, al no ser el fenómeno isentrópico, como se verá en el epígrafe 17.

obtención de soluciones aproximadas, así como algunos ejemplos de soluciones exactas en el régimen supersónico.

Pero antes vamos a exponer una idea que ha permitido obtener algunas familias de soluciones exactas y que, si bien resulta aplicable tan sólo a los movimientos planos y estacionarios, tiene la ventaja de que es válida para regímenes subsónicos, supersónicos y mixtos.

La idea, inicialmente apuntada por Riemann en su célebre trabajo de 1958 sobre la propagación de ondas (204), la utilizó ya poco después Helmholtz para el estudio de movimientos de fluidos incompresibles con superficies de discontinuidad, como se ha visto en el epígrafe 8, y consiste en lo siguiente:

El hecho de que los coeficientes de las ecuaciones del movimiento sean funciones tan sólo de las componentes de la velocidad, o de magnitudes termodinámicas que pueden expresarse a través de ellas merced a la ecuación de Bernoulli, sugiere naturalmente la idea de linealizar aquéllas mediante la transformación hodógrafa, es decir, transfiriendo el problema del plano físico al de la velocidad, al adoptar las componentes de éste como variables independientes.

Con ello se consigue, efectivamente, hacer lineales las ecuaciones del movimiento, lo que permite superponer soluciones, si bien el problema no resulta nada sencillo, como vamos a ver, porque los coeficientes de las nuevas ecuaciones son funciones complicadas de las componentes de la velocidad.

Veamos a continuación, en forma resumida, los fundamentos del procedimiento (205).

En el caso de un movimiento plano, estacionario e irrotacional, de un gas perfecto con relación constante de calores específicos, el sistema diferencial del mismo se reduce al siguiente, siendo u y v las componentes de la velocidad en las direcciones x e y , respecti-

(204) Ver la referencia del epígrafe 17.

(205) Ver, como bibliografía general para esta materia, la obra de HOWARTH, 1953, vol. I, págs. 222 y sigts.; el trabajo de Y. H. KUO y W. R. SEARS, del capítulo F del volumen VI de la Enciclopedia de Princeton; el trabajo de M. SHIFFER y la obra de von MISES, que se citan en el epígrafe precedente. Finalmente, M. J. LIGHTHILL: *The Hodograph Transformation. Modern Developments in Fluid Dynamics*, vol. I. Oxford, 1953.

vamente, y $q = \sqrt{u^2 + v^2}$ el módulo de aquélla (206), cuyo argumento designaremos por θ :

Ecuación de irrotacionalidad:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad [286]$$

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0; \quad [287]$$

Ecuación de Bernoulli:

$$\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} + \frac{q^2}{q_m^2} = 1, \quad [288]$$

en donde

$$q_m^2 = \frac{2}{\gamma-1} \alpha_0^2 \quad [289]$$

es la velocidad máxima que puede alcanzar isentrópicamente el fluido; el subíndice cero indica, como es habitual, las condiciones de remanso, correspondientes al punto $q = 0$, y la forma [288] de la ecuación de Bernoulli se deduce fácilmente de [262], al tener en cuenta que es $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$ y que entre h , p y ρ existen las relaciones

termodinámicas que resultan de la condición de isentropía para un gas perfecto con relación constante de calores específicos.

Por otra parte, entre u , v , q y θ existen, evidentemente, las relaciones

$$u = q \cos \theta; \quad v = q \sin \theta. \quad [290]$$

Volviendo al sistema inicial, es claro que las tres ecuaciones [286],

(206) En ocasiones anteriores dicho módulo se ha expresado por v , por ejemplo, en la ecuación de Bernoulli, pero aquí resulta preferible esta notación, prácticamente universal en la bibliografía de la transformación hodógrafa.

[287] y [288] determinan los valores de u , v y ρ , una vez fijadas las condiciones de contorno del problema, el cual queda así perfectamente definido.

Las dos primeras ecuaciones de dicho sistema son condiciones de integrabilidad que aseguran, la primera, como es sabido, la existencia de un potencial de velocidades $\varphi(x, y)$ y la segunda, la de una función de corriente $\psi(x, y)$.

Y entre ambas funciones existen las dos relaciones evidentes:

$$\left. \begin{aligned} u &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial y}; \\ v &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \right\} \quad [291]$$

las cuales forman el sistema «casi lineal» del problema, puesto que ρ se expresa en función de φ_x y φ_y , por ejemplo, merced a la ecuación de Bernoulli [288].

En particular, la eliminación de ψ entre las dos ecuaciones de este sistema conduce a la ecuación

$$(\alpha^2 - \varphi_x^2) \varphi_{xx} - 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} + (\alpha^2 - \varphi_y^2) \varphi_{yy} = 0. \quad [292]$$

que es, naturalmente, la forma «plana» de la ecuación fundamental [271].

Es claro que una relación similar se puede obtener para $\psi(x, y)$, si se elimina el potencial $\varphi(x, y)$ entre aquellas dos ecuaciones, en lugar de eliminar ψ .

Volviendo ahora al sistema [291], es precisamente la presencia del coeficiente $\frac{\rho_0}{\rho}$, los que origina la dificultad del problema que, sugiere, como hemos dicho al comienzo, la transformación al plano hodógrafo para hacerlo lineal.

Dicha transferencia puede hacerse adoptando como variables independientes, por ejemplo, las componentes u y v de la velocidad, lo que se consigue, como se comprueba fácilmente, mediante la transformación de Legendre (207):

$$\bar{\varphi}(u, v) = ux + vy - \varphi(x, y), \quad [293]$$

(207) Ver COURANT-HILBERT, ya citado, vol. II, págs. 26 y sigts.

la cual sustituye la ecuación [292] del potencial $\varphi(x, y)$ por la siguiente, para el cálculo de $\bar{\varphi}(u, v)$:

$$(a^2 - u^2) \bar{\varphi}_{uu} + 2uv \bar{\varphi}_{uv} + (a^2 - v^2) \bar{\varphi}_{vv} = 0, \quad [294]$$

cuyos coeficientes dependen tan sólo como se deseaba, de las nuevas variables independientes u y v .

Sin embargo, para aplicar más fácilmente las condiciones de contorno del problema, resulta preferible operar en coordenadas polares (q, θ) , como ya se indicó en el epígrafe 8 para el problema de Helmholtz, en cuyo caso el sistema [291] se transforma en el siguiente, como puede comprobarse tras llevar a cabo un conjunto de operaciones bastante laboriosas pero sin dificultades conceptuales:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_\theta &= - \frac{\rho_0}{\rho q} (1 - M^2) \psi_\theta; \\ \frac{1}{q} \varphi_\theta &= \frac{\rho_0}{\rho} \psi_\theta. \end{aligned} \right\} \quad [295]$$

En este sistema, se ha puesto de manifiesto explícitamente el número de Mach M del movimiento, si bien puede expresarse fácilmente en función de q , al igual que $\frac{\rho_0}{\rho}$, merced a la ecuación de Bernoulli, con lo que resulta:

$$M^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \cdot \frac{\tau}{1 - \tau}, \quad [296]$$

siendo

$$\tau = \frac{q^2}{q_m^2} \quad [297]$$

una medida adimensional de la velocidad, tal que varía entre 0 y 1 al hacerlo q entre cero y la velocidad máxima q_m ; además, para $\tau < \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$ el movimiento es subsónico y supersónico en caso contrario.

La ventaja de las coordenadas polares reside en el hecho de que los tramos rectos de contorno en el plano físico se expresan mediante la condición $\theta = \text{const.}$ en el hodógrafo, es decir, son rectas radiales, mientras que las isobaras, que corresponden, por ejemplo, a superficies libres, son arcos de circunferencia $q = \text{const.}$

Se debe a los autores Molenbroek (208) y Chaplygin (209) el desarrollo y la aplicación sistemática del método al estudio de chorros de gases, mediante la integración de la función de corriente ψ , cuyo empleo es preferible al de φ , puesto que las líneas de corriente que corresponden, por ejemplo, a los contornos, son de la forma $\psi(q, \theta) = \text{const.}$

Al eliminar el potencial φ entre las dos ecuaciones del sistema [295], se obtiene para la función de corriente ψ la ecuación lineal:

$$q^2 \psi_{qq} + (1 + M^2) q \cdot \psi_q + (1 - M^2) \psi_{\theta\theta} = 0, \quad [298]$$

en donde, como vimos antes, M se puede expresar en función de q mediante [296].

En su célebre trabajo de 1904, Chaplygin busca soluciones de la ecuación [298] mediante el procedimiento clásico de separación de variables, ensayando soluciones de la forma:

$$\psi_n(\tau, \theta) = \tau^{\frac{n}{2}} F_n(\tau) e^{i n \theta}, \quad [299]$$

lo que proporciona para la función incógnita $F_n(\tau)$ la ecuación diferencial ordinaria

$$\tau(1-\tau) \frac{d^2 F_n}{d\tau^2} + \left[n+1 - \left(n+1 - \frac{1}{\gamma-1} \right) \tau \right] \frac{d F_n}{d\tau} + \frac{n(n+1)}{2(\gamma-1)} F_n = 0, \quad [300]$$

cuyas soluciones son las funciones hipergeométricas $F(a, b, c;$

(208) P. MOLENBROEK: *Über einige Bewegungen eines Gases mit Annahme eines Geschwindigkeitspotentials*. «Arch. Math. Phys.», 1890, págs. 157-95.

(209) S. A. CHAPLYGIN: *On Gas Jets*. «Sci. Annals.», Imp. Univ. Moscow. Trad. inglesa, NACA Tech. Mem. 1063, año 1944.

τ) (210), en donde es $c = n + 1$, en tanto que a y b son las raíces de la ecuación

$$z^2 - \left(n - \frac{1}{\gamma - 1} \right) z - \frac{n(n+1)}{2(\gamma - 1)} = 0. \quad [301]$$

Se obtiene así una familia de soluciones para la función de corriente, cuya acertada combinación permite resolver problemas que corresponden a diversas condiciones de contorno en el plano físico (x, y) .

Pero, para ver cuáles son éstas, es necesario, naturalmente, efectuar la transformación inversa de la que se llevó a cabo al comienzo, para pasar al plano hodógrafo.

Ello se consigue, una vez conocida la función de corriente $\psi(q, \theta)$, volviendo al sistema [295], el cual permite calcular el potencial de velocidades $\varphi(q, \theta)$ correspondiente a aquélla.

Obtenido φ , el paso del plano hodógrafo al plano físico se reduce a dos cuadraturas, como se comprueba sin dificultad mediante cálculos un tanto laboriosos, lo que proporciona, finalmente, la solución completa del problema.

Aparte de los ejemplos de chorros compresibles estudiados por Chaplygin, su método ha permitido tratar otros muchos casos, entre los que tienen especial interés los analizados por Ringleb (211) y por Temple y Yarwood (212), porque proporcionan soluciones exactas y analíticas, es decir, sin discontinuidad, en un intervalo transónico, en el que la corriente pasa de subsónica a supersónica primero para volver después al régimen subsónico, sin que por ello se produzcan discontinuidades, propiedad cuya importancia se apreciará en el epígrafe 19, al tratar del Régimen Transónico.

Hasta aquí hemos visto cómo el método de transformación hodógrafa permitía resolver satisfactoriamente problemas tales como los de los movimientos en chorros y otros similares.

(210) Ver, por ejemplo, E. T. WHITTAKER y G. N. WATSON: *A Course of Modern Analysis*. Cambridge Univ. Press., 1947, págs. 281 y sigts.

(211) F. RINGLEB: *Exakte Lösungen der Differentialgleichungen einer adiabatischen Gasströmung*. ZAMM, 1940, págs. 185-89.

(212) G. TEMPLE y J. YARWOOD: *Compressible Flow in a Convergent-Divergent Nozzle*. «Rep. and Mem.», núm. 2.077, Aer. Res. Coun., Londres, 1947.

Por otra parte, un problema del mayor interés aerodinámico es, como se ha puesto repetidamente de manifiesto en los epígrafes precedentes, el de calcular la corriente exterior, con o sin circulación, alrededor de un obstáculo cerrado tal como un perfil.

Por ello tiene mucho interés explorar la posibilidad de extender a este caso el método hodógrafo, que tan excelentes resultados ha proporcionado en aquellos otros problemas.

La extensión, sin embargo, no resulta tan sencilla porque, incluso en el caso del fluido incompresible, en que se cuenta con un instrumento tan poderoso y desarrollado como el de la Representación Conforme, la transformación del plano físico exterior al obstáculo en el de las velocidades, conduce, en éste, a una complicada superficie de Riemann, con un punto de ramificación correspondiente a la singularidad de la corriente en el infinito.

Por otra parte, a diferencia de lo que ocurría en el problema de Chaplygin, donde el desarrollo de la solución en serie de funciones hipergeométricas cubría todo el espacio del proceso, en el caso de la corriente alrededor de un obstáculo, por razones de convergencia, es necesario operar con desarrollos diferentes para las distintas regiones del movimiento, mediante prolongaciones analíticas de la solución obtenida en un cierto dominio de validez.

Por último, las soluciones que se obtienen adolecen del inconveniente típico del método hodógrafo; a saber: al modificarse el número de Mach de la corriente en el infinito, se modifica también el contorno del obstáculo, por exigencia inevitable del método mismo que se ha empleado para construir las soluciones.

El cual consiste en partir de la solución incompresible para un obstáculo de forma dada, cuyo contorno corresponde a la condición $\psi_i = 0$, siendo ψ_i la función de corriente del movimiento incompresible y construir por analogía, como hacía Chaplygin para los chorros, funciones analíticas ψ_e que sean soluciones de la ecuación diferencial [298] de la función de corriente del movimiento compresible, determinando después el contorno del obstáculo en éste por la condición $\psi_e = 0$, la cual proporciona una forma geométrica distinta de la que daba la condición $\psi_i = 0$, pero que tiende a ésta cuando el número de Mach M_∞ del movimiento tiende a cero.

El desarrollo de la Teoría, que ha sido llevado a cabo por Ligh-

«hill (213) y Cherri (214), resulta sumamente laborioso y delicado, por lo que remitimos a los trabajos originales o a los resúmenes que se encontrarán en las obras de Howarth-1953 y de Kuo y Sears, reiteradamente citadas.

En ellas pueden verse, además, los resultados numéricos de la corriente alrededor del obstáculo correspondiente a un cilindro de forma circular en el caso incompresible, para un número de Mach en el infinito aproximadamente igual a 0,5, en cuyo caso existe una zona supersónica, en contacto con el obstáculo, sobre cuya superficie se alcanza un número de Mach máximo de 1,39.

A título de ejemplo, la figura I-10, a) ilustra las características del movimiento alrededor de un cilindro de sección aproximadamente circular, en el plano físico y en el hodógrafo. Puesto que el movimiento es simétrico con respecto al eje $y = 0$, se ha representado tan sólo la solución correspondiente al semiplano superior.

Otros intentos de obtener soluciones exactas, como el del operador integral de Bergman (215), tienen menos interés operativo o pueden reducirse a los anteriores.

En otro orden de ideas, hay que tener presente que la obtención de soluciones analíticas en el plano hodógrafo no significa, necesariamente, que su transformación al plano físico dé lugar a movimientos posibles.

Para ello hace falta, además, efectivamente, que cada región del plano físico se transforme unívocamente en otra del hodógrafo, puesto que no tienen significación real el que a un mismo punto de aquél correspondan varios valores distintos de la velocidad.

Como es sabido, la condición matemática para que esto no ocurra es que el jacobiano J de la transformación sea distinto de cero:

$$J \equiv \frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)} \neq 0. \quad [302]$$

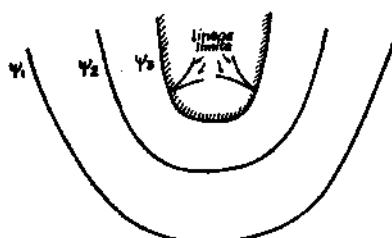
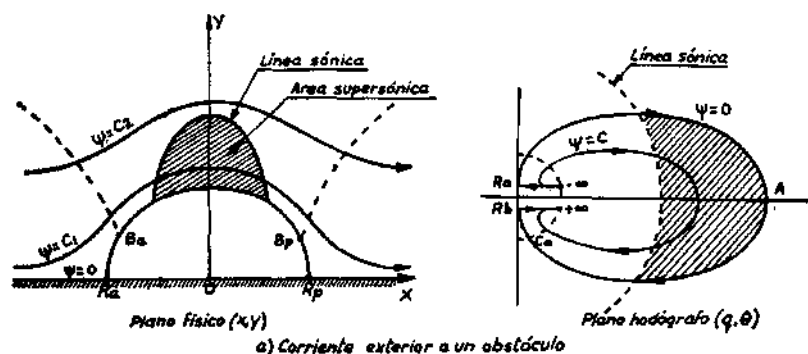
(213) M. J. Lighthill: *Hodograph Transformation in Transonic Flow*. III. *Flow Round a Body*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1H947, págs. 352-60.

(214) T. M. Cherri: *Flow of a Compressible Fluid About a Cylinder*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1947, págs. 45-79.

(215) S. Bergman: *Operatorenmethode der Gasdynamik*. ZAMM, 1952, páginas 33-45. También R. von Mises y M. Schiffer: *On Bergman's Integration Method in Two-Dimensional Compressible Fluid Flow*. «Adv. App. Mech.», volumen I, págs. 249 y sigts., Acad. Press. Nueva York, 1948.

Al desarrollar esta expresión se obtiene la siguiente condición para la anulación de J :

$$q^2 \psi_a^2 - (M^2 - 1) \psi_0^2 = 0, \quad [303]$$



b) Líneas límite y región "prohibida"



a) Comportamiento de las líneas de corriente al cruzar las líneas límite

Fig. I-10.—Transformación hodográfica y líneas límite.

la cual, en el caso subsónico $M^2 < 1$, sólo puede satisfacerse en puntos aislados, determinados por la doble condición

$$\psi_0 = 0; \quad \psi_0 = 0, \quad [304]$$

lo que significa que, en dicho régimen, solamente pueden darse singularidades aisladas, tales como son, por ejemplo, los puntos de remanso.

Por el contrario, en régimen supersónico $M^2 > 1$, la ecuación [303] define una curva en el plano hodógrafo. Se trata de la llamada «línea límite», cuya transformación en el plano físico tiene la propiedad de que las líneas de corriente, al cruzarse con ellas, se doblan sobre sí mismas haciendo físicamente imposible el movimiento.

Por tanto, la aparición de estas líneas en una región del espacio hace físicamente imposible la existencia, en ella, del movimiento proporcionado por la solución hodógrafa.

Las líneas límites aparecieron por primera vez en el ejemplo de Ringleb citado anteriormente y están dotadas de propiedades muy interesantes para el estudio del régimen transónico, las cuales han sido objeto de un estudio pormenorizado por parte de Tollmien (216) y Craggs (217), entre otros.

La figura I-10, b) y c) esquematiza la aparición de estas líneas en un caso típico, así como la forma característica de las mismas y de las de corrientes que las cruzan.

Otro caso que puede invalidar la correspondencia de la transformación hodógrafa es cuando se anula el jacobiano de la transformación inversa

$$J^{-1} \equiv \frac{\partial(q, \theta)}{\partial(x, y)} = 0. \quad [305]$$

Se demuestra, entonces, que, al igual de lo que ocurría en el caso anterior, salvo para singularidades aisladas, dicha anulación sólo puede producirse en régimen supersónico.

(216) W. TOLLMIEH: *Grenzlinien alibatischen Potentialströmungen*. ZAMM, 1941, págs. 140-52.

(217) J. W. CRAGGS: *The Breakdown of the Hodograph Transformation for Irrotational Compressible Fluid in Two Dimensions*. «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1948, págs. 360-79.

Las líneas de anulación, descubiertas por Lighthill (218) al estudiar el movimiento transónico en una tobera, se llaman «líneas de bifurcación» y se demuestra que se trata de curvas «características» especiales que, en el plano hodógrafo, son envolventes de líneas de corriente, las cuales se bifurcan en su punto de contacto con aquéllas.

Por lo demás, su interés, que es más matemático que físico, resulta bastante más limitado que el de las «líneas límite».

15. MOVIMIENTOS SUBSÓNICOS

Si el movimiento es subsónico $M < 1$ en todo el espacio, la ecuación [271] del potencial de velocidades es elíptica en él y el comportamiento del fluido es de naturaleza similar al de un fluido incompresible, para el mismo problema.

Las diferencias entre ambos casos son, por tanto, de índole principalmente cualitativa, pero muy difíciles de calcular exactamente, como se ha visto en el epígrafe precedente, a causa de la complejidad ya señalada de la ecuación [271] con respecto a su equivalente armónica [74] para los fluidos incompresibles.

Por ello, a diferencia de lo que ocurre en este último caso, el repertorio de soluciones exactas de que se dispone para los fluidos compresibles, como ya se ha indicado en el epígrafe precedente, es muy reducido y, además, los métodos aproximados de cálculo resultan, como es lógico, mucho más complicados.

Existen, sin embargo, algunas conclusiones de carácter general que derivan del comportamiento asintótico de las soluciones de [271] en el entorno del infinito y que encuentran aplicación en el caso muy importante de los movimientos resultantes de una corriente indefinida de velocidad V en el infinito, alrededor de obstáculos en reposo, cuya dificultad de resolución hemos comprobado en las páginas anteriores (219).

En particular, se demuestra que la paradoja de d'Alembert sigue siendo válida en el caso de un fluido compresible si el movimiento

(218) M. J. LIGHTHILL: *The Hodograph Transformation in Transonic Flow. I. Symmetrical Channels*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1947. págs. 323-41.

(219) Para una reseña histórica del desarrollo de estos conceptos, ver J. SERRIN, ya citado, págs. 199 y sigts.

es subsónico en todo el espacio (220), lo que ocurrirá, en general, para un obstáculo de forma dada, si el número de Mach M_∞ de la corriente incidente es inferior a un valor crítico M_{cr} , que depende exclusivamente de la forma de aquél.

Asimismo, se demuestra que subsiste en este caso la validez del Teorema de Kutta-Joukowski expresado en la ecuación [92], que da el valor de la sustentación para el movimiento plano alrededor de un perfil (221), pero el problema consiste entonces en determinar cómo influye el número de Mach M_∞ de la corriente incidente en el valor Γ_c de la circulación que se establecerá alrededor del perfil para la condición de Kutta-Jonkowski en el borde de salida, con respecto al valor Γ_c dado por la expresión [120] para el caso de un fluido incompresible.

Claro es que, para poder contestar a esta pregunta, es necesario obtener la solución completa del problema, al igual de lo que ocurría en el caso incompresible, al determinar, como vimos, el valor de la circulación que corresponde a un perfil de forma dada (222).

En resumen puede decirse que, en términos generales, el efecto de la compresibilidad consiste en aumentar la intensidad de la perturbación para un mismo obstáculo y en hacer que disminuya más lentamente con la distancia a él, por lo que cabe esperar, como así ocurre, según vamos a ver, que sea $\Gamma_c > \Gamma_c$.

En cuanto a la existencia, unicidad, principios variacionales y valores extremos de las soluciones de la ecuación diferencial del potencial de velocidades, son propiedades que han sido analizadas con gran profundidad para el caso de los movimientos planos, estacionarios,

(220) TH. THEODORSEN: *The Reaction on a Body in a Compressible Fluid*. «Jour. Aer. Sci.», 1937, págs. 239-40; F. I. FRANKL y M. KELDYSCH: *Die äussere Neumannsche Aufgabe für nichtlineare elliptische Differentialgleichungen mit Anwendung auf die Theorie der Flügel in kompressiblen Gas*. «Boll. Acad. Ciencias URSS», 1934, págs. 561-601; R. FINN y D. GILBARG: *Three-Dimensional Subsonic Flows, and Asymptotic Estimates for Elliptic Partial Differential Equations*. «Acta Math.», 1957, págs. 265 y sigts.

(221) V. J. SERRIN, ya citado, págs. 201, así como M. SCHIFFER, también citado, págs. 128 y sigts.

(222) Un reciente método de cálculo numérico de la solución para el caso compresible, utilizando la representación conforme, ha sido puesto a punto por C. C. LESS: *Plane Subcritical Flow Past a Lifting Aerofoil*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1968, págs. 877-401. Un resumen del mismo puede hallarse en la obra de S. N. CURLE y H. J. DAVIES: *Modern Fluid Dynamics*. Vol. II, págs. 102 y sigts.. Van Nostrand Reinhold, Co. Ltd., Londres, 1971.

en que se dispone de un conjunto de resultados muy completo, los cuales muestran también una correspondencia con sus homólogos de la ecuación armónica (223).

Teniendo presentes estos conceptos y puesto que en el epígrafe precedente se ha visto la complejidad que ofrece el cálculo de las soluciones exactas, incluso para el caso particular de movimientos planos y estacionarios, está bien justificado explorar las posibilidades prácticas de algunos métodos aproximados, como la que pasamos a describir seguidamente.

En aquellos casos en que sea aplicable la teoría de pequeñas perturbaciones, como ocurre en los movimientos alrededor de cuerpos fuselados, alas y perfiles, resulta válida, como hemos visto, la ecuación [267], la cual, mediante la transformación afín

$$x = \xi; \quad y = \frac{1}{\beta} \eta; \quad z = \frac{1}{\beta} \zeta, \quad [306]$$

donde es

$$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad [307]$$

se convierte en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \xi + \nabla^2 \eta + \nabla^2 \zeta = 0, \quad [308]$$

lo que permite reducir el movimiento compresible a uno equivalente para un fluido incompresible, sin más que aplicar aquella transformación a las condiciones de contorno del problema.

Se trata de la llamada «Analogía de Prandtl-Glauert» (224), de la que resulta, por ejemplo, que el efecto de la compresibilidad consiste en multiplicar el valor de la circulación Γ_k alrededor del perfil, que se produciría en el caso de un fluido incompresible, por el coe-

(223) Para un estudio detallado de estas difíciles y delicadas cuestiones, ver M. SCHIFFER, ya citado, págs. 92 y sigs.

(224) H. GLAUERT: *The Effect of Compressibility on the Lift of Airfoils*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1927, págs. 113 y sigs.; L. PRANDTL: *Über Strömungen, deren Geschwindigkeiten mit der Schallgeschwindigkeit vergleichbar sind*. «J. Aeron. Res. Inst. Univ. Tokio», 1900, págs. 14 y sigs.

ficiente $\frac{1}{\beta}$, con lo que se obtiene para la circulación Γ , del fluido compresible:

$$\Gamma = \frac{\Gamma_0}{\sqrt{1 - M_\infty^2}}. \quad [309]$$

La analogía de Prandtl-Glauert, de la que se ha hecho extenso uso en el estudio de los efectos de compresibilidad sobre perfiles, alas y cuerpos de revolución (225), proporciona resultados que se ven satisfactoriamente confirmados por las mediciones experimentales, especialmente cuando el número de Mach M_∞ no es muy grande; por ejemplo, para $M_\infty < 0,5$, en perfiles aerodinámicos de forma convencional.

Para valores mayores del número de Mach o en los movimientos en que no sea aplicable la teoría de las perturbaciones pequeñas, es necesario tomar en consideración los efectos no lineales de la compresibilidad, a cuyo fin se han puesto a punto un conjunto de procedimientos, especialmente en el caso de dos variables, que aquí nos limitaremos a comentar brevemente, remitiendo al lector a la extensa bibliografía disponible (226) para estudios más detallados, así como al método de Sell previamente citado, donde se hallará información complementaria.

Comenzando por mencionar la llamada «aproximación de Kármán-Tsien» (227), la cual, mediante la sustitución de la isentrópica del gas

$$\frac{p}{p_\infty} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad [310]$$

(225) Para una exposición sistemática ver, por ejemplo, S. GOLDSTEIN y A. D. YOUNG: *The Linear Perturbation Theory of Compressible Flow with Application to Wind Tunnel Interference*. «Rep. Mem.», núm. 190, Aero. Res. Coun., Londres, 1943. También, W. R. SEARS: *Small Perturbation Theory*, págs. 64 y siguientes del volumen VI de la Enciclopedia de Princeton. Asimismo, M. SHIFFER, ya citado, págs. 29 y sigts.

(226) Uno de los trabajos más completos es el de M. Schiffer, al que se ha hecho referencia en varias ocasiones, especialmente en su capítulo IV, págs. 92 y sigts.. Ver también el trabajo de M. J. LIGHTHILL: *Higher Approximations*. Sección E del volumen VI de la Enciclopedia de Princeton.

(227) H. S. TSIEH: *Two-dimensional Subsonic Flow of Compressible Fluids*. «J. Aer. Sci.», 1939, págs. 399-407, y TH. VON KÁRMÁN: *Compressibility Effects*

por la tangente

$$p - p_{\infty} = p_{\infty} \alpha^2 \left(\frac{1}{\rho_{\infty}} - \frac{1}{\rho} \right) \quad [311]$$

el punto $\left(p_{\infty}, \frac{1}{\rho_{\infty}} \right)$ que corresponde a la corriente principal, permite reducir el problema compresible a uno incompresible, alrededor de un obstáculo algo deformado, como ocurría en la analogía de Prandtl-Glauert.

El cálculo, que se lleva a cabo en el plano hodógrafo, resulta muy laborioso cuando hay que efectuar la transformación completa de un obstáculo en otro, pero se ha comprobado que ello no es necesario, porque se obtiene una buena aproximación, en general, haciendo que coincidan los contornos de los obstáculos en ambos planos. Ello permite relacionar, finalmente, el coeficiente de presión definido en [102]

$$C_p \equiv \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho_{\infty} V_{\infty}^2} \quad [312]$$

del régimen compresible, en cada punto del obstáculo con el C_{pi} del régimen incompresible para el mismo punto, a través de la expresión

$$C_p = \frac{C_{pi}}{\sqrt{1 - M_{\infty}^2} + \frac{M_{\infty}^2}{1 + \sqrt{1 - M_{\infty}^2}}} \cdot \frac{C_{pi}}{2} \quad [313]$$

Como puede comprobarse, esta expresión se reduce a la de Prandtl-Glauert en el caso $M_{\infty}^2 \ll 1$, y proporciona, además, resultados que muestran una excelente concordancia con las mediciones experimentales, para valores de M_{∞} mayores, en donde aquélla deja de ser aplicable, manteniendo su validez prácticamente hasta el punto límite del régimen subsónico $M_{\infty} = M_{cr}$, el cual determina Tsien

in *Aerodynamics*; idem id., 1941, págs. 337-56, así como COLL. WORKS, ya citado, vol. IV, págs. 127-64.

en función del valor mínimo del coeficiente de presión del régimen incompresible, para un obstáculo de forma dada (228).

Entre otras aproximaciones de orden superior al lineal, de las que se encontrará una descripción pormenorizada en el trabajo de Lighthill al que se ha hecho referencia, merecen citarse especialmente, por el extenso uso que se ha hecho de ellas y por los satisfactorios resultados que proporcionan, las dos siguientes, con cuya exposición resumida damos por terminado este epígrafe.

Al adoptar como medida de la velocidad un valor característico V de la corriente, la ecuación [271] del potencial de velocidades puede escribirse en la forma:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \frac{V^2}{a^2} L(\varphi), \quad [314]$$

donde $L(\varphi)$ está dada por la expresión

$$\left. \begin{aligned} L(\varphi) = & \varphi_x^2 \varphi_{xx} + \varphi_y^2 \varphi_{yy} + \varphi_z^2 \varphi_{zz} - \\ & - 2 \varphi_x \varphi_y \varphi_{xy} - 2 \varphi_y \varphi_z \varphi_{yz} - 2 \varphi_z \varphi_x \varphi_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad [315]$$

Ahora bien, si el número de Mach es pequeño con respecto a la unidad en todo el espacio, el coeficiente $\frac{V^2}{a^2}$ del segundo miembro de [314] es pequeño, lo que sugiere resolver el problema mediante un procedimiento de iteración que, partiendo de la solución incompresible

$$\varphi_{xx}^{(0)} + \varphi_{yy}^{(0)} + \varphi_{zz}^{(0)} = 0, \quad [316]$$

obtenga la aproximación $\varphi^{(n)}$ mediante la integración de la ecuación de Poisson

$$\varphi_{xx}^{(n)} + \varphi_{yy}^{(n)} + \varphi_{zz}^{(n)} = \frac{V^2}{a^2(n-1)} L[\varphi^{(n-1)}], \quad [317]$$

(228) Para un análisis crítico del significado matemático de la aproximación de Karman-Tsien y su comparación con otras aproximaciones no lineales, ver el trabajo de Lighthill, que se cita en (226).

para las condiciones de contorno que correspondan al problema en estudio.

Se trata del método llamado de Janzen (229) y Lord Rayleigh (230), que no se limita, naturalmente, a cuerpos de poco espesor relativo y del que se ha hecho extensa aplicación (231). La convergencia del método ha sido demostrada para casos de interés práctico (232).

La otra aproximación, que también ha permitido el estudio de un gran número de problemas de interés práctico con resultados muy satisfactorios, en este caso para cuerpos de poco espesor, es la de Hantzsche y Wendt (233), quienes expresan el potencial de velocidades en la forma de la ecuación [150] y calculan φ por iteración, mediante la ecuación

$$(1 - M_{\infty}^2) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = (\gamma - 1) M_{\infty}^2 \varphi_x (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) + 2 M_{\infty}^2 (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2), \quad [318]$$

empleando un procedimiento similar al que se ha descrito antes para el método de Janzen y Lord Rayleigh.

16. MOVIMIENTOS SUPERSÓNICOS. APROXIMACIÓN LINEAL

Como se ha visto en el epígrafe 13, en el régimen supersónico el sistema diferencial del movimiento es del tipo hiperbólico.

Ello facilita grandemente, en general, el tratamiento matemático de los problemas con respecto al régimen subsónico, al ocurrir que los efectos de las condiciones de contorno sobre una superficie determinada quedan circunscritos al espacio limitado por las superficies características que pasan por su contorno.

(229) O. JANZEN: *Beitrag zu einer Theorie der Stationären Strömung kompressibler Flüssigkeiten*. «Phys. Zeits.», 1913, págs. 689-48.

(230) LORD RAYLEIGH: *On the Flow of Compressible Fluid Past an Obstacle*. «Phil. Mag.», 1916, págs. 1-6.

(231) Para mayores detalles sobre el método y algunos resultados concretos, ver el trabajo de LIGHTHILL, ya citado, págs. 352-58.

(232) Ver el trabajo de Frank y Keldysch que se menciona al comienzo de este epígrafe.

(233) W. HANTZSCHE y H. WENDT: *Der Kompressibilitätseinfluss für dünn-wenig gekrümmte Profile bei Unterschallgeschwindigkeit*. ZAMM. 1942.

Además se cuenta, en este caso, con el poderoso instrumento de integración que proporcionan las características, especialmente en los problemas en dos variables tales como los movimientos planos, los de revolución y los unidimensionales no estacionarios.

Por ello ocurre, en definitiva, que el repertorio de problemas que se pueden resolver exactamente es mucho más amplio, como vamos a ver, en el régimen supersónico que en el subsónico y los métodos de cálculo también resultan, en general, de aplicación más sencilla.

Las propiedades diferenciales más específicas de los movimientos supersónicos son la existencia de una «resistencia de onda», que invalida la paradoja de d'Alembert en este régimen, y la formación de «ondas de choque» (234).

Empezando por la primera de estas propiedades, consideraremos a título de ejemplo, el caso sencillo de un perfil aerodinámico de poco espesor (235), ligeramente inclinado con respecto a una corriente uniforme, supersónica $M_\infty > 1$, bidimensional y estacionaria, como el que ilustra la figura I-11.

Si el ángulo α de inclinación del perfil es suficientemente pequeño, resulta aplicable al caso el método de las pequeñas perturbaciones, con lo que la ecuación del potencial $\phi(x, y)$ de velocidades se reduce a

$$(M_\infty^2 - 1) \phi_{xx} - \phi_{yy} = 0. \quad [319]$$

(234) Como bibliografía general para este epígrafe pueden consultarse, además de las que se citan en el epígrafe 18, las obras de A. FERRI: *Elements of Aerodynamics of Supersonic Flows*. The Macmillan Co. Nueva York, 1948. También, el ilustrativo trabajo de VON KARMAN, con una bibliografía muy completa hasta aquel momento: *Supersonic Aerodynamics. Principles and Applications*. «Jour. Aer. Sci.», 1947, págs. 373-409, y COLL. WORKS, ya citado, vol. IV, páginas 271-326.

(235) La teoría lineal de los perfiles en régimen supersónico fue inicialmente mente desarrollada por el Prof. Ackeret, del Instituto Politécnico de Zurich, que también construyó el primer túnel aerodinámico supersónico. J. ACKERET: *Über Luftkräfte auf Flügel, die mit grösserer als Schallgeschwindigkeit bewegt werden*. «Z. Flugtechn. und Motorl.», 1925, págs. 72-74. Existe traducción inglesa en «NACA Tech. Mem.», núm. 317. También *Über Luftkräfte bei sehr grossen Geschwindigkeiten, insbesondere bei ebene Strömungen*. «Helv. Phys. Acta.», 1928, págs. 301-22.

Se trata, pues, de la ecuación de ondas, cuya solución general está dada por la expresión de d'Alembert.

$$\varphi(x, y) = f(x - \beta y) + g(x + \beta y), \quad [320]$$

en donde el parámetro β se expresa en función del número de Mach en la forma

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}. \quad [321]$$

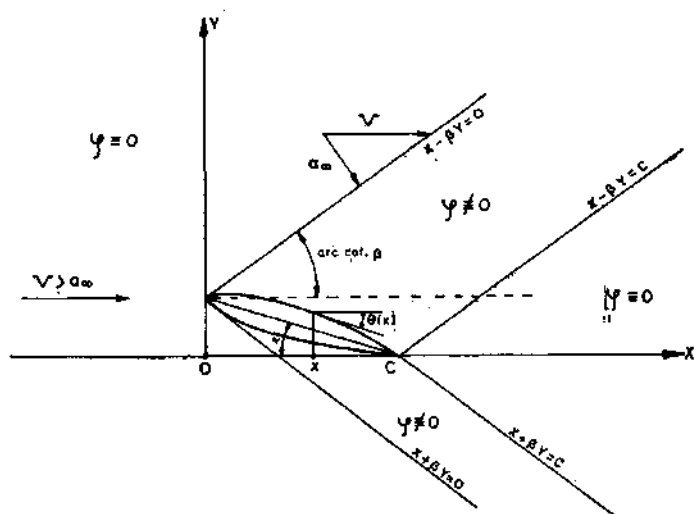


Fig. 1-11.—Régimen supersónico. Teoría del perfil.

En la expresión [320], f y g son dos funciones arbitrarias, que hay que determinar por las condiciones de contorno, en tanto que las rectas de Mach

$$x - \beta y = C_1, \quad x + \beta y = C_2, \quad [322]$$

constituyen los haces de «características» de la ecuación hiperbólica [319], y están dotadas de la propiedad, como se vio en el epígrafe 13 y se comprueba inmediatamente, de que su velocidad v_n de propagación a través del fluido es, precisamente, la velocidad a del sonido en el gas.

Las condiciones de contorno son, evidentemente, las siguientes:

1.^a) $x \rightarrow -\infty$:

$$\varphi_x \rightarrow 0, \quad \varphi_y \rightarrow 0; \quad [323]$$

$$2.^*) \quad y = 0; \quad 0 \leq x \leq c:$$

$$\varphi_y(x, 0) = -V \cdot \theta(x),$$

siendo $\theta(x)$ la pendiente local del perfil en el punto x .

3.^*) Fuera del intervalo $0 \leq x \leq c$ del perfil, φ_x debe ser continua sobre el eje x , en virtud de [296], puesto que la presión es continua al cruzar dicho eje. En cambio, tal condición no se puede exigir, naturalmente en el intervalo $0 \leq x \leq c$ del perfil.

Por tanto, no se trata aquí estrictamente de un problema de Cauchy, puesto que la doble condición de los valores de φ y de $\varphi_n \simeq \varphi_y$ sobre el contorno del perfil que aquél exigiría, se sustituyen por una condición de anulación de la perturbación a gran distancia delante del perfil y por la de continuidad de la presión sobre el eje x , excepto en la zona del perfil.

La primera de estas condiciones hace que la función $g(x + \beta y)$ se reduzca a una constante, que puede suponerse nula, en el semiplano superior $y \geq 0$.

Análogamente ocurre con $f(x - \beta y)$ en el inferior, $y \leq 0$.

Por tanto, la solución está dada por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} y \geq 0: \quad \varphi(x, y) &= f(x - \beta y); \\ y \leq 0: \quad \varphi(x, y) &= g(x + \beta y), \end{aligned} \right\} \quad [324]$$

donde los valores de f y g deben determinarse por la segunda condición de [323] en el intervalo $0 \leq x \leq c$, y por la tercera fuera del mismo.

Como se comprueba fácilmente, la solución resulta ser:

Para $x < 0$ y para $x > c$:

$$f = g = 0.$$

Para $x < 0$ y para $x > c$:

$$\left. \begin{aligned} y \geq 0, \quad \varphi(x, y) &= -\frac{V}{\beta} \int_0^{x-\beta y} \theta^+(\xi) d\xi; \\ y \leq 0, \quad \varphi(x, y) &= \frac{V}{\beta} \int_0^{x+\beta y} \theta^-(\xi) d\xi, \end{aligned} \right\} \quad [325]$$

donde hay que distinguir entre $\theta^+(\xi)$ y $\theta^-(\xi)$, porque las pendientes locales de las dos caras del perfil son distintas, a menos que aquél sea de espesor nulo.

Por tanto, la solución no nula queda circunscrita a la doble banda que se indica en la figura I-11, limitada por las características que arrancan de los bordes de ataque y salida del perfil, respectivamente.

El coeficiente C_L de sustentación del perfil está dado, como se comprueba fácilmente, por la expresión

$$C_L = \frac{1}{c} \int_0^c [C_p^-(x) - C_p^+(x)] dx = \frac{4\alpha}{V}, \quad [326]$$

en donde α , como muestra la citada figura, es el ángulo de ataque de la corriente incidente sobre el perfil.

Por tanto, en la teoría lineal, dicho coeficiente resulta ser independiente de la forma del perfil y dependiente, tan sólo, de su inclinación con respecto a la corriente.

La resistencia aerodinámica es, evidentemente, la resultante de las componentes en la dirección del movimiento, de las presiones sobre ambas caras del perfil. Por tanto, su coeficiente C_D está dado por la expresión:

$$\begin{aligned} C_D &= \frac{1}{c} \int_0^c [C_p^+(x) \theta^+(x) - C_p^-(x) \theta^-(x)] dx = \\ &= \frac{2}{\beta c} \int_0^c [(\theta^+(x))^2 + (\theta^-(x))^2] dx > 0. \end{aligned} \quad [327]$$

Resulta así que, en régimen supersónico existe siempre una resistencia, que se llama «de onda» porque procede de la energía propagada al fluido a través de las características [322] (236).

(236) Para un cálculo de esa energía ver, por ejemplo, G. I. TAYLOR: *Applications to Aeronautics of Ackeret's Theory of Airfoils Moving at Speed Greater than that of Sound*. Rep. and Mem., núm. 1.467 «Aer. Res. Council», 1932.

En particular, como ilustra la figura I-11 y a diferencia de lo que pasaba en el régimen subsónico, la perturbación del fluido originada por el obstáculo, la cual queda circunscrita a la banda comprendida entre las características que arrancan de los bordes de ataque y de salida, se traslada sin amortiguación hasta el infinito, lo que permitiría calcular la sustentación y resistencia dedas por las ecuaciones [326] y [327], respectivamente, por el mismo procedimiento que allí se siguió para demostrar el teorema de Kutta-Joukowski y la paradoja d'Alembert.

Otra característica importante de las corrientes supersónicas, que ilustra bien el ejemplo y que tiene carácter muy general, es que, puesto que las pequeñas perturbaciones se propagan a la velocidad del sonido, la masa fluida situada por delante de las características que arrancan del borde de ataque del perfil ignora la presencia de éste. Es la regla que von Karman llama de las «señales prohibidas» (237).

Por último, también se comprueba, lo que es una norma bastante general (238), que el comportamiento de la corriente en la región superior es totalmente independiente de la forma de la cara inferior del perfil y recíprocamente.

En Teoría Lineal, el movimiento supersónico alrededor de cuerpos fuselados con simetría de revolución o sin ella, se resuelve mediante superposición de una distribución de soluciones elementales sobre el eje de revolución, por extensión al régimen supersónico (239) del método de von Karman para el caso de un fluido incompresible, que se vio en el epígrafe 9.

Como se trata de un problema sencillo, aunque importante para el estudio, por ejemplo, del comportamiento de los proyectiles y además se halla recogido extensamente en la bibliografía, remitimos a ella (240) señalando que la Teoría Lineal permite resolver el problema variacional de determinar la forma de la sección meridiana

(237) Ver la referencia citada al comienzo de este epígrafe.

(238) En tres dimensiones ello depende de que el borde de ataque del ala forme o no con el eje x un ángulo mayor que el de Mach.

(239) TH. VON KARMAN y N. B. MOORE: *Resistance of Slender Bodies Moving at Supersonic Velocities*, «Trans. Amer. Soc. Engrs.», 1932, págs. 303-10. Coll. Works. Vol. I, págs. 376-93.

(240) Ver también Schiffer y Ward o Ferri, ya citados, así como el trabajo de revisión de M. C. ADAMS y W. R. SEARS: *Slender-Body Theory. Review and Extension* «Jour. Aer. Sci.», 1953, págs. 85-98.

del proyectil que produce una resistencia de onda mínima, dados el diámetro de la base y la longitud de aquél.

Pasemos, en cambio, a considerar el problema del ala de envergadura finita, que se muestra en la figura I-12, en régimen estacionario, cuya resolución exige integrar la ecuación de ondas en tres variables:

$$(M^2_{\infty} - 1) \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 0, \quad [328]$$

bajo las condiciones de contorno que adapten el deslizamiento del gas sobre la superficie S del ala a los requerimientos de la geometría de ésta.

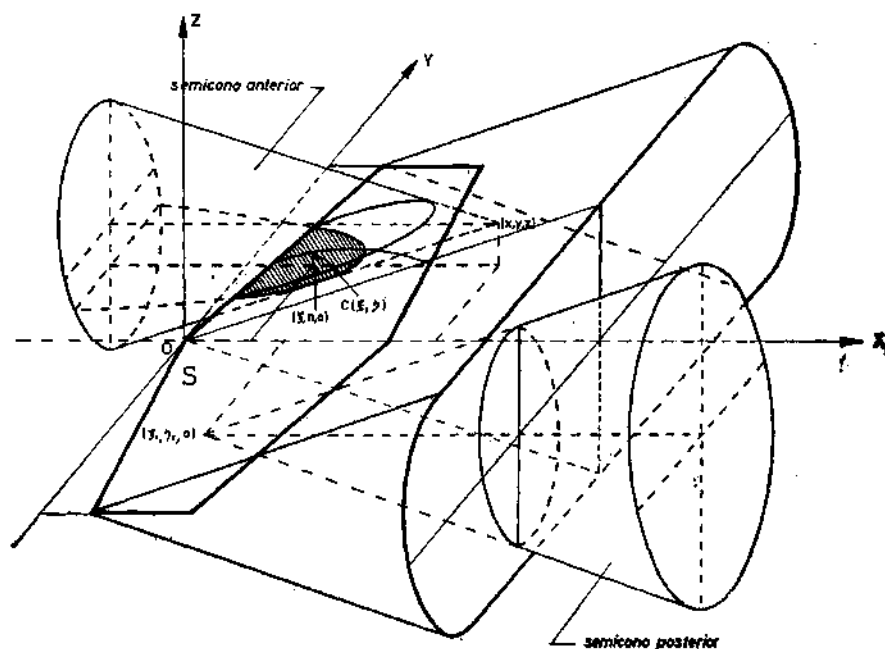


Fig. I-12.—Régimen supersónico. Teoría del ala de envergadura finita.

El «cono característico» de esta ecuación, que pasa por el punto (ξ, η, ζ) , es el cono de Mach:

$$(x - \xi)^2 - \beta^2 (y - \eta)^2 - \beta^2 (z - \zeta)^2 = 0, \quad [329]$$

donde β tiene el significado atribuido en la expresión [321] y una propiedad del carácter hiperbólico de la ecuación [328] es que el valor de φ en el vértice (x, y, z) del cono [329] está determinado

exclusivamente por lo que ocurra en el interior del mismo, como muestra la figura I-12.

Recíprocamente, lo que ocurre en el punto $(\xi_1, \eta_1, 0)$ de la misma, sólo puede influir en la solución, dentro de la zona abarcada por el cono que emana de él, propiedad que constituye la manifestación de la regla llamada de las «señales prohibidas» a que se aludió anteriormente.

Así las cosas, el problema clásico de Cauchy (241), de condiciones iniciales (242), consiste en calcular la solución de $\varphi(x, y, z)$, conocidos los valores que esta función y su derivada normal toman sobre una zona Σ del plano $x = 0$.

Y la solución, dados tales valores, está determinada en el interior del espacio limitado por Σ y por la superficie característica que pasa por el contorno C de aquélla.

Por otra parte, el problema de Cauchy se generaliza, como es sabido (243), a otras superficies distintas de los planos $x = \text{const.}$, de las llamadas «especialmente orientadas», es decir, tales que corten a todas las generatrices de uno de los dos semiconos característicos.

Concretamente, como se vio en el epígrafe 9, en el caso del ala, las condiciones de contorno se dan sobre el plano $z = 0$ que, al ser paralelo al eje del cono de Mach, constituye un caso límite de superficies espacialmente orientadas, cuya sección por aquel cono es una hipérbola que, al ser indefinida, obliga a introducir determinadas limitaciones para las condiciones iniciales en el entorno del infinito.

IPues bien, para generalizar la solución clásica de Cauchy a otras superficies de contornos tales como la del problema del ala que acabamos de enunciar, el punto de partida, al igual de lo que ocurría con la expresión [80] del epígrafe 6 en el caso de un fluido incompresible, lo proporciona la segunda fórmula de Green, la cual, en el caso de la ecuación de ondas, adopta la forma (244):

$$\iint_{\Sigma} \left(\varphi \frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} - \varphi' \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0, \quad [330]$$

(241) Para las soluciones de este problema ver, «por ejemplo, Godounov o cualquier otra de las obras que se citan en el epígrafe 13.

(242) Es claro que x juega en [328] el mismo papel que el tiempo en la ecuación clásica de ondas de la Física matemática.

(243) Ver, por ejemplo, MIKHILIN, ya citado, págs. 521 y sigts.

(244) Idem íd., págs. 210 y sigts.

donde φ y φ' son dos soluciones de [328], regulares, así como sus derivadas, en el espacio limitado por la superficie Σ y v es la dirección de la «conormal» a ésta, es decir, la dirección de cosenos directores $(-n_x, n_y, n_z)$, siendo (n_x, n_y, n_z) los de la normal $\mathbf{n}$ a Σ .

Para resolver el problema a partir de esta ecuación es necesario buscar una solución elemental, al igual de lo que ocurría con la ecuación de Laplace en el régimen incompresible, que juegue aquí el mismo papel que allí desempeñaba la solución del potencial,

$$\frac{1}{r} = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{-1/2}.$$

Dicha solución fue obtenida por Volterra (245), y está dada por la expresión:

$$\varphi'(x, y, z) = \text{arc. cosh} \frac{x - \xi}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}}, \quad [331]$$

la cual satisface a la ecuación [328] y además tiene una singularidad, no ya en el punto (ξ, η, ζ) , como ocurre para $\frac{1}{r}$, sino sobre todo el eje $(y = \eta, z = \zeta)$ del cono de Mach (329).

Y también aquí, al igual de lo que ocurría con la singularidad puntual de $\frac{1}{r}$, la singularidad sobre la generatriz permite obtener la solución al problema de Cauchy, la cual se demuestra que está dada por la expresión (246):

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \iint \left[\frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial v} \text{arc. cosh} \frac{x - \xi}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \varphi(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial v} \text{arc. cosh} \frac{x - \xi}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}} \right] d\sigma \right\} \quad [332]$$

(245) Ver V. VOLTERRA: *Leçons sur l'Intégration des Equations Différentielles aux Dérivées Partielles*. Hermann, Paris, 1912.

(246) J. V. SMITH, ya citado, pág. 136.

En particular, en el caso del ala, teniendo presente que es $\zeta = 0$, puesto que Σ está situada sobre el plano $z = 0$ y que, al cambiar en [332] z por $-z$ las dos hipérbolas de intersección de los dos conos de Mach que resultan con el plano $z = 0$ coinciden, se obtiene, finalmente, la siguiente expresión, para la solución general del problema (247):

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma} [\varphi^+(\xi, \eta) - \varphi^-(\xi, \eta)] \frac{(x - \xi) \cdot z \cdot d\xi d\eta}{[(y - \eta)^2 + z^2] \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2(y - \eta)^2 - \beta^2 z^2}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma} [\varphi_z^+(\xi, \eta) - \varphi_z^-(\xi, \eta)] \operatorname{arc. cosh} \frac{(x - \xi)}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}} \cdot d\xi d\eta, \quad [333]$$

en donde las integrales hay que extenderlas sobre la superficie Σ del plano $z = 0$ limitada por la hipérbola de la intersección del mismo con el semicono de Mach situado aguas arriba del punto (x, y, z) de la figura I-12, con lo que resulta, además, que el contorno del área de integración varía al hacerlo la posición del punto donde se calcula el valor del potencial $\varphi(x, y, z)$.

Por otra parte, la perturbación del ala queda limitada a la región del espacio situada aguas abajo de la superficie característica que arranca del punto más avanzado de aquélla, como también ilustra la figura I-12.

Para resolver el problema es necesario, ahora, aplicar la expresión [333] a la superficie del ala, como se hacía en el caso incomprendible del epígrafe 9, con objeto de relacionar con la geometría de aquélla el salto $(\varphi^+ - \varphi^-)$ del potencial o el $(\varphi_z^+ - \varphi_z^-)$ de su velocidad normal al ala.

A tal efecto, debe tenerse presente que, según muestra la expresión [333], es necesario calcular las derivadas de cada una de las

(247) Ver, por ejemplo, HEASLET y LOMAX, capítulo D del volumen VI de la Enciclopedia Princeton, o CURLE y DAVIES, ya citado, págs. 45 y sigts., donde se encontrarán, además, las propiedades de unicidad de las soluciones.

dos integrales de la misma con respecto al parámetro x , del que depende, además, como hemos visto, el contorno de integración.

Empezando por la segunda de tales integrales y teniendo presente que el núcleo $\text{arc} \cdot \cosh \frac{(x - \xi)}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}}$ se anula sobre el cono de Mach y que su derivada con respecto a x :

$$\frac{\partial}{\partial x} \cdot \text{arc. cosh} \frac{(x - \xi)}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 (y - \eta)^2 - \beta^2 z^2}} \quad [334]$$

es singular sobre el contorno C de Σ , pero integrable, resulta que las operaciones de derivación con respecto a x y de integración con respecto a (ξ, η) , son permutables, con lo que se obtiene, finalmente,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_s(x, y, z) &\equiv -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \int_{\Sigma} [\varphi_s^+ - \varphi_s^-] \text{arc. cosh} \\ &\quad \frac{(x - \xi)}{\beta \sqrt{(y - \eta)^2 + z^2}} \cdot d\xi d\eta = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int \int_{\Sigma} [\varphi_s^+(\xi, \eta) - \varphi_s^-(\xi, \eta)] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 (y - \eta)^2 - \beta^2 z^2}} \cdot \end{aligned} \right\} \quad [335]$$

Esta expresión es simétrica con respecto al plano $z = 0$, puesto que no varía al cambiar z por $-z$ y corresponde a una distribución de «fuentes supersónicas» de intensidad local $(\varphi_s^+ - \varphi_s^-)$, repartidas sobre la superficie del ala.

Por consiguiente, la expresión anterior permite resolver el problema de la corriente alrededor de un ala simétrica, de espesor $\delta(\xi, \eta)$, bajo un ángulo de ataque nulo.

En efecto, como se vio en el epígrafe 9, la condición de tangencia de la velocidad a la superficie del ala se expresa en la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} V \delta_{\xi}(\xi, \eta) &= w^+(\xi, \eta) = -w^-(\xi, \eta) = \\ &= \frac{1}{2} [w^+(\xi, \eta) - w^-(\xi, \eta)] \equiv \frac{1}{2} [\varphi_z^+(\xi, \eta) - \varphi_z^-(\xi, \eta)], \end{aligned} \right\} \quad [336]$$

con lo que se obtiene, finalmente, la solución

$$\varphi_s(x, y, z) = -\frac{V}{2\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\delta_{\xi}(\xi, \eta) \cdot d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2(y-\eta)^2 - \beta^2 z^2}} \quad [337]$$

que permite calcular la distribución de presiones sobre la superficie del ala y, por tanto, la «resistencia de onda» de la misma (248).

Pasando ahora a considerar la primera de las dos integrales de la solución general [333], la cual corresponde a un problema anti-simétrico respecto de z :

$$\varphi_a(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \iint_{\Sigma} \frac{(\varphi^+ - \varphi^-) \cdot (x-\xi) \cdot z \cdot d\xi d\eta}{[(y-\eta)^2 + z^2] \sqrt{(x-\xi)^2 - \beta^2(y-\eta)^2 - \beta^2 z^2}} \quad [338]$$

como es característico de los cálculos de sustentación, la cuestión resulta bastante más complicada en este caso, porque no pueden invertirse los órdenes de la derivación respecto de x y de la integración respecto de ξ, η , como se hizo antes, ya que, al hacerlo así, resulta una integral impropriamente singular.

Por tanto, hay que proceder primero a la integración o bien aplicar, como se hace habitualmente, la Teoría de la Parte Finita de una integral singular, introducida por Hadamard (249), precisamente para tratar las soluciones de las ecuaciones de tipo hiperbólico.

(248) A. E. PUCKETT: *Supersonic Wave Drag of Thin Airfoils*. «Jour. Aer. Sci.», 1946, págs. 475-84.

(249) Ver la referencia ya citada, págs. 184 y sigts., así como Lomax, Heaslet y Fuller, también citados.

La aplicación de esta Teoría, cuya descripción se hallará en la bibliografía citada, hace posible la permutación de las operaciones de derivación e integración en expresiones como la [338] y permite generalizar al régimen supersónico los procedimientos de distribución continua de dobletes y torbellinos que tan fecundos resultaron en el régimen subsónico, para tratar los problemas de la sustentación.

Resulta imposible extenderse aquí en la exposición de tales procedimientos de cálculo y de los resultados obtenidos, por lo que remitimos, una vez más, a la bibliografía citada (250).

Si debemos mencionar, especialmente, por tratarse de un caso de gran interés tecnológico, el de las alas de forma en planta triangular o alas en «delta», como se las designa también habitualmente, cuyo tratamiento analítico se ve considerablemente facilitado mediante la aplicación de la Teoría de las llamadas «corrientes cónicas» (251), cuando las propiedades geométricas del ala son las mismas sobre todos los puntos de cada rayo que emana de su vértice, en cuyo caso la corriente tiene la misma propiedad, lo que reduce en una unidad el número de variables independientes del problema (252).

Concretamente, para el tratamiento de este problema puede hacerse uso del método de la Representación Conforme, con procedimientos similares a los que se indicaron en los epígrafes 8 y 9 para los Movimientos Planos (253).

Antes de terminar este punto diremos que el comportamiento de las soluciones es esencialmente distinto según que los bordes de ataque, así como los de salida, tengan carácter subsónico o supersónico, de acuerdo con las definiciones que ilustra la figura I-13.

En particular, se comprueba que en los bordes subsónicos las soluciones se comportan cualitativamente como en el régimen incompresible, es decir, con una singularidad del tipo $d^{-\frac{1}{2}}$ en los de ata-

(250) Especialmente el trabajo de HEASLET y LOMAX, ya citado, del volumen VI de la Enciclopedia de Princeton, que contiene seguramente la exposición más completa, junto con una bibliografía seleccionada.

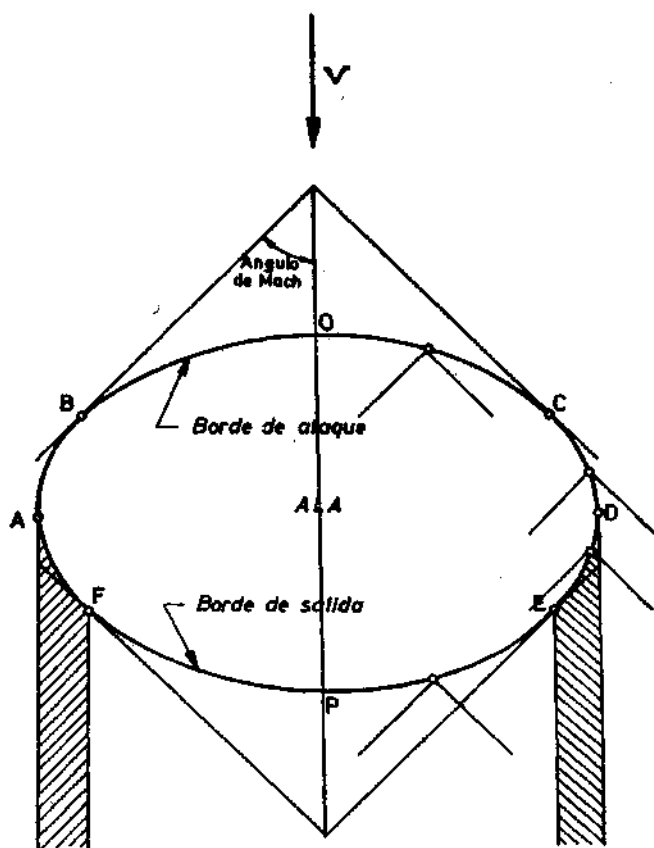
(251) A. BUSEMANN: *Infinitesimale kegelige Überschallströmung*. «Luft. Forsch.», 1943, págs. 105-20.

(252) H. J. STEWART: *The Lift of a Delta-Wing at Supersonic Speed*. «Quart. Jour. Appl. Math.», 1946, págs. 246-54.

(253) Ver, por ejemplo, WARD, págs. 135 y sigts., y SCHIFFER, págs. 49 y siguientes, ya citados.

que, donde d es la distancia al borde y cumpliendo la condición de Kutta-Joukowski, que hay que imponer en dicho caso, en los de salida.

Las alas en delta constituyen un caso particular del grupo más general de soluciones que forman las alas en flecha, cuyo empleo



- AOD = Borde de ataque
- BOC = Borde de ataque supersónico
- AB y CD = Bordes de ataques subsónicos
- APD = Borde de salida
- FPE = Borde de salida supersónico
- AF y ED = Bordes de salida subsónicos
- Áreas rayadas = Estelas de torbellinos

Fig. I-13.—Régimen supersónico. Clasificación de los bordes del ala.

se generalizó, primero para mitigar los efectos adversos de la compresibilidad, cuando la velocidad del vuelo se acerca a la del sonido, y se extendió después al régimen supersónico, para disminuir la resistencia de onda.

Por ello se trata de formas cuyo comportamiento aerodinámico, así como el de su combinación con fuselajes y otros elementos, han sido objeto de un estudio muy exhaustivo, sobre el que existe abundante bibliografía (254).

Por lo que respecta al problema del movimiento no estacionario, tiene también una gran importancia en el régimen supersónico, y ello por las mismas razones que se indicaban en el epígrafe 9, por lo que se ha prestado un gran esfuerzo a su estudio durante las últimas décadas.

Como se puso de manifiesto en [270], en el caso de un gas, la ecuación linealizada del potencial de velocidades para un movimiento no estacionario es distinta de la (267) correspondiente al régimen estacionario, lo que introduce una dificultad adicional en este caso, tanto si el régimen es subsónico como si es supersónico.

Por ejemplo, al ensayar en el régimen supersónico soluciones periódicas de frecuencia circular ω , de la forma,

$$\varphi(x, y, z, t) = e^{i\omega t} \bar{\varphi}(x, y, z), \quad [339]$$

como se hizo en [173], para el cálculo de la amplitud $\bar{\varphi}(x, y, z)$ del potencial de velocidades se obtiene una ecuación de Helmholtz, de la forma:

$$\beta^2 \bar{\varphi}_{xx} - \bar{\varphi}_{yy} - \bar{\varphi}_{zz} - 2i\omega \frac{M_\infty}{a_\infty} \bar{\varphi} - \omega^2 \frac{M_\infty^2}{a_\infty^2} \bar{\varphi} = 0. \quad [340]$$

En cambio, por lo que se refiere al régimen supersónico, existe la simplificación de que, cuando el borde de salida es supersónico, no hay necesidad de preocuparse de la influencia en el ala de la estela de torbellinos libres, a causa de la regla de las señales prohibidas.

(254) Ver, por ejemplo, el excelente trabajo de R. C. LOCK y J. BRIDGWATER, del Nat. Phys. Lab. de Tedington: *Theory of Aerodynamic Design for Swept-Winged Aircraft at Transonic and Supersonic Speeds*. «Progress in Aeronautical Sciences», vol. VIII, págs. 139-228, Pergamon Press. Londres.

Por otra parte, si se tiene presente que las perturbaciones temporales de las condiciones de contorno se propagan a la masa fluida con una velocidad finita α , en lugar de hacerlo instantáneamente como ocurría en el régimen incompresible, es claro que hay que tomar precauciones especiales en cuanto a la aplicabilidad del método de linealización al tratamiento del problema.

Tales precauciones fueron inicialmente analizadas por Lin et al. (255), y se hallarán, junto a un desarrollo muy sistemático y completo del movimiento supersónico no estacionario en dos y tres dimensiones, en una obra del prof. Miles (256), a la que remitimos al lector que quiera profundizar más en la materia y donde encontrará, además, una bibliografía muy completa, hasta la fecha de su publicación.

Para terminar con el problema de la sustentación en régimen supersónico, bien sea estacionario o no, hay que remitir a la bibliografía que se dio en el epígrafe 9, donde una parte importante de la más reciente incluye también el tratamiento de los fluidos compresibles en régimen subsónico y supersónico, tanto la relativa a las alas como la que se refiere a otras formas y a los fenómenos de interacción entre componentes.

Por último, también hay que señalar las extensiones del modelo descrito que se han llevado a cabo, para el régimen supersónico, con objeto de analizar las perturbaciones de orden superior (257), si bien tales extensiones tienen interés más limitado que en régimen subsónico, en tanto no se tome en consideración la influencia de las ondas de choque, cuyo estudio constituye el objeto del epígrafe 18.

17. MOVIMIENTOS SUPERSÓNICOS. MÉTODO DE LAS CARACTERÍSTICAS

Se ha indicado en el epígrafe 13 que el carácter hiperbólico propio del régimen supersónico proporciona un valioso instrumento de in-

(255) C. C. LIN, E. REISSNER y H. S. TSIEN: *On Two-Dimensional Non-Steady Motion of a Slender Body in a Compressible Fluid*, «Jour. Math. Phys.», 1948, págs. 220-31.

(256) J. W. MILES: *The Potential Theory of Unsteady Supersonic Flow*. Cambridge Univ. Press., 1959.

(257) Una descripción de tal extensión, con la bibliografía correspondiente, se hallará, por ejemplo, en el volumen VI de la Enciclopedia de Princeton.

tegración de las ecuaciones del movimiento, mediante el empleo de las líneas o superficies características del mismo.

En el epígrafe precedente se ha hecho ya uso de este método para resolver, en aproximación lineal, los problemas de las Teorías del Perfil, del Ala de Envergadura Finita y de los Cuerpos de Revolución, que corresponden a la integración de la ecuación homogénea de ondas, con coeficientes constantes.

Ahora se trata de exponer los fundamentos de su generalización al tratamiento de problemas no lineales, porque en la Dinámica de Gases se hace un uso muy amplio del mismo, especialmente en los casos de dos variables en que constituye un instrumento en cierto modo ideal para la integración numérica de las ecuaciones.

Efectivamente, si bien es cierto que el método de las Características puede requerir, en algunas ocasiones, mayor trabajo de cálculo que otros procedimientos numéricos, tiene la ventaja de que la estabilidad (258) y convergencia de aquél están automáticamente garantizadas, por lo que, en cierto modo, proporciona un instrumento de contraste de los demás algoritmos.

El punto de partida para la generalización de la aproximación lineal aplicada en el epígrafe anterior, se encuentra en el célebre trabajo de Riemann, de hace un siglo, sobre la propagación de ondas planas de amplitud finita en gases (259).

El problema tratado por Riemann es el de la propagación de ondas planas a través de una masa de gas, por lo que las únicas variables del movimiento son la distancia x en dirección normal a la onda, y el tiempo t .

Si el movimiento es isentrópico, las ecuaciones del mismo son las que resultan de particularizar al caso las generales [263] y [262], con lo que se obtiene el sistema:

$$\frac{1}{a^2} \varphi_{tt} + 2 \frac{v}{a} \varphi_{tx} - \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} = 0 \quad [341]$$

(258) K. COURANT, K. FRIEDRICHs y H. LEWY: *Über die partiellen Differenzengleichungen der Mathematischen Physik*. «Math. Ann.», 1928, págs. 32-74. También G. E. FORSYTHE y W. R. WASON: *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. John Wiley and Sons. Nueva York, 1960

(259) B. RIEMANN: *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*. «Abh. Ges. Wiss. Got.», 1860.

y

$$\varphi_t + \frac{1}{2} v^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \text{const.}, \quad [342]$$

en donde $v \equiv \varphi_x$ es, evidentemente, la única componente no nula de la velocidad del gas.

Si es

$$f(x, t) = 0 \quad [343]$$

la ecuación de una superficie característica, su velocidad de propagación

$$v_p = - \frac{f_t}{f_x} \quad [344]$$

está dada, en virtud de [273], por la ecuación

$$v_p^2 - 2 v v_p - (a^2 - v^2) = 0, \quad [345]$$

cuyas raíces muestran que existen dos velocidades de propagación distintas, correspondientes, respectivamente, a las ondas progresivas y regresivas:

$$\left. \begin{aligned} v_p^+ &= v + a; \\ v_p^- &= v - a. \end{aligned} \right\} \quad [346]$$

Por otra parte, en el plano que podríamos llamar «hodógrafo» para este problema, es decir, en el plano de coordenadas φ_x y φ_t , las pendientes de las características en que se transforman las curvas [343], están dadas por la ecuación diferencial (260)

$$\frac{d a}{d v} = \pm \frac{\gamma - 1}{2}, \quad [348]$$

(260) Además de la bibliografía genérica que se ha señalado en el epígrafe 13, se recomiendan de modo especial para este epígrafe, las obras siguientes: R. COURANT y K. O. FRIEDRICHS: *Supersonic Flow and Shock Waves*, Interscience Publ. Inc. Nueva York, 1948; A. FERRI: *The Method of Characteristics*, Cap. G,

cuya integración proporciona los célebres «invariantes» de Riemann:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} v + \frac{a}{\gamma - 1} &= \alpha; \\ \frac{1}{2} v - \frac{a}{\gamma - 1} &= \beta, \end{aligned} \right\} \quad [349]$$

es decir, dos magnitudes fluidas que permanecen constantes sobre las características de las ondas progresivas y regresivas, respectivamente (261).

De ellas se obtienen los siguientes valores para v y a :

$$\left. \begin{aligned} v &= \alpha + \beta; \\ a &= \frac{\gamma - 1}{2} (\alpha - \beta), \end{aligned} \right\} \quad [350]$$

en cada punto (α, β) de intersección de las dos características $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, las cuales se transforman sobre el plano físico (x, t) en los dos haces de curvas dados respectivamente por las ecuaciones

$$\frac{dx}{dt} = v \pm a, \quad [351]$$

en virtud de [346], con lo que el problema queda resuelto, una vez fijadas las condiciones iniciales y de contorno que corresponden al mismo.

Para la discusión de éstas, así como de la determinabilidad de la solución que corresponde a cada caso, remitimos a la bibliografía que hemos citado y especialmente a la obra de Courant y Friedrichs.

Para terminar con este caso debe señalarse que el hecho de que

vol. VI de la Enciclopedia de Princeton; A. JEFFREY y T. TANIUTI: *Non-Linear Wave Propagation with Applications to Physics and Magnetohydrodynamics*. Acad. Press. Nueva York, 1964; W. F. AMES: *Non-Linear Partial Differential Equations in Engineering*. Acad. Press., Nueva York, 1965; W. D. HAYES y R. F. PROBST: *Hypersonic Flow Theory*. Acad. Press., Nueva York, 1966.

(261) En las publicaciones, el problema acostumbra a tratarse, no a partir de [341] y [342], como hemos hecho aquí, sino a partir del sistema diferencial del movimiento que resulta de particularizar al caso el general [25], [26] y [27].

la velocidad de propagación de las perturbaciones sea $(v \pm a)$, en lugar de ser la velocidad constante a_0 de la ecuación [266], como ocurre en Acústica, da lugar a una deformación de aquéllas, que puede originar aceleraciones infinitas (262), las cuales se traducen en la formación de las «ondas de choque», cuyo estudio constituirá el tema del epígrafe siguiente y de los capítulos II y IV.

El estudio de los efectos disipativos de la viscosidad y conductividad térmica del gas, en la propagación de las ondas, puede hallarse en el trabajo de Lighthill que se menciona en el epígrafe siguiente, o en una reciente publicación de Lick (263) donde se hallará abundante bibliografía sobre la cuestión.

Pasemos a considerar seguidamente el caso del movimiento isentrópico y estacionario, en dos dimensiones, cuya ecuación [271] del potencial de velocidades puede escribirse en la forma:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \varphi_{xx} - 2 \frac{u v}{a^2} \varphi_{xy} + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) \varphi_{yy} = 0. \quad [352]$$

En esta expresión,

$$u \equiv \varphi_x \quad \text{y} \quad v \equiv \varphi_y \quad [353]$$

son, como es sabido, las dos componentes de la velocidad del movimiento y entre ésta y la velocidad del sonido existe la relación:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{a_0^2}{\gamma - 1}, \quad [354]$$

merced a la ecuación de Bernoulli, siendo a_0 , evidentemente, la velocidad de propagación del sonido en el punto de remanso.

Si procedemos como en el ejemplo anterior, la pendiente

$$\lambda \equiv \frac{dy}{dx} = - \frac{f_x}{f_y} \quad [355]$$

(262) Ver, por ejemplo, A. KANTROWITZ, cap. C, vol. III, pág. 357 de la Enciclopedia de Princeton.

(263) W. LICK: *Wave Propagation in Real Gases*. «Adv. Appl. Mech.», volumen X, Acad Press, Nueva York, 1967, págs. 1-72.

de la curva característica

$$f(x, y) = \text{const.} \quad [356]$$

está determinada, en este caso, por la siguiente ecuación:

$$\left(1 - \frac{u^2}{a^2}\right) \lambda^2 + 2 \frac{uv}{a^2} \lambda + \left(1 - \frac{v^2}{a^2}\right) = 0. \quad [357]$$

que proporciona las dos familias de soluciones siguientes:

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^+ &\equiv \lambda^+ = \frac{uv + a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \\ \left(\frac{dy}{dx}\right)^- &\equiv \lambda^- = \frac{uv - a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{u^2 - a^2} \end{aligned} \right. \quad [358]$$

las cuales, como ya sabíamos, solamente son reales en el régimen supersónico $M > 1$.

Asimismo, resulta sencillo comprobar, como se explicó en [280], que la componente de la velocidad del gas en la dirección de la normal a cada una de las familias es precisamente la velocidad local del sonido y que, por consiguiente, cada una de las dos características forma con la dirección de la velocidad el ángulo local de Mach θ_M dado por la expresión:

$$\text{tg } \theta_M = \frac{1}{\sqrt{M^2 - 1}}. \quad [359]$$

En cuanto a las ecuaciones de las características en el plano hodógrafo (u, v) , se comprueba fácilmente que están dadas, como en el caso anterior, por la ecuación:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-uv \pm a^2 \sqrt{M^2 - 1}}{v^2 - a^2}. \quad [360]$$

Habida cuenta de la ecuación [354] de Bernoulli, que permite expresar a en función de u y v , la ecuación [360] resulta también integrable en este caso, lo que significa que la forma de las curvas características en el plano hodógrafo es independiente del problema

particular que se está tratando y permite, por tanto, la tabulación de las mismas.

Esta propiedad es, naturalmente, consecuencia del carácter «reducible» de la ecuación diferencial [353] del problema, al ser independientes de x e y los coeficientes de la misma, propiedad que constituye el fundamento del método hodógrafo, que se trató en el epígrafe 14.

Para obtener dichas curvas resulta ventajoso pasar a coordenadas polares (q, θ) en el plano hodógrafo, como se hizo en el epígrafe 14.

Entonces se comprueba que la doble familia de características está formada por el doble haz de «epicicloides» dadas por las ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} \pm 2\theta &= \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}} \arcsen \left[(\gamma-1) \frac{q^2}{q_c^2} - \gamma \right] + \\ &+ \arcsen \left[(\gamma+1) \frac{q_c^2}{q^2} - \gamma \right] + \text{const.}, \end{aligned} \right\} \quad [361]$$

en donde

$$q_c = \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}} a_0 \quad [362]$$

es la velocidad «crítica», es decir, la correspondiente a $M = 1$, la cual se utiliza frecuentemente como unidad de velocidades en los movimientos isentrópicos.

Así pues, el problema queda también resuelto en este caso, una vez dadas las condiciones iniciales (264), puesto que el paso del plano hodógrafo al «físico» se puede llevar a cabo por integración numérica, merced al sistema [358] (265).

(264) Ver también, para este problema, a Courant y Friedrichs.

(265) Las rutinas de cálculo correspondiente se hallarán en las referencias citadas, especialmente en las de Ferri, de Ames y de Forsythe. Ver, asimismo, J. WALSH: *Numerical Analysis*. Acad. Press, Nueva York, 1972, págs. 117 y siguientes, donde además se hallará bibliografía más reciente. Por último, un excelente tratado sobre cálculo numérico, con numerosos ejemplos y bibliografía es el de W. F. AMES: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Barnes and Noble, Inc., Nueva York, 1971, cuyo capítulo IV, págs. 165 y siguientes está dedicado a los sistemas hiperbólicos, incluido el problema de la estabilidad del cálculo numérico.

En particular, una relación importante para la integración numérica de las ecuaciones es, como se comprueba fácilmente, la siguiente condición de ortogonalidad entre los haces contrarios de características de los planos físico y hodógrafo, respectivamente.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^+ \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^- = \left(\frac{dy}{dx}\right)^- \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^+ = -1. \quad [363]$$

Hasta aquí hemos supuesto que una región del plano físico se transformaba unívocamente en una región del plano hodógrafo. Veamos ahora algunos casos de degeneración de esa transformación, que tienen importancia práctica.

En primer lugar, está el caso trivial del movimiento uniforme, en que la región del plano físico en que aquél tiene lugar se transforma en un único punto del plano hodógrafo: el correspondiente a la velocidad uniforme del movimiento.

En segundo lugar está el caso, más importante, en que uno de los dos haces de características del plano hodógrafo se reduce a una sola curva

$$f(u, v) = 0. \quad [364]$$

Entonces, en virtud de la condición de ortogonalidad [363], el haz contrario del plano físico se reduce a un conjunto de rectas, a cada una de las cuales corresponde un punto de (u, v) . Por tanto, la velocidad, así como todas las restantes magnitudes fluidas, son constantes sobre cada una de dichas rectas.

Se trata de las llamadas «ondas simples», cuya existencia fue reconocida por Prandtl (266), en relación con el movimiento en las toberas de Laval de las turbinas de gas y cuya teoría fue desarrollada por Meyer (267), por lo que se suelen designar también «expansiones» de Prandtl-Meyer.

Este tipo de ondas, que se dan también, naturalmente, en el caso del movimiento no estacionario considerado anteriormente, juegan

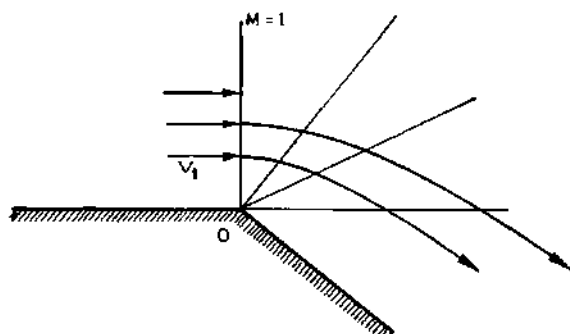
(266) L. PRANDTL: *Neue Untersuchungen über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe*. «Phys. Zeits.», 1907. págs. 23 y sigts.

(267) TH. MEYER: *Über zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas, das mit Überschallgeschwindigkeit strömt*. «Fortsch. Ver. deut. Ing.», Berlín, 1908, págs. 31-67.

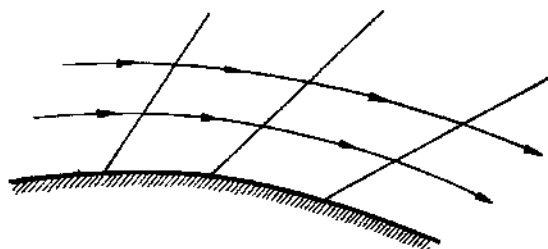
un gran papel en las aplicaciones, porque se demuestra que la zona contigua a una corriente uniforme es siempre una onda simple (268).

En particular, la figura I-14 muestra tres ejemplos de ondas simples.

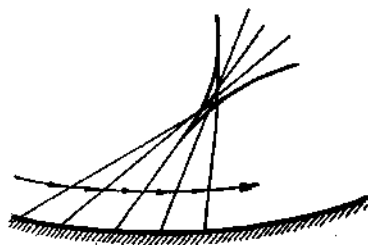
De ellos, el primero a) corresponde a la onda de expansión alrededor de un ángulo, desde la velocidad del sonido $M = 1$, hasta una velocidad supersónica.



a) Expansión alrededor de un vértice



b) Expansión sobre una pared convexa



c) Compresión en una pared cóncava

Fig. 1-14.—Ondas simples de Prandl-Meyer.

(268) Ver COURANT-FRIEDRICHS, págs. 59 y sigts.

El segundo b) corresponde a la expansión a lo largo de una pared convexa.

Por último, el tercero c) es una onda de compresión a lo largo de una pared cóncava y en él puede verse cómo la intersección de las características de un mismo haz da lugar a una situación similar a la que se señaló para el caso de las ondas planas no estacionarias, como causa de formación de una «onda de choque».

Hasta aquí la teoría se ha desarrollado, por sencillez y porque corresponde al caso de aplicación más frecuente, a partir de la ecuación del potencial de velocidades.

Sin embargo, hay que señalar que el método es igualmente aplicable, aunque con mayor complicación práctica, por el mayor número de funciones incógnitas que incorpora al tratamiento de los movimientos rotacionales que se dan, por ejemplo, detrás de las ondas de choque cuya intensidad varía de un punto a otro (269).

Concretamente, si el movimiento no es isentrópico, aparece una tercera familia de características, determinada por la condición de isentropía [27] de cada partícula, que son las líneas de corriente.

En todo caso, el procedimiento consiste en establecer las ecuaciones que determinan las pendientes de las características, es decir, las correspondiente a [358] en el ejemplo precedente, así como las de «compatibilidad» que determinan las variaciones de las diversas magnitudes fluidas a lo largo de aquéllas, o sea, las correspondientes a [360].

Hecho esto, si se conocen los valores «iniciales» de las magnitudes fluidas sobre una curva dada, que no sea una característica, tal como la C_0 de la figura I-15 a), se puede proceder por integración numérica, a lo largo de las características que arrancan de los diversos puntos de la misma, tal como ilustra la figura.

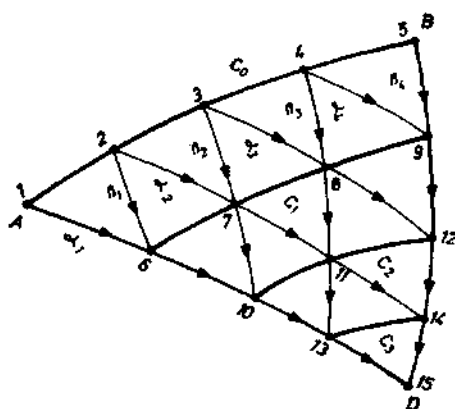
Entonces, los puntos de intersección de las dos familias distintas de características α y β , que no son líneas de corriente, proporcionan una nueva red de valores conocidos sobre la curva C_1 , a partir de la cual se puede repetir el proceso.

La figura ilustra, asimismo, el espacio de determinación de la solución que corresponde a los valores dados sobre el tramo AB de C_0 .

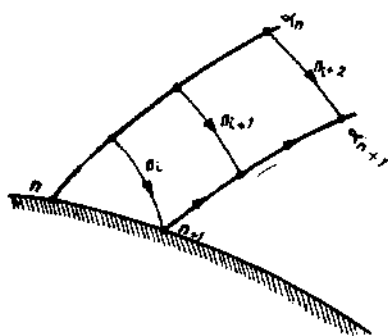
En particular, cuando la solución se busca a un lado de C_0 , como suele ocurrir, dicho espacio es el triángulo curvilíneo ABD, forma-

(269) Ver, por ejemplo, A. FERRI, ya citado, págs. 82 y sigts.

do por ésta y por las dos características de familias distintas que pasan por sus extremos.



a) Red de características



b) Cálculo en un punto en la pared

Fig. I-15.—Método de las características en problemas bidimensionales.

En cuanto al tratamiento de contornos que interfieran con el espacio de determinación, tales como paredes rígidas, líneas de presión constante, ondas de choque como las que trataremos en el epígrafe siguiente, etc., la situación a que dan lugar, en cada escalón del proceso, es la de que una de las dos características del retículo hay que sustituirla por el contorno respectivo, el cual proporciona los

datos de desviación de la velocidad, de constancia de la presión, etcétera, necesarios para pasar al punto siguiente de la red, tal como ilustra la figura I-15, b), para el caso de una pared rígida.

Por último, hay que señalar también que el método de las características se generaliza al caso de tres o más variables, como se vio concretamente en el epígrafe precedente, para la Teoría Lineal del ala de envergadura finita, si bien el cálculo numérico se hace entonces, naturalmente, mucho más laborioso (270).

18. MOVIMIENTO CON ONDAS DE CHOQUE

a) Ondas de choque

Como es sabido, la existencia de las superficies de discontinuidad llamadas «ondas de choque», que se producen en los movimientos supersónicos, fue reconocida al estudiar la propagación de perturbaciones unidimensionales, de amplitud finita, en el seno de un gas (271).

Tales ondas son el resultado del efecto no lineal de acumulación que produce la convección de las compresiones por la velocidad del gas, unido al hecho de que su velocidad de propagación, la cual, como se vio en el epígrafe 13 es la del sonido, aumenta con la compresión de aquél (272).

El estudio del proceso de formación de tales ondas de choque se efectúa, por consiguiente, a partir de la propagación unidimensional de las ondas de amplitud finita que se han considerado en el epígrafe precedente, la cual, si no se toman en cuenta los términos

(270) Ver, por ejemplo, de J. V. RAKICH: *Three-Dimensional Flow Calculation by the Method of Characteristics*, «AIAA Jour.», 1967, págs. 1906-8, y *A Method of Characteristics for Steady Three-Dimensional Supersonic Flow with Application to Inclined Bodies of Revolution*, Tech. Note D-5941 de NASA, Washington, 1969. También, CH. W. CHU: *Compatibility Relations and a Generalized Finite Difference Approximation for Three-Dimensional Steady Supersonic Flow*, «AIAA Jour.», 1967, págs. 498-501. Finalmente, un análisis crítico de los diversos procedimientos, puede hallarse en P. I. CHUSHKIN: *Numerical Method of Characteristics for Three-Dimensional Supersonic Flow*, «Progr. Aer. Sci.», ed. por K. Kücheman, Pergamon Press, Londres, 1968.

(271) Ver, por ejemplo, COURANT y FRIEDRICHS, ya citado, págs. 79 y sigts.

(272) Idem id., pág. 96, o bien BECKER, citado en las referencias del capítulo IV.

disipativos de las ecuaciones del movimiento, conduce a una discontinuidad de las magnitudes fluidas, como ocurre en la Teoría Clásica.

Por el contrario, si se incluyen los efectos disipativos, el comportamiento de las ondas aparece gobernado por una ecuación del tipo de Burgers (273) para el exceso $w = (v + a - a_0)$ de la velocidad $(v + a)$ de propagación de la onda, con respecto a la acústica a_0 de la teoría lineal:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad [365]$$

en donde α es un coeficiente pequeño que mide los efectos de la disipación.

La integración de esta ecuación, que puede hacerse en forma analítica (274), proporciona el modelo de estructura interna de la onda de choque, cuyo estudio constituirá el objeto del capítulo IV.

Por el momento, dejando de lado este interesante problema, se trata de considerar aquí aquellas situaciones en que la onda de choque está ya formada y tiene espesor nulo, identificándose, por tanto, con una superficie geométrica, a través de la cual experimentan un salto las diversas magnitudes fluidas.

En el capítulo II, dedicado a establecer las condiciones que deben cumplir los saltos de las diversas magnitudes fluidas al atravesar una superficie de discontinuidad, los cuales no pueden ser arbitrarios, se demuestra que, en el caso de una onda de choque, tales condiciones son las siguientes, llamadas generalmente de Rankine-Hugoniot (275)

$$\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}; \quad [366]$$

$$p_1 + \rho_1 v_{n1}^2 = p_2 + \rho_2 v_{n2}^2; \quad [367]$$

$$h_1 + \frac{1}{2} v_{n1}^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_{n2}^2; \quad [368]$$

$$\mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2}. \quad [369]$$

(273) J. M. BURGERS: *A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence*. «Adv. Appl. Mech.», vol. I, Acad. Press., Nueva York, 1947, páginas 171-200.

(274) Un trabajo del mayor interés para el estudio de este problema es el de M. J. LIGHTHILL: *Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude*. «Surveys in Mechanics». Cambridge Univ. Press., 1956, págs. 250-351.

(275) Se tardó algún tiempo en determinar cuáles debían ser tales condiciones, como puede verse en COURANT y FRIEDRICHS, pág. 118.

En estas expresiones, los subíndices 1 y 2 designan los valores de las diversas magnitudes en las caras de entrada y salida, respectivamente, del gas a través de la onda y v_n y v_t son las componentes normal y tangencial de su velocidad con respecto a la de la onda en el punto considerado.

Por consiguiente, la velocidad v_p de propagación de aquella a través del gas resulta ser:

$$v_p = -v_{n1}. \quad [370]$$

Además, se demuestra (276) que se cumplen las condiciones

$$M_{n1} > 1; \quad M_{n2} < 1, \quad [371]$$

donde M_n es el número de Mach de la velocidad relativa normal a la onda, y que el proceso es irreversible por lo que, al ser adiabático, debe cumplirse la condición:

$$S_1 < S_2, \quad [372]$$

en donde S es la entropía específica del gas.

Debe señalarse que si es $M_{n1} > 1$, como establece la primera de las dos condiciones [371], es claro que con mayor razón resulta también $M_1 > 1$, siendo M_1 el número de Mach del movimiento relativo a la onda, delante de ella. Por el contrario, la segunda $M_{n2} < 1$ de tales condiciones no implica el que también haya de ser $M_2 < 1$.

Efectivamente, se comprueba que se dan situaciones en que el movimiento relativo del gas detrás de la onda es supersónico y otras en que resulta subsónico. Esta circunstancia es de la mayor importancia, como veremos en algunos ejemplos posteriores para el cálculo del movimiento detrás de la onda.

Las condiciones de Rankine-Hugoniot, que acabamos de expresar, unidas a las funciones termodinámicas del gas, permiten calcular tablas y trazar diagramas que determinan las magnitudes del movimiento a un lado de la onda, conocidos los valores en la otra cara de la misma (277).

(276) Ver el capítulo II.

(277) Ver, por ejemplo, el primer tomo de la obra de Jaumotte que se cita al comienzo de capítulo IV, dedicada al estudio de la estructura interna de las

Lo que ocurre, en general, en una onda de choque oblicua, aparece representado en la figura I-16, en el plano físico y en el hodógrafo.

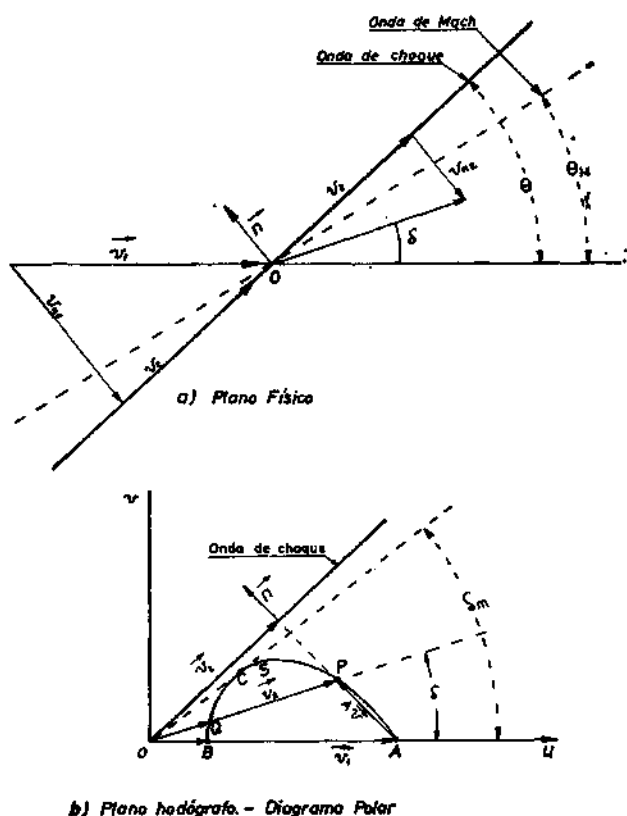


Fig. I-16.—Ondas de choque oblicuas.

Puesto que el salto de velocidades es normal a la onda, la velocidad relativa incidente v_1 y la emergente v_2 están situadas en el plano que contiene a la normal n a la superficie de la onda, cuya intersección con el plano tangente a ésta es la recta que se designa «onda de choque», en el plano físico de la figura.

ondas de choque, págs. 18 y sigts. También *Equations, Tables and Charts for Compressible Flow*. «Tech. Rept.», núm. 1.135. NACA, 1953, así como *Tables for Compressible Airflow*. Clarendon Press., Oxford, 1952.

Como muestra el diagrama polar del plano hodógrafo, a cada número de Mach relativo $M_1 > 1$, de la corriente incidente, le corresponde una curva APCQB, que para un gas perfecto con relación γ constante, como supondremos en lo que sigue, es una «astrofoide» y constituye el lugar geométrico de las velocidades emergentes que son compatibles con las condiciones de Rankine-Hugoniot para el valor dado de M_1 .

En particular, el punto B corresponde a una onda de choque normal a la corriente ($v_{t1} = v_{t2} = 0$), la cual, como puede verse, es la que produce el salto de velocidades Δv más elevado.

Las condiciones de compatibilidad muestran que la onda normal origina también los saltos más fuertes de la presión, densidad, temperatura y entropía a través de la onda.

Por el contrario, la tangente polar en A corresponde a un salto de intensidad nula que corresponde a una onda de Mach, cuya inclinación es θ_M .

Por tanto, las ondas de choque forman siempre con la dirección de la corriente incidente un ángulo θ , mayor que el ángulo de Mach.

Las ondas de choque oblicuas producen una desviación de la corriente incidente que acerca la velocidad emergente a la superficie de la onda y el diagrama muestra que para cada valor δ de la desviación existen dos posibles ondas de choque: una primera OP, llamada «débil», porque el salto a través del choque es menor que en la otra, OQ, que se llama «fuerte».

En general, para una desviación dada, experimentalmente se observa la onda «débil», si bien puede conseguirse también la «fuerte» bajo condiciones apropiadas.

Asimismo, se ve que para cada número de Mach incidente M_1 , existe una desviación máxima posible δ_m a través de la onda.

Se trata de una propiedad de la mayor importancia práctica, como veremos más adelante al referirnos a las ondas adheridas y desprendidas que forman los obstáculos al moverse a velocidades supersónicas a través de un gas.

Por último, el punto S divide al diagrama polar en dos secciones. De ellas, el arco BS corresponde a ondas de choque tales que el movimiento resultante detrás de ellas es subsónico, mientras que el SA corresponden a velocidades supersónicas detrás de la onda.

En particular el movimiento detrás de una onda normal, representada, como se ha dicho, por el punto B, es siempre subsónico.

Asimismo, las ondas de desviación máxima δ_m son siempre «fuer-
tes», pero con números de Mach M_2 próximos a la unidad.

A título de ilustración de lo que acaba de decirse, la figura I-17 muestra, en función de M_1 , el valor de la desviación máxima δ_m que puede producirse a través de una onda de choque en el aire, la inclinación θ_m de ésta con respecto a la corriente incidente y el número de Mach M_{2m} del movimiento emergente.

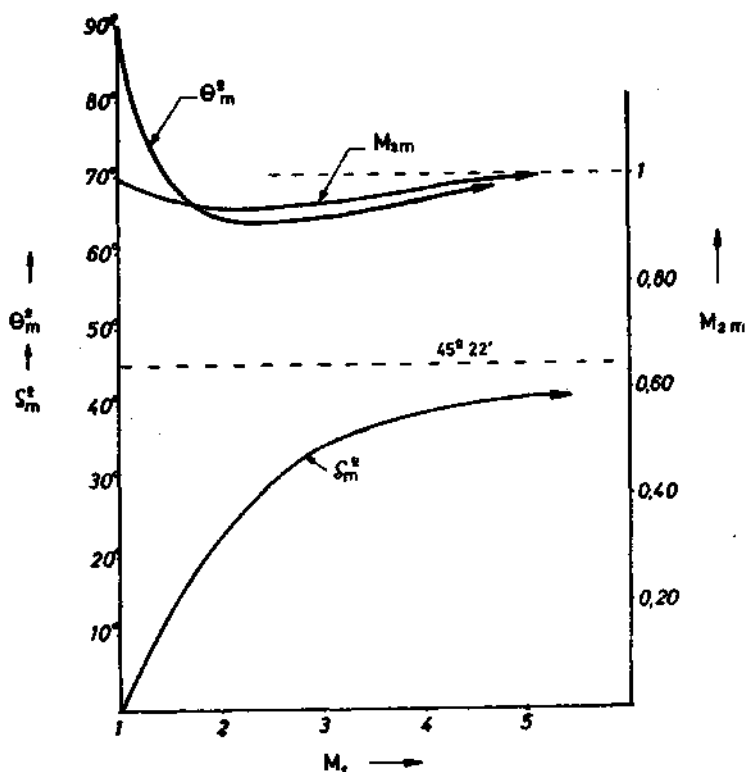


Fig. I-17.—Ondas de choque oblicuas. Características de la onda de desviación máxima.

Otro aspecto importante de los movimientos con ondas de choque es el siguiente:

La ecuación [69] de Crocco, que se da en el epígrafe 5 al tratar de los movimientos rotacionales, relaciona el torbellino ω de la velocidad con el gradiente ∇S de la entropía del fluido.

Por otra parte, acabamos de ver que, dadas las características de

la corriente delante de la onda de choque, la intensidad del salto a través de ésta depende de su inclinación con respecto a la velocidad incidente.

Por tanto, el salto de entropía a través de la onda depende también de su inclinación, por lo que, en las ondas de choque curvas, el gradiente de la entropía detrás de la onda será distinto de cero, aun cuando sea nulo delante de ellas, lo cual significa, en virtud del teorema de Crocco, que el movimiento detrás de la onda será, en general, rotacional, aun cuando sea potencial delante de ella.

Esta propiedad introduce una dificultad importante en el cálculo de los movimientos detrás de esta clase de ondas, de las que veremos algunos ejemplos en los epígrafes siguientes.

En esta situación, interesa poner de manifiesto la relación existente entre la curvatura de la onda y el torbellino de la velocidad emergente, cuestión que fue inicialmente considerada por Truesdell (278) para el caso de dos dimensiones, generalizados al de tres por Lighthill (279) y tratada independientemente del salto de entropía, así como para ondas no estacionarias, por Hayes (280).

Por ejemplo, la expresión que obtiene Hayes para el valor del torbellino ω_2 detrás de la onda, en el caso frecuente de que el movimiento sea uniforme y estacionario delante de ella, es

$$\omega_2 = -\mathbf{n} \times \mathbf{v} \cdot \mathcal{R} \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon}, \quad [373]$$

en donde $\mathbf{n}$ es la normal a la superficie de onda, $\mathcal{R}$ es el tensor de curvatura de dicha superficie (281) y $\varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ es la relación entre las densidades a ambos lados de la onda.

Concretamente, en el caso del movimiento plano que muestra la

(278) C. TRUESDELL: «*Jour. Aer. Sci.*», 1952, págs. 826-28.

(279) M. J. LIGHTHILL: *Dynamics of a Dissociating Gas*. Part. I. *Equilibrium Flow*. «*Jour. Fluid Mech.*», 1957, págs. 132.

(280) W. D. HAYES: *The Vorticity Jump Across a Gasdynamic Discontinuity*. «*Jour. Fluid Mech.*», 1957, págs. 595-600.

(281) Ver, por ejemplo, I. S. SOKOLNIKOFF: *Tensor Analysis*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1951, págs. 109 y sigts.

figura I-19 del ejemplo, que se considera más adelante, el valor de ω_z , única componente no nula de ω_z , está dado por la expresión:

$$\omega_z = \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\varepsilon} \frac{v_t}{r_c}, \quad [374]$$

donde r_c es el radio de curvatura de la onda en el punto considerado.

El prof. Shapiro (282) da la siguiente expresión para el cálculo del torbellino adimensional $\zeta \equiv \frac{2 \omega_z r_c}{V_1}$ producido por una onda de choque curva en dos dimensiones:

$$\zeta \equiv \frac{2 \omega_z r_c}{V_1} = \frac{4}{\gamma + 1} \cdot \frac{(M_n^2 - 1)^2 \cos \theta}{M_n^2 [2 + (\gamma - 1) M_n^2]} \quad [375]$$

en función del número de Mach normal M_n en la cara de entrada de la corriente y de la inclinación θ de la onda, lo que permite construir gráficos o tablas de doble entrada para ζ , que se hallarán en el trabajo citado.

Para las expresiones correspondientes de movimientos más generales, remitimos al trabajo de Hayes.

Aun cuando, en el caso de un fluido ideal, la onda de choque se identifica con una superficie de discontinuidad de las magnitudes fluidas, veremos en el capítulo IV que, en un gas ideal, los efectos disipativos (viscosidad y conductividad térmica) hacen que el salto se produzca en un espesor finito, cuyo orden de magnitud se compara, sin embargo, con el del «camino libre medio» molecular.

Por tanto, los gradientes de las magnitudes fluidas al atravesar la onda son muy intensos, lo que permite fotografiar aquéllas como líneas perfectamente nítidas, mediante técnicas estrioscópicas o interferométricas, las cuales tienen la ventaja de no perturbar en absoluto el campo de observación (283).

Tales técnicas constituyen un instrumento sumamente valioso para

(282) A. H. SHAPIRO: *A Note on the Vorticity Downstream of a Curved Shock*. ZAMP, 1958, págs. 637-41.

(283) Ver, por ejemplo, el capítulo A del volumen IX de la Enciclopedia de Princeton.

el estudio de los movimientos con ondas de choque, cuyo comportamiento en relación con los obstáculos que las originan o al incidir sobre superficies sólidas o fluidas, así como al interferir unas con otras, constituye uno de los temas fundamentales de los movimientos supersónicos.

Resulta imposible entrar aquí en una exposición detallada de esta materia, para cuyo estudio remitimos a algunos de los tratados generales cuya referencia se ha facilitado en relación con los movimientos supersónicos.

Por nuestra parte, en lo que sigue vamos a limitarnos a desarrollar algunos ejemplos muy representativos del tipo de problemas que plantean los movimientos con ondas de choque (284).

Para ello empezaremos por considerar el caso elemental de la corriente supersónica, plana y estacionaria, inicialmente uniforme, al encontrar un ángulo, como el que ilustra la figura I-18, a).

Dos situaciones distintas pueden darse en este caso.

En primer lugar, si el ángulo δ es igual o menor que el δ_m de máxima desviación que puede producir una onda de choque para el número de Mach M_1 de la corriente incidente, entonces se producirá en O la onda de choque débil, de las dos que originan esa desviación.

Con ello, el movimiento detrás de la onda será uniforme y corresponderá a los valores M_2 , v_2 , etc., que resultan de las condiciones de Rankine-Hugoniot para la inclinación δ .

Este problema fue inicialmente considerado por Prandtl y desarrollado por Meyer (285).

Si, por el contrario, es $\delta > \delta_m$, entonces se produce una onda de choque desprendida, como la que ilustra la figura, en cuyo caso el movimiento detrás de la onda será subsónico, al menos en la región próxima al punto O de la pared, donde el choque es normal, y la solución resulta mucho más difícil de obtener (286).

(284) Un reciente trabajo de revisión y con abundante bibliografía es el de D. C. PACK: *Shockwave Phenomena*, de «Research Frontiers in Fluid Dynamics». Interscience Publ., Nueva York, 1966, págs. 212-49.

(285) Ver las referencias del epígrafe precedente.

(286) H. F. LUDLOFF y M. B. FRIEDMAN.

b) Movimientos cónicos

Pasemos ahora a considerar otro ejemplo de gran importancia práctica y muy representativo de movimientos con una onda adherida: el que tiene lugar alrededor de un cono de revolución, paralelamente a su eje, como ilustra la figura I-18, b).

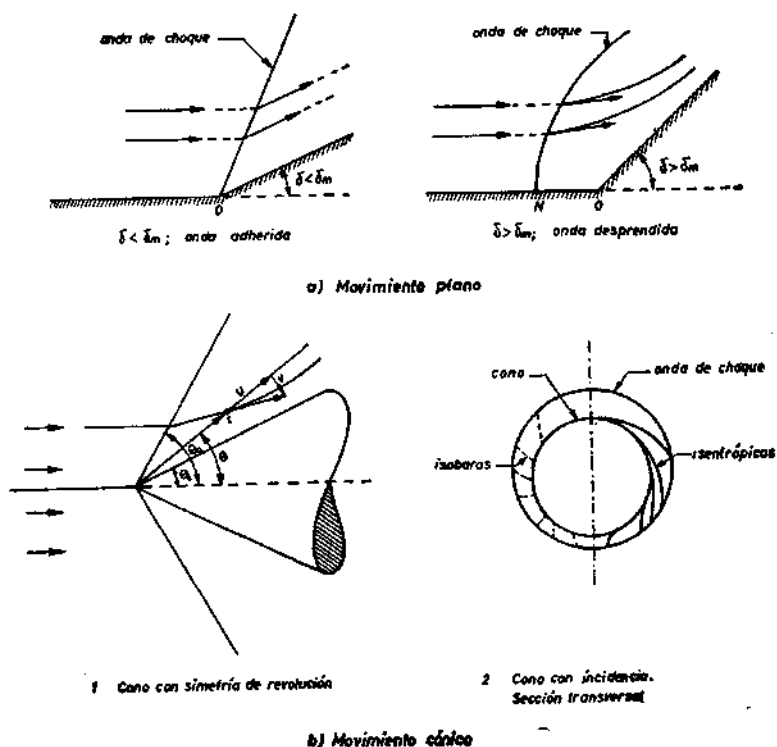


Fig. I-18.—Movimiento con ondas de choque.

El problema tiene interés práctico para el estudio del campo de presiones en la proa de proyectiles y cohetes, por lo que ha sido objeto de estudios muy completos de carácter teórico y experimental.

En este caso, es claro que el movimiento no puede ser uniforme, como ocurría en el de la cuña bidimensional del ejemplo anterior, sino que debe producirse una compresión progresiva del gas entre la onda de choque y la superficie del obstáculo, como indica la figura.

Una solución aproximada de este problema es la que resulta, naturalmente, de aplicar al caso del cono de revolución de ángulo en el vértice pequeño, el método de perturbaciones pequeñas desarrollado por Karman y Moore en 1932 para el estudio de movimientos axiales alrededor de poco espesor, con simetría de revolución, al que nos hemos referido en el epígrafe 16.

Y la comparación de esta aplicación con los resultados de la solución exacta que vamos a desarrollar a continuación, demuestra que la aproximación de von Karman y Moore es bastante satisfactoria para conos circulares con semiángulos en el vértice inferiores a 20 grados.

La solución exacta se debe a una idea propuesta por el prof. Busemann (287) y desarrollada por Taylor y McColl (288), a la que ya se ha hecho referencia en la Teoría Lineal de alas de envergadura finita que consideramos en el epígrafe 16.

Tal idea consiste en suponer que se forma una onda de choque cónica, coaxial con el cono, y que el movimiento detrás de ella es cónico, es decir, que la presión, densidad y velocidad son constantes sobre cada una de las rectas que pasan por el vértice del cono.

Esta idea fue explorada más tarde por el propio Busemann (289), en busca de todas las soluciones posibles de movimientos cónicos con simetría de revolución, encontrando que sólo existen el del cono circular, estudiado por Taylor y McColl, cuya solución obtuvo también, y el de un difusor de forma muy especial.

La solución de Taylor y McColl consiste en reducir el problema a la integración de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la componente radial u de la velocidad, como función del ángulo θ que define la posición angular del punto, única variable independiente del problema que se esquematiza en la figura I-18, b).

A dicha ecuación se llega a partir de las generales de conservación para movimientos con simetría de revolución, teniendo en cuenta, de un lado, que la única variable independiente, como se ha dicho, es el ángulo de inclinación θ , por el supuesto carácter cónico

(287) A. BUSEMANN: *Drücke auf kegelförmige Spitzen bei Bewegung mit Überschallgeschwindigkeit*. ZAMM, 1929, pág. 496.

(288) G. I. TAYLOR y J. W. MCCOLL: *The Air Pressure on a Cone moving at high speed*. I y II. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1933, págs. 278-311.

(289) A. BUSEMANN: *Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung*. «Luft. Forsch.», 1942, págs. 137-44

del movimiento; de otro, que el movimiento es irrotacional, puesto que la inclinación de la onda de choque respecto de la corriente incidente es constante y, por tanto, el movimiento detrás de ella es isentrópico.

Esta condición de irrotacionalidad se expresa en la forma siguiente:

$$v = \frac{d u}{d \theta}, \quad [376]$$

siendo v la componente tangencial de la velocidad.

Se comprueba sin dificultad que la expresión de la ecuación diferencial del movimiento es la siguiente:

$$\frac{d^2 u}{d \theta^2} = \frac{2 u (1 - u^2) + (1 - u^2) \cot \theta \cdot \frac{d u}{d \theta} - 2 \frac{\gamma}{\gamma - 1} u \left(\frac{d u}{d \theta} \right)^2 - \cot \theta \cdot \left(\frac{d u}{d \theta} \right)^2}{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(\frac{d u}{d \theta} \right)^2 - (1 - u^2)} \quad [377]$$

en donde, como unidad de velocidad, para medir u y v , se ha adoptado la velocidad límite

$$q_1 = \sqrt{\frac{2}{\gamma - 1}} \cdot a_0 \quad [378]$$

del gas.

En cuanto a las condiciones de contorno, los valores de los componentes u y v de la velocidad sobre la onda de choque están determinados por las condiciones de Rankine-Hugoniot.

Ahora bien, conocido v , la condición de irrotacionalidad [376] determina el valor de la derivada $\frac{d u}{d \theta}$. Por consiguiente, sobre

la onda de choque se conocen los valores de u y de su derivada primera, lo que determina la solución buscada de la ecuación [377].

Lo que ocurre es que la posición de la onda de choque, es decir,

el semiángulo θ_0 que forma ésta con el eje del cono, es desconocido «a priori», siendo función del número de Mach M_1 del movimiento incidente y del semiángulo θ_c del cono.

Por otra parte, hay que asegurar el cumplimiento de una condición de contorno adicional sobre la superficie del obstáculo, donde la corriente debe ser tangente al cono.

Es decir, tiene que cumplirse la condición adicional de que para $\theta = \theta_c$, la componente tangencial v de la velocidad sea nula y ésta es precisamente la condición que sirve para determinar la posición de la onda.

Como no se puede obtener una solución explícita de la ecuación [377], lo que se hace en realidad es suponer una posición inicial θ_0 de la onda de choque y determinar el ángulo θ_c que cumple la condición $v(\theta_c) = 0$.

Es decir, que una vez más estamos ante un ejemplo de «problema inverso», al buscar el cono que corresponde a cada onda.

Más adelante, al considerar los movimientos con ondas desprendidas, veremos la importancia que allí tiene este método de resolución del problema inverso, en los movimientos con ondas de choque.

A falta de una solución explícita de [377], hay que proceder por integración numérica, lo que hicieron inicialmente Taylor y McColl para valores del semiángulo del cono de 20, 40 y 60 grados y para diversos valores del número de Mach en cada caso.

Más tarpe, Kopal, del MIT, tabuló en forma sistemática dichas magnitudes (290).

En todos los casos se comprueba una buena coincidencia con las medidas experimentales.

Por otra parte, al igual de lo que ocurría en el ejemplo bidimensional anterior, en cada caso existen dos soluciones, una con onda de choque fuerte y otra débil, de las que experimentalmente se comprueba que, en la práctica, se produce la segunda.

Asimismo, a cada número de Mach corresponde un valor límite del ángulo del cono, por encima del cual se produce una onda desprendida, en cuyo caso el carácter del movimiento resultante es, también, mucho más complicado.

(290) Z. KOPAL: *Tables of Supersonic Flow Around Cones y Tables of Supersonic Flow Around Yawing Cones*, MIT, 1947. *Tables of Supersonic Flow Around Cones of Large Yaw*, MIT, 1949. R. C. ROBERTS y J. D. RILEY: *A Guide to the Use of the MIT Cone Tables*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1954, págs. 386-42.

Una extensión natural del problema de Taylor y McColl, de gran interés práctico en Balística y en Aerodinámica de cohetes, consiste en estudiar el caso en que la dirección del movimiento no coincide con el eje del cono, es decir, el movimiento con ángulo de ataque

Cuando el ángulo de ataque α es pequeño (p. e., inferior a 5°) el problema ha sido estudiado por el prof. Stone, de la Universidad de Cambridge, a partir de los resultados de Taylor y McColl, mediante un laborioso desarrollo de la solución en serie de potencias del ángulo de ataque α , calculando las aproximaciones de primero y segundo orden (291).

Los resultados de Stone muestran que, en primera aproximación, la onda de choque sigue siendo un cono de revolución, pero cuyo eje tiene una inclinación respecto de la dirección de la corriente ligeramente menor que la del eje del cono.

Por tanto, el movimiento no puede ser isentrópico, puesto que la inclinación de la onda respecto de la dirección del movimiento no es la misma en todas las generatrices ni, en consecuencia, irrotacional, como suponen las teorías linealizadas anteriores al trabajo de Stone, cuya referencia se encontrará en el mismo.

Los resultados de la aplicación del método de Stone han sido tabulados por la NASA (292) y su comparación con las mediciones experimentales demuestra una coincidencia satisfactoria para la inclinación de la onda de choque y también aceptable para la fuerza aerodinámica normal al eje del cono producida por la inclinación de éste.

Para ángulos de ataque mayores, hay que proceder por integración numérica de las ecuaciones del movimiento, las cuales siguen siendo independientes de la distancia r al vértice del cono, pero dependen de las dos variables angulares θ y ω que definen la posición del punto.

Se tiene así un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, respecto de θ y ω , para el cálculo de los tres componentes de la velocidad, de la presión y de la densidad, el cual resulta ser de tipo elíptico.

En cuanto a las condiciones de contorno, son las mismas que en

(291) A. H. STONE: *On Supersonic Flow past a Slightly Yawing Cone*. I y II. «*Jour. Math. and Phys.*», 1949, págs. 67-81, y 1951, págs. 200-213.

(292) J. L. SIMS: *Tables of Supersonic Flow Around Right Circular Cones at Small Angles of Attack*. NASA SP 3007, 1964.

el caso de Taylor y McColl. Es decir, la de tangencia de la velocidad a la superficie del cono, de un lado, y las de Rankine-Hugoniot sobre la onda de choque, del otro.

El problema ha sido tratado, entre otros, por A. Ferri, del Instituto Politécnico de Brooklin (293) quien, además puso de manifiesto que en la proximidad de la superficie del cono existe una zona fuertemente rotacional: la llamada «capa vortical»; por Stoker y Mauguer (294) mediante el empleo de un procedimiento de integración numérica semejante a los que se describen más adelante para ondas desprendidas y por Moretti (295).

Es particularmente interesante el tratamiento de Moretti porque soslaya las dificultades del carácter elíptico de las ecuaciones para su integración numérica, suponiendo que la solución depende de la distancia r al origen, con lo que el sistema se hace hiperbólico y su integración numérica se facilita considerablemente.

El artificio consiste en suponer una forma arbitraria de la onda de choque para $r < r_0$ y prolongar el cálculo a partir de ella, para $r > r_0$, mediante integración numérica. Entonces ocurre que, para $r \rightarrow \infty$, la solución del caso supuesto tiende asintóticamente hacia la solución cónica buscada.

Una vez obtenida la solución asintótica, resulta ser válida para todo valor de r , desde el origen, puesto que el movimiento es realmente cónico, como puede comprobarse por la forma de las ecuaciones diferenciales y de las condiciones de contorno, las cuales son independientes de r .

Según Moretti, el tiempo de cálculo requerido para obtener la solución de cada caso concreto se reduce a unos minutos, con un ordenador IBM 7094.

Un artificio similar al empleado aquí ha sido utilizado también por Moretti para el cálculo de movimientos con ondas desprendidas, como veremos en el ejemplo posterior. Pero, en tal caso, la variable adicional que permite operar con un sistema hiperbólico es el tiempo, al considerar que el movimiento estacionario que se trata

(293) A. FERRI: *Supersonic Flow Around Circular Cones at Angles of Attack*. «NACA Tech. Rept.», 1045, 1951.

(294) P. M. STOKER y F. E. MAUGUER: *Supersonic Flow past Cones of General Cross Section*. «Jour. Fluid. Mech.», 1962, págs. 383 y sigts.

(295) G. MORETTI: *Inviscid Flowfield about a Pointed Cone at an Angle of Attack*. «AIAA Jour.», 1967, págs. 789 y sigts.

de resolver es la solución asintótica de un movimiento no estacionario, a partir de condiciones iniciales arbitrarias.

La figura I-18, b), muestra también una sección normal al eje del cono, tomada del trabajo de Moretti.

En ella pueden verse: la sección del cono, la de la onda de choque y la forma de las isobaras, para un cono de 10° de semiángulo en el vértice, a un ángulo de ataque de 8° y a un número de Mach de 7,95. La unidad de presión elegida para las isobaras es la presión de la corriente no perturbada, es decir, delante de la onda de choque.

También se incluye la distribución de las líneas de entropía constante, las cuales evidencian el punto singular predicho por Ferri (296), el cual está situado sobre el diámetro de presión mínima.

Los puntos experimentales muestran que la forma de la onda es correcta en la región de sotavento, pero no en la opuesta. Ello es debido a la influencia de la viscosidad y la desviación es del orden de magnitud del espesor de la capa límite desprendida en esa zona.

Hay que tener presente que, en el caso considerado, el ángulo de ataque de 8° es muy próximo al semiángulo en el vértice del cono de 10° y que el límite de la teoría corresponde al punto de coincidencia entre ambos.

En efecto, para ángulos de ataque mayores que el semiángulo en el vértice, no existe onda de choque en la proximidad de la generatriz de barlovento, por lo que los resultados numéricos disponibles hasta el momento para tales casos sólo son aplicables a la región de presiones mayores (297).

Otra extensión natural del problema de Taylor y McColl consiste en calcular la corriente alrededor de conos cuya sección normal no sea circular.

Las soluciones obtenidas consisten en aproximaciones a partir de la de Taylor y McColl, mediante métodos de perturbaciones análogos al desarrollado por Stone para el estudio de la influencia de la incidencia.

Entre éstos hay que citar, en particular, el desarrollado por Ferri y sus colaboradores (298).

(296) Ver referencias antes citada.

(297) D. W. EASTMAN y M. E. OMAR: *Flow Fields About Highly Yowed Cones by the Inverse Method*, «AIAA Jour.», 1965, págs. 1782 y sigts.

(298) A. FERRI, N. NESS y T. KAPLITA: *Supersonic Flow over Conical Bodies without Axial Symmetry*, «Jour. Aer. Sci.», 1953, págs. 563 y sigts.

Es digno de mención, por su rigor matemático y originalidad, el método desarrollado por el prof. Wood del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Canterbury, en Nueva Zelanda, para el caso de conos de sección elíptica (299).

El prof. Woods opera con un sistema de coordenadas esferocónicas, con lo que la superficie del cono es siempre una superficie coordenada.

Si bien ello hace más laboriosa la formulación del problema, en cambio simplifica grandemente el cálculo numérico, al reducir el número de términos necesarios en el desarrollo de la solución.

Además permite aplicar las tablas de Sims, antes citadas, sin más que sustituir los valores de las coordenadas angulares esféricas de éste por las de Woods, para transformar una solución de Stone, relativa al cono circular bajo ángulo de ataque, en la equivalente de Woods para un cono elíptico con incidencia.

Además, la solución desarrollada por Woods es uniformemente válida, sobre toda la región comprendida entre la superficie del cono y la de la onda de choque, esclareciendo el problema de la singularidad de la entropía sobre la superficie del cono a que se aludido antes.

Finalmente, la comparación de sus resultados con los experimentales y los resultados de cálculos más laboriosos, demuestra que el método es aplicable a excentricidades en la sección elíptica considerablemente mayores de lo que cabría esperar para una primera aproximación y establece las bases para desarrollar la de segundo orden (300).

Todo lo cual hace el trabajo especialmente interesante como ejemplo de aplicación de los métodos de perturbaciones de que tan amplio uso se hace, con excelentes resultados, como hemos visto ya en otros ejemplos, en muchos problemas de Mecánica de Fluidos.

c) *Perfiles con ondas de choque*

Un tercer ejemplo de movimientos con ondas de choque es el que corresponde a la Teoría del Perfil, cuya aproximación lineal se dio en el epígrafe 16.

(299) B. A. WOODS: *The Supersonic Flow Past an Elliptic Cone*, «The Aero. Quart.», noviembre 1969.

(300) Véase la obra de M. VAN DYKE, ya citada.

La figura I-19, a) ilustra, a título de ejemplo, la corriente alrededor de un perfil triangular, bajo un ángulo de ataque nulo.

En tales condiciones y si el ángulo δ_a del perfil en el borde de ataque es inferior al δ_m de desviación máxima de la onda de choque para el número de Mach M_∞ de la corriente principal, se forma una onda de choque débil adherida, con lo que la corriente detrás de ella sigue siendo supersónica.

En el punto B_0 se produce, como muestra la figura, una onda simple de expansión, cuya desviación total θ_0 es la suma de δ_a y δ_c , que resulta necesaria para que la corriente uniforme detrás de ella sea tangente al tramo BC del contorno del perfil.

Por último, en el borde C de salida, se produce una segunda onda de choque, que restablece la dirección horizontal de la velocidad, a partir de ese punto.

Por lo que respecta al semiespacio inferior, no queda perturbado por la presencia del perfil (301), por lo que el movimiento en él es uniforme y la velocidad V_∞ se mantiene paralela al eje x .

En la proximidad del perfil, las características de la corriente tales como la velocidad, el coeficiente de presión, etc., son fácilmente calculables, mediante la aplicación de las teorías de las ondas de choque y de las ondas simples que hemos visto.

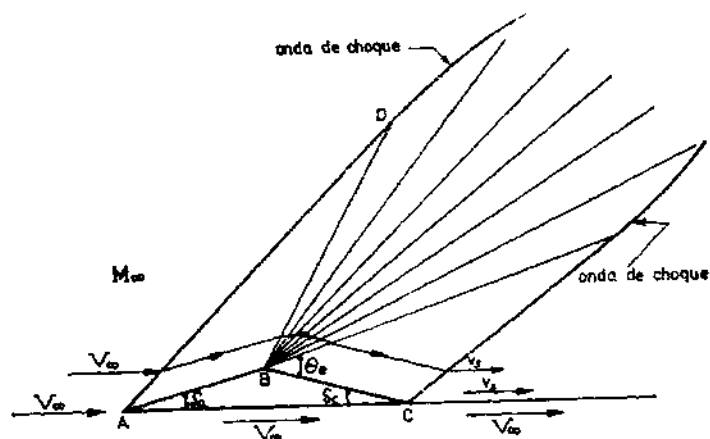
En particular hay que señalar que la velocidad de salida v_3 es distinta de la V_∞ del semiplano inferior, puesto que la corriente superior ha experimentado dos incrementos de entropía al atravesar las ondas de choque de los bordes de ataque y salida y la presión tiene que ser la misma p_∞ a ambos lados del eje x , a partir del punto C en que termina el perfil. Concretamente, es $v_3 < V_\infty$, con lo que del punto C arranca una «superficie de contacto» horizontal, supersónica, es decir, una superficie de discontinuidad de la velocidad tangencial, del tipo que estudiamos en el epígrafe 9.

Ahora bien, el problema no es tan sencillo cuando se trata de determinar las características de la corriente en todo el espacio, en lugar de hacerlo solamente en la proximidad del perfil y, en especial, cuando se quiere calcular la forma geométrica de las ondas de choque, en la zona de interferencia de éstas con la expansión.

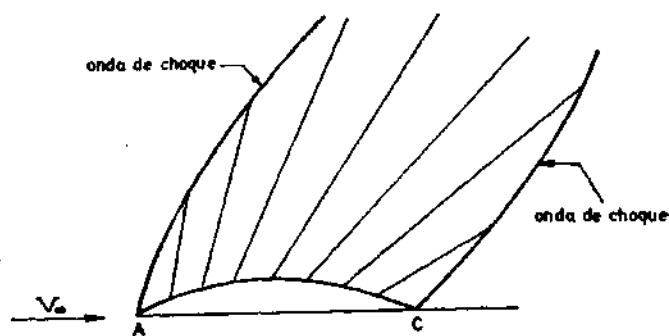
En efecto, a partir del punto D se produce una interacción entre la onda de choque del borde de ataque y la de expansión, que curva

(301) Se prescinde aquí, naturalmente, de los efectos del rozamiento que se estudiaron en los epígrafes 10 a 12.

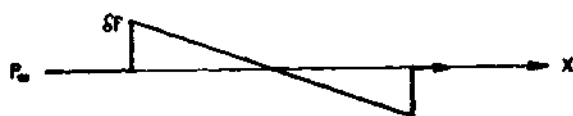
la primera en la forma indicada en la figura, produciendo además ondas reflejadas que arrancan de los puntos de interacción e interfieren con la corriente en el espacio situado aguas abajo de aquéllos.



a) Perfil triangular



b) Perfil curvo



c) Onda en N

Fig. 1-19.—Teoría de perfil con ondas de choque.

En definitiva, el problema a que todo ello da lugar resulta muy difícil de tratar, dificultad que se agrava, además, cuando el contorno del perfil es curvo como el que muestra la figura I-19, b), porque entonces la onda de expansión, que estaba localizada antes en el punto B, se distribuye sobre todo el contorno del perfil, como ocurría en el caso de la figura I-14, b) y la curvatura de las ondas de choque arranca de los bordes de ataque y salida del perfil, en lugar de que aquéllas tengan un tramo recto en la proximidad de tales bordes, como hemos visto que ocurre en el ejemplo de la figura I-19, a) (302).

Una situación de esta naturaleza justifica el empleo de métodos aproximados, que traten de mejorar los resultados de la Teoría Lineal del epígrafe 16, mediante la inclusión, en el cálculo, de términos de orden superior, al mismo tiempo que mantienen la dificultad del problema dentro de límites que lo hagan asequible.

Dentro de este planteamiento, una aproximación de segundo orden para el cálculo del coeficiente de presión sobre el contorno del perfil, se debe a Busemann (303) y se basa en el hecho de que si se calculan las variaciones de los valores de las diversas magnitudes fluidas en función del ángulo de desviación δ a través de una onda de choque y las que se obtienen cuando tal desviación se produce a través de una onda simple de compresión, como la de la figura I-14, c), se comprueba que las diferencias entre ambos pares de resultados son del orden de magnitud de δ^2 , como corresponde al hecho de que el salto de entropía a través de la onda, que es lo que diferencia ambos procesos, sea también de tercer orden (304).

Por tanto, si el coeficiente de presión C_p se expresa en la forma

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = C_1 \cdot \delta + C_2 \cdot \delta^2, \quad [379]$$

(302) Para el cálculo de la curvatura de la onda en el borde de ataque, ver T. I. THOMAS: *On Curved Shock Waves*. «*Jour. Math. Phys.*», 1947, págs. 62-68. *Calculation of the Curvatures of Attached Shock Waves*. Idem id., 1948, páginas 279-97.

(303) A. BUSEMANN: *Aerodynamischer Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit*. «*Luft. Forsch.*» 1935, págs. 210 y sigts.

(304) Ver capítulo II.

los valores de C_1 y C_2 pueden calcularse en función de δ mediante la teoría isentrópica de las ondas simples que se expuso anteriormente, con lo que resulta:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2}{(M_\infty^2 - 1)^{1/2}}; \\ C_2 &= \frac{(M_\infty^2 - 2)^2 + \gamma M_\infty^2}{2 (M_\infty^2 - 1)^2} \end{aligned} \right\} \quad [380]$$

La expresión [379] permite calcular fácilmente las características aerodinámicas de un perfil de forma dada, tales como sus coeficientes de sustentación C_L y de resistencia C_D , en función de la forma del perfil. En efecto, para ello basta con introducir en [379] la expresión

$$\delta^\pm = -\alpha + \frac{d c^\pm(x)}{d x}, \quad [381]$$

en donde

$$y_{c^\pm}(x) = C^\pm(x) \quad [382]$$

es la curva del contorno del perfil y los signos $+$ y $-$ corresponden, respectivamente, a las caras superior e inferior del mismo.

La aproximación de Busemann representa una importante mejora respecto de la de Ackeret, la cual se reduce, naturalmente, al primer término de los dos de la expresión [379].

Sus resultados muestran excelente coincidencia con los del cálculo exacto, para desviaciones δ de hasta 10° ó 12° , para números de Mach intermedios, que no sean ni demasiado grandes ni demasiado próximos a la unidad.

Por otra parte, no resulta difícil calcular la tercera aproximación cuando se trata solamente de determinar las características de la corriente sobre el contorno del perfil, porque para ello basta con incorporar a la expresión [379] un término de tercer orden en δ , dado por la teoría de las ondas simples, más un término de corrección, proporcional a la desviación δ_{c^s} de la onda de choque en el borde

de ataque (305), que tiene en cuenta el hecho de que la diferencia entre las propiedades del movimiento, en ambos tipos de procesos, es de tercer orden, como se ha visto.

Hemos dicho que el cálculo de la corriente en la zona exterior del plano del perfil y, en particular, la determinación de la forma geométrica de las ondas de choque, constituye un problema cuya resolución exacta entraña grandes dificultades, por las razones que se han puesto de manifiesto.

Por ello, Friedrichs (306) ha desarrollado una solución aproximada del problema, mediante la extensión a todo el espacio del movimiento, del método de las ondas simples que acabamos de describir para el contorno del perfil, lo que le permite determinar la posición aproximada de las ondas de choque de los bordes de ataque y salida, mediante la exigencia del cumplimiento exacto, en cada uno de los puntos de la onda, de una de las condiciones de Rankine-Hugoniot: la que relaciona la inclinación de la onda con la desviación de la corriente que se produce a través de ella.

Las conclusiones fundamentales de esta teoría son: que la intensidad del salto a través del choque decrece asintóticamente como $d^{-\frac{1}{2}}$, siendo d la distancia al borde de ataque del perfil y que las ondas de los bordes de ataque y salida tienden, lejos del perfil, a formar dos ramas parabólicas, como ilustra la figura I-19, a), de eje común, paralelo a la línea de Mach de la corriente no perturbada, conclusiones ambas que habían sido anticipadas por Lighthill (307).

El comportamiento asintótico, a gran distancia del obstáculo, del campo de presiones originado por aquél, tiene también importancia práctica en relación con el ruido de los aviones supersónicos y, especialmente, con la producción de los célebres e impopulares «bangs» sónicos.

En efecto, si se traza el contorno de las perturbaciones de la presión originadas por el perfil, sobre una línea $y = \text{const.}$ situada a gran distancia de aquél, se obtiene una curva como la de la figu-

(305) Se trata de la teoría llamada del «choque y expansión». Ver M. J. LIGHTHILL, capítulo E, volumen VI de la Enciclopedia de Princeton.

(306) K. O. FRIEDRICHS: *Formation and Decay of Shock Waves*. «Comm. Pure Appl Math.», 1948, págs. 211 y sigts.

(307) M. J. LIGHTHILL: *The Conditions Behind the Trailing Edge of the Supersonic Aerofoil*. «Rep. and Memm.», n.º 1930. Aer. Res. Coun., Londres, 1944.

ra I-19, c), llamada onda en N, que es la que produce el «bang».

En ella, A y B corresponden, respectivamente, a las ondas de choque anterior y posterior del obstáculo, entre las que se produce una expansión, representada por el tramo inclinado, cuya pendiente se demuestra, además, que es independiente de la forma del perfil (308).

En la realidad, el cálculo de la intensidad y características de los «bangs» que produce realmente una aeronave bajo condiciones dadas de vuelo supersónico, resulta muy complicado.

En efecto, en primer lugar hay que determinar el comportamiento asintótico de la perturbación que produce el avión en el campo de presiones, el cual se expresa, en teoría lineal, mediante una complicada distribución de fuentes supersónicas, situadas sobre el eje de la aeronave y cuya intensidad está relacionada con las características aerodinámicas de la misma, bajo las condiciones de vuelo supuestas.

En segundo lugar, hay que tomar en consideración el estado de la atmósfera a través de la cual se propaga aquella perturbación hasta llegar al suelo, porque tal estado puede introducir deformaciones muy importantes en el perfil de la onda en N, incluida la amplificación del «bang» por un efecto local en determinados puntos.

Como el problema es realmente importante, según se ha dicho, la teoría ha sido extensamente desarrollada durante los últimos años y existe abundante bibliografía sobre la misma. En particular, existe un excelente trabajo de revisión muy reciente, debido al prof. Hayes de la Universidad de Princeton (309), que contiene toda la información necesaria para el estudio de este problema.

d) Ondas de choque desprendidas

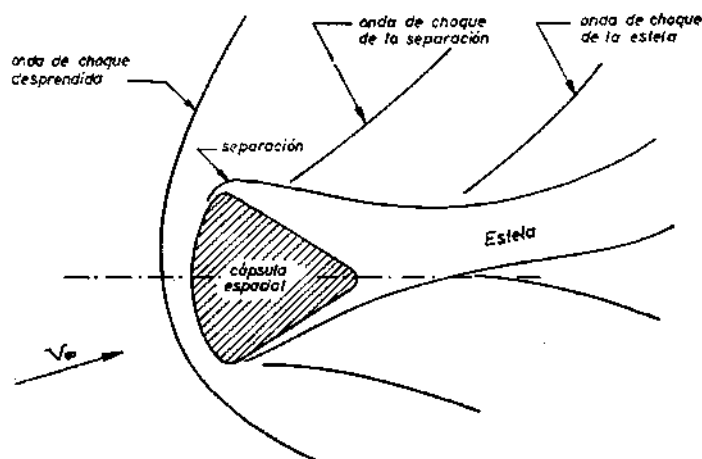
Pasemos ahora a considerar el problema más representativo de los movimientos con ondas de choque desprendidas: el del llamado «cuerpo romo», que ilustra el esquema de la figura I-20 para un obstáculo de forma similar a la de las cápsulas espaciales, que se mueve a velocidad supersónica en el seno de un gas.

Este caso, cuya complejidad aerodinámica ilustra la figura I-20,

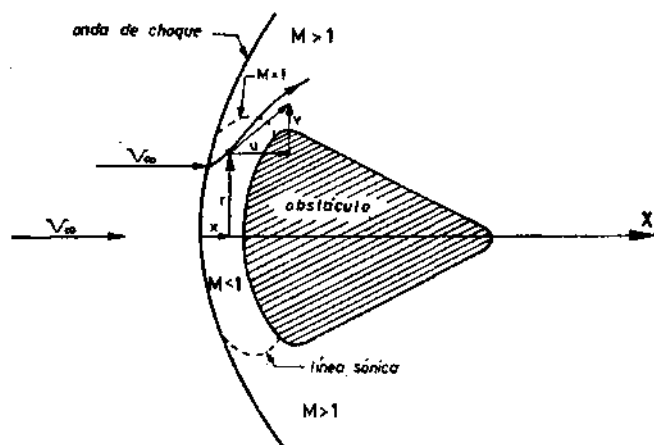
(308) Ver Lighthill, ya citado.

(309) W. D. HAYES: *Sonic Boom*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 269-90. Lo que los ingleses llaman «bang», en Estados Unidos se suele designar «boom».

a), tiene un interés práctico considerable, en primer lugar porque todos los obstáculos tienen al menos una zona local, en el entorno de su proa, en que se dan estas condiciones, ya que la misma nunca puede formar un ángulo agudo perfecto.



a) Esquema del movimiento supersónico de una capsula espacial



b) Movimiento con simetría de revolución

Fig. 1-20.—Movimiento supersónico de un cuerpo de proa redondeada.

Pero es que, además, se dan casos en que la proa redondeada es una exigencia tecnológica, como ocurre en las cápsulas espaciales como las de la figura, donde la forma de las mismas está determinada por las condiciones de su paso a través de la atmósfera, a gran velocidad, en su regreso a la tierra.

Una descripción muy completa del problema y de los métodos empleados para su resolución, junto a una extensa bibliografía para el estudio del mismo, se puede hallar en un reciente trabajo de revisión de Mc Carthy (310).

Por nuestra parte, nos limitaremos a exponer los fundamentos del cálculo del movimiento entre la onda de choque desprendida y la parte anterior del obstáculo, empezando por considerar el caso de un cuerpo con simetría de revolución como el que ilustra la figura I-20, b), que se mueve paralelamente a su eje.

En un sistema de referencia ligado al obstáculo, el movimiento resulta estacionario y como la proa no es aguda, no puede formarse una onda de choque adherida, sino que se forma una onda desprendida, de forma curva, como muestra la figura.

Delante de la onda de choque, el movimiento del gas es uniforme, porque la primera noticia que tiene éste de la presencia del obstáculo es, precisamente, la onda de choque.

Por consiguiente, el espacio perturbado por la presencia del obstáculo es el comprendido entre el contorno de éste, que es un dato del problema, y la onda de choque, cuya posición y forma geométrica son desconocidas «a priori».

En la región próxima al eje, la onda es casi normal, por lo que la velocidad detrás de ella será subsónica.

Por el contrario, en las zonas alejadas del eje, la inclinación de la onda de choque se aproxima a la de Mach y la velocidad detrás de ella es supersónica.

Por tanto, el movimiento del gas detrás de la onda tiene una zona subsónica $M < 1$ y otra supersónica $M > 1$, separadas por una «línea sónica», $M = 1$, como muestra la figura I-20, b).

Es decir, que en cuanto al carácter del sistema diferencial del problema, éste es elíptico en la proximidad del eje y pasa a hiperbólico en la zona exterior a la línea sónica.

(310) J. F. Mc CARTHY: *Hypersonic Blunt-Body Gas Dynamics*. «Modern Developments in Gas Dynamics». Ed. por W. H. T. Loh. Plenum Press., Nueva York, 1969.

Por último, puesto que la onda de choque es curva, el teorema de Crocco demuestra, como hemos visto en [373], que el movimiento detrás de ella es rotacional, lo que impide servirse de un potencial de velocidades para el cálculo de la velocidad.

En tales circunstancias y con la notación que muestra la figura, el sistema diferencial del movimiento es el siguiente:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial x}{\partial} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho v r) = 0; \quad [383]$$

Ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento:

En dirección x:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad [384]$$

En dirección r:

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}. \quad [385]$$

Ecuación de conservación de la entropía sobre cada línea de corriente:

$$u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial r} = 0. \quad [386]$$

Por último, *ecuación de estado:*

$$f(p, \rho, S) = 0. \quad [387]$$

Por consiguiente, el problema consiste en integrar el sistema anterior para u , v , ρ , p y S , con las condiciones de contorno que corresponden al caso, las cuales, evidentemente, son las siguientes:

1. Sobre el contorno del obstáculo, la velocidad es tangente al mismo.

2. Aguas arriba de la onda de choque, las condiciones del movimiento son, como se ha dicho ya, uniformes.

3. Sobre cada punto de la onda de choque, conocidas las condiciones de movimiento uniforme delante de ella y su inclinación local, las condiciones de Rankine-Hugoniot determinan los valores de todas las magnitudes fluidas detrás de la onda.

Lo que ocurre es que, como sucedía para los conos, la forma y posición de ésta se desconocen antes de resolver el problema y es ahí donde radica la mayor dificultad, puesto que aquéllas dependen de todo el campo del movimiento detrás de la onda, el cual no puede calcularse, a su vez, sin conocerla.

Una solución obvia de esa dificultad consiste en resolver también aquí el «problema inverso», suponiendo, como se ha hecho en otros casos, una forma de la onda de choque y calculando a partir de ella el contorno del obstáculo que la produce. Este método, cuya dificultad respecto al caso cónico es evidente, ha sido empleado principalmente en los Estados Unidos de América, en tanto que en Rusia se ha dado preferencia al «problema directo», como veremos después.

Aunque se han intentado algunos procedimientos analíticos para el cálculo de la solución, tales métodos resultan inadecuados (311), por lo que se hace necesario apelar a la integración numérica mediante el empleo de ordenadores.

Para ello es adecuado introducir la función de corriente $\psi(x, r)$ de Stokes, cuya existencia resulta, como vimos en [92] para los fluidos incompresibles, de la ecuación de continuidad [383], lo que permite reducir en una unidad el número de variables, ya que u y v se expresan en función de ψ en la forma

$$r \rho u = \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad r \rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad [388]$$

Por otra parte, la ecuación [386] de conservación de la entropía significa que ésta depende tan sólo del valor de la función de corriente ψ :

$$S = S(\psi), \quad [389]$$

condición que, al ser llevada a la ecuación de estado [387], permite

(311) Para una crítica de los mismos, ver M. VAN DYKE: *The Supersonic Blunt-Body Problem-Review and Extension*, «Jour. Aer. Sci.», 1958, págs. 485-96.

expresar la presión p en función de la densidad ρ y del valor ψ , en la forma:

$$p = p(\rho, \psi). \quad [390]$$

Con todo ello, las dos únicas incógnitas del problema son, finalmente, ρ y ψ , cuyos valores están determinados por las ecuaciones que resultan de introducir [388] y [390] en las dos ecuaciones [384] y [385].

Ahora bien, si se conoce la forma de la onda de choque, las condiciones de Rankine-Hugoniot determinan los valores de todas las magnitudes fluidas en cada uno de sus puntos, los cuales, junto a [389] y a las ecuaciones del movimiento, permiten conocer sobre la onda los valores de las dos funciones incógnitas ρ y ψ , así como los de sus derivadas, lo que reduce el problema a uno de Cauchy, en el que los valores de las funciones incógnitas y de sus derivadas se dan sobre la onda de choque.

Con ello se tiene el punto de partida para proceder a la integración numérica de las dos ecuaciones en derivadas parciales que, como se ha dicho, determinan los valores de las incógnitas ρ y ψ , cuyos valores permiten calcular fácilmente los de p , u y v .

Finalmente, la condición $\psi = 0$ determina el contorno del obstáculo correspondiente a la forma que se ha supuesto para la onda de choque desprendida.

Lo que ocurre, sin embargo, es que el sistema es de tipo elíptico en la región subsónica y el problema de Cauchy no es el adecuado para esa zona, circunstancia que se traduce en la inestabilidad del algoritmo numérico de integración.

Esta dificultad ha sido eludida por Garabedian y Lieberstein (312), mediante la prolongación analítica en el plano complejo, lo que les permite replantear en forma satisfactoria el problema de Cauchy, para que resulte correctamente aplicado en el dominio subsónico.

Una reciente exposición de los fundamentos del método de Garabedian y Lieberstein, así como de los tipos de singularidades a que puede dar lugar el «problema inverso» en las zonas subsónica y supersónica del movimiento, especialmente para números de Mach

(312) P. R. GARABEDIAN y H. M. LIEBERSTEIN: *On the Numerical Calculation of Detached Bow Shock Waves in Hypersonic Flow*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1968, páginas 109-18.

próximos a la unidad, ha sido llevado a cabo por el prof. Garabedian del Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York, en el volumen dedicado en homenaje al prof. Sedov, de la URSS (313).

Por su parte, van Dyke, en el trabajo citado, desarrolla a su vez un método de integración numérica para una familia de ondas de choque de forma cónica (hipérbola, parábola, elipse y circunferencia), mediante el empleo de un sistema de coordenadas ortogonales que tiene la ventaja de incluir entre ellas a la propia onda de choque y hace aplicación del procedimiento a un conjunto de casos empleando un calculador electrónico.

En particular, determinada la forma del obstáculo que corresponde a una onda dada, se calculan sin dificultad las distribuciones de presiones, velocidades y temperaturas sobre el mismo, así como la posición de la línea sónica, que separa la zona subsónica de la supersónica detrás de la onda.

La Administración Aeronáutica y del Espacio de los Estados Unidos (NASA) ha llevado a cabo una programación del método para su aplicación con una máquina IBM 650 (314), calculando un centenar de soluciones, para números de March comprendidos entre 1,2 e infinito.

El procedimiento numérico propuesto permite calcular la solución en la región subsónica y hasta atravesar la línea sónica. Más allá de ésta, el sistema diferencial es hiperbólico y la solución numérica puede obtenerse más fácilmente por el método de las características descrito en el epígrafe precedente.

Como hemos dicho, una dificultad del método resulta del hecho de que el problema, en la región subsónica, es numéricamente inestable, lo que significa que los errores crecen en progresión geométrica al avanzar en las diversas etapas de integración numérica, a partir de la onda de choque. Sin embargo, el número de etapas que hay que calcular, para determinar el campo del movimiento entre la onda y el obstáculo, es lo suficientemente reducido como para que el efecto de la inestabilidad no invalide el procedimiento.

(313) P. R. GARABEDIAN: *Global Structure of Solutions of the Inverse Detached Shock Problem*. «Problems in Hydrodynamics and Continuum Mechanics». STAM. Filadelfia, 1969.

(314) M. VAN DYKE y H. D. GORDON: *Supersonic Flow Past a Family of Blunt Axisymmetric Bodies*. «Tech. Rept. R-1», NASA, 1959.

Aun cuando la existencia y unicidad de la solución del problema propuesto no han sido demostradas matemáticamente, se ha efectuado una comprobación «experimental» de la convergencia a una solución mediante cálculos sucesivos con aproximación creciente.

Otros autores han desarrollado, por la misma época, métodos parecidos de integración numérica para el «problema inverso», entre los que puede citarse, por su interés, el propuesto por los profesores Ferri y Vaglo-Laurin, del Instituto Politécnico de Brooklin (315).

Pero, seguramente, el trabajo más completo sobre integración numérica del problema inverso es el de H. Lomax y M. Inonye, de 1964 (316), tanto por lo que respecto a su planteamiento, como a la programación, análisis de las inestabilidades inherentes (singularidades, p. e.) o inducidas por el método numérico de cálculo, así como por lo que se refiere a los resultados obtenidos y a la bibliografía para el estudio del tema, por lo que remitimos a él al lector.

En 1966, van Dyke ha revisado la situación del problema (317), en un intento de actualizar los métodos analíticos que precedieron a los procedimientos numéricos, mediante una mejora de su débil convergencia por desarrollos en series aproximadas, con objeto de encontrar caminos para explorar problemas más complejos, especialmente los asimétricos que resultan de los movimientos con ángulo de ataque.

El «problema directo», consistente en el cálculo de la forma de la onda de choque y del campo del movimiento a partir de una forma dada de obstáculo fue desarrollado en Rusia por Belotserkowskii (318) aproximadamente a la vez que se resolvía el «problema inverso» en los Estados Unidos.

Un investigador español, F. G. Gravalos, desarrolló en Estados

(315) A. FERRI y R. VAGLIO-LAURIN: *Theoretical Investigations of the Flow Field About Blunt-Nosed Bodies in Supersonic Flight*. «Jour. Aer. Sci.», 1958, págs. 761-70.

(316) H. LOMAX y M. INONYE: *Numerical Analysis of Flow Properties about Blunt Bodies Moving at Supersonic Speeds in an Equilibrium Gas*. «NASA Tech. Rep. R-204».

(317) M. VAN DYKE: *The Blunt-Body Problem Revisited. Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow*. Ed. por J. G. Hall. Cornell Univ. Press., 1966.

(318) O. M. BELTSEKOWSKII: *Flow with a Detached Shock Wave about a Symmetrical Profil*. Trad. en «Appl. Math. and Mech.», 1958, págs. 1557 y sigts. También, *Supersonic Gas Flow Around Blunt Bodies*. «Tech. Transl. F-453». NASA, 1967.

Unidos, en 1959, un método de cálculo numérico para la resolución del problema directo (319), mediante un procedimiento de iteración a partir de una forma supuesta de onda de choque, que determina la distribución de la entropía y de una distribución de presiones también supuestas sobre la superficie del obstáculo y procediendo aguas arriba a lo largo de las líneas de corriente, hasta la determinación de la nueva forma de la onda de choque.

Por último, un método reciente y muy poderoso, que ya mencionamos en el problema del cono, consiste en suponer que el movimiento estacionario es la solución asintótica de un movimiento no estacionario que converge hacia aquél al pasar el tiempo.

La ventaja de este tratamiento estriba en que los movimientos no estacionarios son siempre hiperbólicos, lo que facilita grandemente la integración numérica.

El procedimiento consiste, realmente, en una relajación a partir de condiciones iniciales arbitrarias en cuanto a la forma y presión de la onda de choque y ha sido desarrollado especialmente por G. Moretti y M. Abbett (320).

Este método tiene las ventajas de estar matemáticamente bien planteado; de que la técnica empleada es estable y la precisión aumenta al reducirse el tamaño de la red del cálculo numérico, así como de que el trabajo requerido de la máquina calculadora es reducido.

Por ejemplo, en una calculadora IBM 7094, el tiempo necesario es de algunos minutos para movimientos con simetría axial y de algo más de media hora para movimientos con ángulo de ataque grande, a los que nos referimos después.

Un método no estacionario pero de carácter analítico, en lugar de ser numérico como el de Moretti que acabamos de describir, y que además resulta de aplicación muy general, ha sido desarrollado en Francia por Cabannes y Bausset (321) y la comparación de sus

(319) F. G. GRAVALOS et al.: *The Supersonic Flow about a Blunt Body of Revolution for Gases at Chemical Equilibrium*. «Proc. Ninth Int. Astr. Cong. Springer, Berlin, 1959.

(320) G. MORETTI y M. ABBETT: *A Time-Dependent Computational Method for Blunt Body Flow*. «AIAA Jour.», 1966, págs. 2136 y sigts.

(321) H. CABANNES y M. BAUSSET: *Application on the Method of Padé to the Determination of Shock Waves*. Obra homenaje a Sedov, ya citada, páginas 95-14. También, A. H. VAN TUYL: *Use Rational Approximations in the Calculation of Flows Past Blunt Bodies*. «AIAA Jour.», 1967, págs. 218-25.

resultados con los obtenidos por algunos de los procedimientos descritos pone de manifiesto una coincidencia bastante satisfactoria.

Para terminar con el problema simétrico debemos mencionar la adaptación llevada a cabo por Masson et al. (322) al cálculo de cuerpos romos con ondas desprendidas, en movimientos planos o con simetría de revolución, del método general de Godunov (323) para la integración numérica de las ecuaciones de la Mecánica de Fluidos por diferencias finitas.

Aparte del problema simétrico, tiene gran importancia el estudio de los movimientos asimétricos que resultan de suponer un cuerpo de revolución cuyo eje se encuentra inclinado un cierto «ángulo de ataque» con respecto a la dirección del movimiento, como el de la figura I-20, a), ángulo que, en la práctica, no es pequeño en muchos casos de interés.

Naturalmente que para ángulos de ataque pequeños, el problema puede tratarse a partir de la solución simétrica mediante un método de perturbaciones pequeñas. Así lo ha hecho, por ejemplo, Swigart (324) en los Estados Unidos, mediante un desarrollo en serie de potencias del ángulo de ataque.

Sin embargo, como se ha dicho, interesa también el caso de ángulos de ataque grandes, el cual ha sido resuelto en Estados Unidos por Moretti y Bleich (325) mediante la extensión del procedimiento no estacionario antes descrito y por Webb (326) mediante la integración numérica del «problema inverso».

En Rusia, la solución se ha obtenido, para el «problema directo», por Zapianov y otros. Un ejemplo de aplicación de esta técnica a una familia de obstáculos de proa esférica de radio grande y superficie lateral cónica, ha sido publicada, por ejemplo, por Dyakonov y

(322) B. S. MASSON, T. D. TAYLOR y R. M. FOSTER: *Application of Godunov's Method for Blunt-Body Calculations*. «AIAA Jour.», 1969, págs. 694-98.

(323) S. K. GODUNOV, A. V. ZABRODIN y C. P. PROKOPOV: *A difference Scheme for Two-Dimensional Unsteady Problems of Gas Dynamics and Computation of Flow with a Detached Shock Wave*. «Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz. Acad. Cienc. URSS», 1961, pág. 1020. Existe traducción inglesa editada por Holt.

(324) R. SWIGART: *Hypersonic Blunt Body Flow Fields at Angle of Attack*. «AIAA Jour.», 1964, págs. 115-17.

(325) G. MORETTI y G. BLEICH: *Three-Dimensional Flow around Blunt Bodies*. «AIAA Jour.», 1967, págs. 1557 y sigts.

(326) H. G. WEBB et al.: *Inverse Solution of Blunt-Body Flow Fields at Large Angle of Attack*. «AIAA Jour.», 1967, págs. 1079-85.

otros, en la obra de homenaje al prof. Sedov citada anteriormente (327).

Una extensión al movimiento con ángulo de ataque del método ruso de Belotserkowskii antes citado para el problema directo, ha sido efectuada en los Estados Unidos por Waldman (328) y aplicada al caso de la cápsula «Apolo».

Por último, una aplicación más detallada a la cápsula del «Apolo» de método inverso de Webb descrito anteriormente, se puede encontrar en el trabajo de Mc Carthy citado al comienzo, junto con una comparación de mediciones experimentales de la distribución de presiones, las cuales ilustran el excelente grado de aproximación que puede alcanzarse con estos laboriosos métodos de cálculo.

e) Ondas explosivas

El último ejemplo que vamos a considerar en este epígrafe, es el de la onda de choque que se genera cuando una carga explosiva detona en el seno del aire o del agua, propagando la explosión a través del medio inerte con intensidad y velocidad generalmente variables.

El análisis de la evolución de la onda, así como el del movimiento en la zona perturbada por el paso de la misma, tiene gran interés para el conocimiento de los efectos producidos por las explosiones, así como en muchas otras aplicaciones.

Por ello, el problema ha sido objeto de numerosos estudios, los cuales ofrecen además interés matemático por la dificultad intrínseca de la cuestión, que solamente en casos especiales permite obtener soluciones analíticas, lo que obliga, en general, a la búsqueda de soluciones aproximadas, válidas en determinadas etapas del proceso, o a hacer apelación a métodos de integración numérica para casos concretos.

Ya E. Jouguet, en la última parte de su célebre Mecánica de los Explosivos (329), abordó la cuestión mediante algunas consideracio-

(327) N. DYAKONOV et al.: *Supersonic Three-Dimensional Flow Past Blunt Bodies*.

(328) G. WALDMAN: *Integral Approach to the Yawed Blunt Body Problem*. «Aerpace Proceedings», 1966.

(329) Ver referencia del capítulo VI.

nes básicas y planteando las ecuaciones generales del problema, de las que, por simple análisis dimensional, dedujo algunas reglas de semejanza para establecer correlaciones entre los efectos de explosiones producidas por cargas geoméricamente semejantes, pero de tamaños diferentes o propagándose a través de medios distintos.

En especial, es claro que el parámetro geométrico de correlación es la raíz cúbica del volumen de la carga (330).

Además, Jouguet consideró el caso particular de la propagación plana que corresponde aproximadamente al de una onda explosiva en una galería de mina, en relación con las explosiones de grisú.

El problema ha sido analizado para ondas planas, cilíndricas y esféricas, pero en lo que sigue nos limitaremos, por brevedad, al caso de la onda esférica, que es el de mayor interés práctico, en relación con las explosiones.

La figura 1-21 esquematiza el modelo de onda esférica y el campo radial de presiones, densidades y velocidades que se observa en un instante determinado, en la zona afectada por la explosión hasta ese momento. Al variar el tiempo, la onda se propaga a nuevas zonas de medio inerte, decreciendo en intensidad, al mismo tiempo que se modifica el perfil de la distribución de presiones, velocidades, temperaturas, etc., en el interior de la esfera abarcada por la onda.

Puesto que la intensidad de la onda de choque generada por la detonación de la carga disminuye al alejarse del centro de explosión, ocurre que el salto de entropía originado por ella disminuye también a medida que la onda atraviesa las diversas capas concéntricas del fluido y es esta variación en el grado de irreversibilidad lo que introduce una de las dificultades básicas del problema. En efecto, considerando el caso del aire, dentro de la zona afectada por la explosión, cada partícula, en su movimiento subsiguiente al paso de la onda, obedece a una ley adiabática del tipo

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C. \quad [391]$$

(330) Para un estudio más detallado del problema de semejanza, véase el artículo de U. ERICSSON y K. EDIN: *On Complete Blast Scaling*. «The Physics of Fluids», 1960, págs. 893 y sigts., donde se encontrará además bibliografía teórica y experimental. También S. GLASSTONE: *The Effects of Nuclear Weapons*. Comisión de Energía Atómica, USA, 1962, y L. H. BRODE: *Review of Nuclear Weapons Effects*. «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1968, págs. 153-202.

Pero el valor de la constante C depende de la intensidad que tenía la onda de choque cuando alcanzó a la partícula, la cual, como se ha visto, es decreciente con la distancia al centro de la explosión. Por consiguiente, el movimiento, del que depende, a su vez, la evolución de la onda de choque, no es isentrópico.

Por otra parte, si bien se trata de un problema con simetría esférica, el proceso no es estacionario, por lo que las variables independientes son dos: el tiempo t , contado a partir del instante en que se produjo la explosión, y la distancia r radial al centro de ésta.

Las ecuaciones aplicables al mismo son, por tanto, las siguientes (331):

Conservación de la masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial v}{\partial r} + 2 \frac{v}{r} \right) = 0; \quad [392]$$

Conservación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0; \quad [393]$$

Isentropía de cada partícula fluida:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial r} = 0. \quad [394]$$

En este sistema, la ecuación [394] expresa el carácter reversible de las transformaciones adiabáticas de cada partícula, subsiguientes al paso de la onda. Concretamente, en el aire, esta ecuación es equivalente a la siguiente, en virtud de [391]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0. \quad [395]$$

El problema consiste, naturalmente, en la integración del sistema.

(331) Las ecuaciones [393] y [395] subsisten para ondas planas y cilíndricas, mientras que el coeficiente 2 del último término de [392] hay que sustituirlo, respectivamente, por cero y uno en dicho caso.

de tres ecuaciones en derivados parciales [392], [393] y [395] para la determinación de v , ρ y p , con las condiciones iniciales y de contorno que correspondan a cada caso.

Por ejemplo, una esquematización de interés es la siguiente: en el momento inicial se libera instantáneamente, en el origen, una cantidad dada de energía E_0 en la atmósfera en reposo. Entonces, la condición inicial resulta ser la siguiente:

Para $t = 0$ y para todo $r > 0$ (332):

$$v = 0; \quad p = p_0; \quad \rho = \rho_0. \quad [396]$$

Mayor dificultad tiene el establecimiento de las condiciones de contorno para $t > 0$. En efecto, como hemos dicho, la explosión genera una onda de choque esférica que, en el instante t , habrá alcanzado el punto $R(t)$, avanzando con la velocidad de propagación variable:

$$V \equiv \frac{dR(t)}{dt}. \quad [397]$$

Por consiguiente, para todo $r > R(t)$ se aplicarán también las condiciones [396]; pero en $r = R(t)$ hay una onda de choque, donde p , ρ y v deben cumplir las condiciones del salto de Rankine-Hugoniot.

Así pues, como en algunos de los ejemplos anteriores, las condiciones de contorno que completan la definición del problema se dan sobre una superficie cuya ley de movimiento $R(t)$ es desconocida «a priori», así como lo es también la intensidad del salto a través de la onda.

Una condición adicional de compatibilidad, que resulta del principio de conservación de la energía y que sirve para fijar el valor de $R(t)$ es que la suma de las energías interna y cinética de la masa encerrada por la onda sea constantemente igual a la suma de la energía encerrada en el mismo volumen en el instante inicial, más la energía E_0 liberada instantáneamente por la explosión.

(332) En el origen existe, naturalmente, una singularidad de la solución, donde v es cero, pero p y ρ se hacen infinitas.

Esta condición se expresa así:

$$\int_0^{R(t)} r^2 \rho \left[(e - e_0) + \frac{v^2}{2} \right] dr = \frac{E_0}{4\pi}, \quad [398]$$

en donde e es la energía interna del aire, por unidad de masa.

Claro es que la integración del sistema propuesto, con las condiciones iniciales y de contorno que acaban de describirse, sólo es posible en forma aproximada, mediante soluciones que cumplan con las condiciones propuestas en determinadas etapas o recurriendo a procedimientos numéricos.

Son fundamentales, a este propósito, los trabajos desarrollados por el prof. Sedov (333), en Rusia, y por Sir Geoffrey Taylor, en la Universidad de Cambridge, durante los años de la Segunda Guerra Mundial, sobre las explosiones submarinas y en el aire. Especialmente, los dos trabajos del prof. Taylor que se refieren a la onda explosiva generada por una bomba atómica y a la comparación entre los resultados teóricos y experimentales, deducidos de las fotografías tomadas en la primera explosión nuclear que tuvo lugar en Los Alamos, Nuevo Méjico, en 1945, las cuales fueron publicadas más tarde (334).

El método seguido para la búsqueda de soluciones aproximadas consiste en suponer que se cumplen fórmulas de semejanza, mediante una agrupación adecuada de las variables r y t que permita reducir el problema a la integración de un sistema de ecuaciones ordinarias. Para ello, Taylor se guía de los resultados obtenidos en trabajos anteriores sobre problemas relacionados con éste.

Las fórmulas de semejanza que investiga suponen que las distribuciones de la presión, de la densidad y de la velocidad dependen exclusivamente de la posición de la onda de choque, determinada por el valor $R(t)$ y de la distancia reducida $\eta = \frac{r}{R(t)}$, cuyo campo de

(333) L. I. SEDOV: *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*. Acad. Press. Nueva York, 1959. El trabajo original data de 1944 y se publicó en la Academia de Ciencias de la URSS.

(334) *The Formation of a Blast Wave by a Very Intense Explosion*. I. *Theoretical Discussion*. II. *The Atomic Explosion of 1945*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1950.

variabilidad en el interior de la onda es $0 < \eta \ll 1$. Dichas fórmulas son las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{p_0} &= \left(\frac{R}{L} \right)^{-3} f(\eta); \\ \frac{v}{v_0} &= \psi(\eta); \\ \frac{v}{a_0} &= \left(\frac{R}{L} \right)^{-\frac{3}{2}} \varphi(\eta), \end{aligned} \right\} \quad [399]$$

en donde $a_0 = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}$ es la velocidad del sonido en el aire y L una longitud característica del problema, cuyo valor está determinado por la energía E_0 liberada en la explosión, mediante la fórmula siguiente:

$$L^3 = \frac{1}{B} \left(\frac{E_0}{p_0} \right), \quad [400]$$

siendo B el valor numérico de la integral

$$B = 2\pi \left[\gamma \int_0^1 \psi \cdot \varphi^2 \cdot \eta^2 \cdot d\eta + \frac{2}{\gamma - 1} \int_0^1 f \cdot \eta \cdot d\eta \right] \quad [401]$$

En particular, para $\eta = 1$, las ecuaciones [399] dan las siguientes leyes de variación del pico de presión p_e y de la velocidad V de propagación del choque, en función de la distancia $R(t)$ al origen:

$$\left. \begin{aligned} p_e &\sim R^{-3}; \\ V &\sim R^{-3/2}. \end{aligned} \right\} \quad [402]$$

La sustitución de las expresiones [399] en el sistema inicial, de-

terminan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para el cálculo de f , ψ y φ :

$$\left. \begin{aligned} (\eta - \varphi) \varphi' &= \frac{1}{\gamma} \frac{f'}{\psi} - \frac{3}{2} \varphi; \\ \frac{\psi}{\psi'} &= \frac{\psi' + \frac{2\varphi}{\eta}}{\eta - \varphi}; \\ 3f + \eta f' + \gamma(\varphi - \eta) f \frac{\psi}{\psi'} - \varphi f' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad [403]$$

con la condición de compatibilidad, además:

$$V \equiv \frac{dR}{dt} = a_0 \left(\frac{R}{L} \right)^{-3/2}, \quad [404]$$

que define la ley de variación de la velocidad de propagación de la onda de choque en función de su distancia al centro.

El sistema [403] puede integrarse numéricamente a partir de los valores de las tres funciones en el punto $\eta = 1$ correspondiente a la onda de choque.

Dichos valores están determinados por las condiciones de Rankine-Hugoniot del salto a través de la onda.

Pero ocurre que las relaciones así obtenidas son incompatibles con las que resultan de las leyes de semejanza [399], excepto para ondas de choque de gran intensidad, en cuyo caso puede despreciarse la «contrapresión» p_0 en la cara de entrada de la onda de choque, frente a la p_0 detrás de ella.

Por consiguiente, la solución de Taylor resulta aplicable al intervalo de tiempo en que la dimensión de la onda es grande con respecto a la L que mide la de la carga explosiva que la ha originado, para que ésta haya podido suponerse concentrada en el origen, pero no tan grande que su amortiguación, dada por [402], haga que no se cumpla la condición $\frac{p_e}{p_0} \gg 1$.

En la hipótesis de que se cumplan las condiciones de semejanza, se obtienen para $\eta = 1$ los siguientes valores de:

$$\left. \begin{aligned} f(1) &= \frac{2\gamma}{\gamma + 1}; \\ \varphi(1) &= \frac{2}{\gamma + 1}; \\ \psi(1) &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \end{aligned} \right\} \quad [405]$$

los cuales permiten llevar a cabo la integración numérica de [403], que resuelve el problema.

Una tabulación muy completa de f , φ y ψ ha sido efectuada por Jones (335).

La comparación de la ley teórica [404], con los resultados de la explosión atómica de Los Alamos, mostró una coincidencia realmente sorprendente, en especial cuando se considera, como apuntó Taylor, que la solución desarrollada supone constante la relación de calores específicos, condición que no puede ser cierta a las elevadas temperaturas producidas por la explosión (336).

Aun cuando Taylor obtuvo la solución del sistema [403] por integración numérica, Sedov, en su trabajo de 1944, demostró que dicho sistema se puede integrar analíticamente (337).

Courant y Friedrichs, en su teoría de las «Corrientes Supersónicas y Ondas de Choque», ya citada, extienden el análisis de Taylor a la búsqueda de soluciones de semejanza más generales, que correspondan a ondas progresivas o regresivas (implosiones). En especial, ponen de manifiesto que el método permite formular una solución explícita del problema de Taylor en el seno del agua (explosión submarina), si se supone que la relación de calores específicos es 7, valor que corresponde muy aproximadamente a la realidad.

(335) D. L. JONES: Tech. Note 155, Nat. Bur. Std., Pittsburg, 1962.

(336) Efectivamente, en todos los cálculos precedentes se ha supuesto que γ es constante, hipótesis que constituye tan sólo una aproximación. En cuanto al valor de γ que debe emplearse en estos cálculos, para explosiones fuertes se sitúa en torno a 1,25, en vez del 1,4 que corresponde a las condiciones normales. Ver el capítulo IV.

(337) Ver Sakurai, citado a continuación.

Una extensión natural de la solución de Sedov y Taylor consiste en prolongarla más allá del intervalo de validez de la ley de semejanza, bien sea por medios analíticos o mediante la integración numérica del sistema original en derivadas parciales.

Por ejemplo, Sakurai (338) ha seguido el primer procedimiento, demostrando que la solución de semejanza [339] constituye la aproximación de orden cero, cuando el sistema [392] a [395] se desarrolla en serie de potencias de M_e^{-2} , siendo $M_e = \frac{V}{a_0}$ el número de Mach de la velocidad de propagación de la onda explosiva.

Además ha calculado otros términos de este desarrollo y propuesto fórmulas aproximadas para las relaciones $\frac{p}{p_0}$, $\frac{\rho}{\rho_0}$ y $\frac{v}{a_0}$, válidas en un intervalo más amplio que el de Taylor.

Por su parte, Brode (339) ha resuelto el problema mediante integración numérica del sistema diferencial, utilizando un calculador digital rápido.

La solución constituye un interesante ejemplo de aplicación del método de cálculo numérico desarrollado por von Neumann y Richtmyer (340), del Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton, para el análisis de corrientes con discontinuidades.

Este método consiste en incorporar a las ecuaciones del movimiento un término de «viscosidad artificial» que sustituya la discontinuidad de la onda por una zona de rápida transición y cuya influencia sea despreciable en el resto del campo. Con ello, la solución es continua en todo el espacio investigado y el sistema de ecuaciones en derivadas parciales se sustituye por un sistema de ecuaciones en diferencias.

La estabilidad de la solución de este sistema queda asegurada cuando el espesor de la «casi-onda» que sustituye a la discontinuidad merced al término de viscosidad, es comparable a la longitud del intervalo elegido para la red de cálculo del sistema de ecuaciones en diferencias.

(338) A. SAKURAI: *Blast Wave Theory*, vol. I, págs. 309-75, de «Basic Developments in Fluid Dynamics», citado en el epígrafe 11.

(339) H. L. BRODE: *Numerical Solutions of Spherical Blast Waves*, «Jour. Appl. Phys.», 1965, págs. 766-75.

(340) J. VON NEUMANN y R. D. RICHTMYER: *A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks*, «Jour. Appl. Phys.», marzo 1950.

En particular, los resultados de Brode confirmaron los resultados [402] de Taylor sobre las leyes de variación del pico de presión y de la velocidad de propagación de la onda de choque con la distancia al origen.

Otro ejemplo de integración numérica también interesante consiste en la aplicación a este caso, efectuada por Chou et al. (341), del método de las características que se describió en el epígrafe precedente, el cual confirma la validez de la ley de semejanza de Taylor y Sedov, en el intervalo antes mencionado.

Otro aspecto igualmente importante del problema consiste en el comportamiento de la explosión en la proximidad de la carga detonante, cuyo estudio obliga a tomar en consideración lo que ocurre también en el interior de los gases generados por la explosión, los cuales quedan separados del aire por una «superficie de contacto», donde la presión y la velocidad son iguales entre sí a ambos lados de la onda, pero no lo son, en cambio, ni la densidad ni la temperatura.

Al estudiar el movimiento de la esfera de gases quemados se comprueba que experimenta un conjunto de pulsaciones, las cuales originan ondas de choque que se propagan hacia el interior (implosiones) y que, al reflejarse en el origen, dan lugar, a su vez, a nuevas ondas de choque hacia el exterior.

Estas ondas, al atravesar la superficie de contacto, se reflejan hacia dentro y se refractan y propagan en el aire como ondas secundarias, todo lo cual da lugar a una compleja sucesión de ondas y campos de movimiento, tanto en el seno de los gases quemados como en el aire que los rodea.

El problema ha sido estudiado numéricamente por Brode (342), aplicando el método de Von Neumann y Richtmyer antes citado, al cálculo de la explosión de un conjunto de cargas de trinitrotolueno, mediante el empleo de un calculador digital rápido.

Los resultados obtenidos permiten precisar la zona de validez de la hipótesis de la carga puntual y la aplicabilidad del poderoso método de Von Neumann y Richtmyer.

Asimismo, un tratamiento analítico simplificado de este problema,

(341) P. C. CHOU, R. R. KARPP y S. L. HUANG: *Numerical Calculation of Blast Waves by the Method of Characteristics*. «AIAA Jour.», 1967, págs. 618-23.

(342) H. L. BRODE: *Blast Wave from a Spherical Charge*. «The Physics of Fluids», 1959, págs. 217 y sigts.

mediante el empleo del método de las características, ha sido desarrollado por Friedman (343), en un trabajo que contiene una excelente descripción de las diversas regiones en que se subdividen las masas de gases quemados y de aire afectadas por la explosión en cada instante (344).

Hasta aquí se ha supuesto que la masa de aire a través de la cual se propaga la explosión se encuentra en reposo y que su estado termodinámico es uniforme.

Sin embargo, en la realidad la situación es, en general, muy distinta, lo que ha obligado a tomar en consideración los efectos de las heterogeneidades en el estado inicial de la atmósfera.

Por ejemplo, los efectos de la estratificación atmosférica, que deforman la onda de choque con respecto a la forma esférica del caso uniforme.

Un tratamiento aproximado de este caso, cuya importancia práctica es evidente, puede encontrarse en el trabajo de Sakurai ya citado; en un reciente trabajo de revisión del prof. Korobeinikov (345), de la Academia de Ciencias de Rusia, donde se tratan otras muchas cuestiones de interés sobre el problema de las ondas explosivas y en una publicación de Laumbach y Probstein (346).

Por último, una aplicación astrofísica interesante de este problema es la explosión de una estrella, en cuyo caso es necesario tomar en consideración la heterogeneidad de la densidad debida al campo gravitatorio (347).

Todo lo que precede se ha referido al caso de ondas esféricas. Sin embargo, hay que señalar que también se han estudiado con igual detenimiento las ondas planas, a las que aludimos al comienzo y las cilíndricas que resultan de liberar la energía inicial, no en un

(343) M. P. FRIEDMAN: *A Simplified Analysis of Spherical and Cylindrical Blast Waves*. «Jour. Fluid Mech.», 1961, págs. 1-15.

(344) Ver C. M. GUIRAO, J. H. LEE y G. G. BACH: *The Propagation of Non-Ideal Blast Waves*. Dept. Mech. Eng. Mc Gill Univ. Montreal, Canadá, 1974.

(345) V. P. KOROBEGINIKOV: *Gas Dynamics of Explosions*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 317-46.

(346) D. D. LAUMBACH y R. F. PROBSTEN: *A Point Explosion in a Cold Exponential Atmosphere*. «Jour. Fluid Mech.», 1969, págs. 53 y sigts.

(347) Ver A. SAKURAI, ya citado, así como del mismo autor: *Propagation of Spherical Shock Waves in Stars*. «Jour. Fluid. Mech.», 1966, págs. 436 y sigts. También Sedov, ya citado.

punto, como ocurría en las esféricas, sino distribuida sobre una superficie para las planas o a lo largo de una recta para las cilíndricas.

El tratamiento del problema, en estos casos, no introduce dificultades adicionales sobre la que acabamos de ver para las ondas esféricas.

En particular, la utilidad de las cilíndricas se debe a las explosiones de alambres metálicos mediante descargas eléctricas (348), en trabajos de laboratorio; a las explosiones producidas mediante rayos laser (349); a las explosiones de meteoritos al penetrar en la atmósfera; a una analogía de las corrientes hipersónicas que veremos en el epígrafe 20, etc.

Por cierto que estas explosiones lineales han encontrado una aplicación reciente en el estudio de los truenos (350), porque la aproximación lineal correspondiente a la Teoría Acústica con que ha solido estudiarse el problema, resulta inadecuada en la zona próxima al rayo.

Otros aspectos del problema que están siendo también objeto de estudio son el de la influencia de la radiación (351), la cual es importante en explosiones muy fuertes; las explosiones en atmósferas enrarecidas (352) como las que tienen lugar a gran altura; la influencia de los campos electromagnéticos (353) de la que se ocupa la Magnetofluidodinámica, que constituirá el objeto del epígrafe 23 y las explosiones en gases combustibles (354), propias de la Aerotermoquímica, que se tratará en el epígrafe 22.

Asimismo, se ha aplicado el procedimiento al estudio de las «implosiones» (producidas por el colapso de las burbujas de cavitación en el agua (355), donde existe una dificultad específica, a causa de la

(348) W. G. CHACE y H. K. MOORE: *Exploding Wires*. Plenum Press., Nueva York, 1964.

(349) A. K. OPPENHEIM y R. I. SOLOUKIN: *Experiments in Gas Dynamics of Explosions*. «Ann. Rev. Fluid. Mech.», 1973, págs. 31-58.

(350) Ver Sakurai, ya citado.

(351) Ver H. L. BRODE: *Gas Dynamic Motion with Radiation: A General Numerical Method*. «Astronautica Acta», 1969, págs. 433-51, donde una de las aplicaciones se refiere a este problema.

(352) G. W. STUART: *Explosions in Rarefied Atmospheres*. «Jour. Phys. Fluids», 1965, págs. 603-6.

(353) Ver Sakurai y Korebeinikov, ya citados.

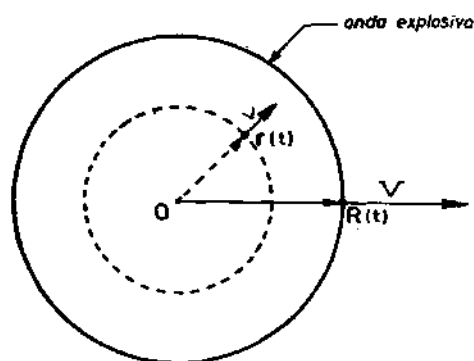
(354) E. BISHIMOV, V. P. KOROBEINIKOV y V. A. LEVIN: *Strong Explosions in Combustible Gaseous Mixture*. «Astronautica Acta», 1970, págs. 267-74.

(355) M. HOLT y N. J. SCHWARTZ: *Cavitation Bubble Collapse in Water with*

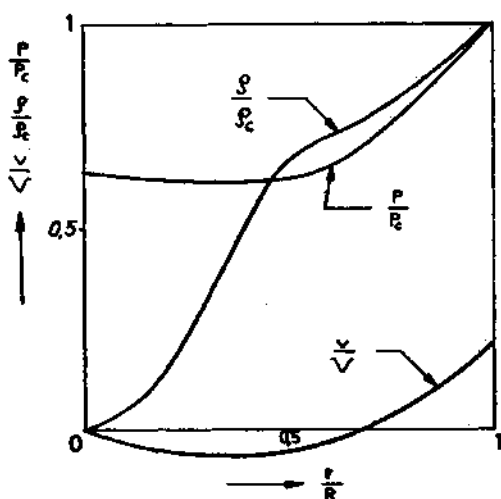
densidad finita en la pared de aquélla, que impide la aplicación del método de semejanza.

Por último, hay que mencionar el importante problema de las explosiones submarinas.

En este caso el problema es también muy complejo en la proxi-



a) Modelo para el cálculo



b) Perfiles de presiones, densidades y velocidades

Fig. I-21.—Onda explosiva esférica.

midad de la carga, como consecuencia del efecto de las pulsaciones de la burbuja de gases.

Durante la Segunda Guerra Mundial, el tema fue también objeto de estudios teóricos y experimentales muy completos. Una excelente exposición de dichos trabajos así como de la fundamentación y tratamiento teórico de las explosiones submarinas en general, se contiene en la obra del prof. R. H. Cole: «Underwater Explosions», publicada por la Princeton University Press, en 1943.

Asimismo un trabajo muy reciente y con bibliografía actual para el caso de explosiones submarinas muy intensas, como las que producen las cargas nucleares, en donde la solución del problema se obtiene por integración numérica, mediante el método de las características, se debe a Kot (356).

19. RÉGIMEN TRANSÓNICO

El régimen transónico se caracteriza porque el número de Mach difiere poco de la unidad en todo el espacio del movimiento (357) y porque en él coexisten zonas subsónicas y otras supersónicas, las cuales están separadas por líneas sónicas o por ondas de choque.

Tecnológicamente tienen una gran importancia, especialmente en las aplicaciones aeronáuticas, donde, a menudo, se opera en condiciones transónicas, cuyos efectos adversos, que se pusieron de manifiesto poco antes de la Segunda Guerra Mundial, al aumentar las velocidades de vuelo, es necesario reducir y controlar.

Desde el punto de vista teórico, el problema ofrece también un gran atractivo, porque la complejidad matemática que introduce el carácter mixto del sistema diferencial que gobierna el proceso se ve muy acrecentada por el hecho de que no resultan aplicables a su análisis los métodos de linealización empleados en otros intervalos del número de Mach, por las razones que se apuntaron en el epígrafe 13.

Finite Density Behind the Interface. «Jour. Phys. Fluids», 1963, págs. 521 y siguientes. También Sakurai, ya citado.

(356) C. A. KOTT: *Intense Underwater Explosions*. «Astr. Acta», 1972, páginas 421-33.

(357) A excepción de algún punto especial, como los de remanso y el interior de la capa límite.

Por último, la experimentación en el laboratorio también tropezó al comienzo, cuando se abordó el estudio de estos problemas, con dificultades muy serias, a causa del carácter extremal que tiene el movimiento sónico para el área de la sección de una tobera, como se puso de manifiesto en las ecuaciones [284] y [285] del epígrafe 13, lo que da lugar a que la interferencia de las paredes de un túnel aerodinámico perturbe mucho las condiciones de la corriente alrededor del modelo que se ensaya.

Estos inconvenientes dificultaron considerablemente la posibilidad de efectuar ensayos transónicos satisfactorios, hasta que se puso a punto un túnel aerodinámico de pared ventilada o porosa, procedimiento que, a partir de entonces, constituye el instrumento más adecuado para la experimentación en este régimen (358).

La mayor parte de los estudios efectuados sobre las corrientes transónicas se refieren a movimientos planos, los cuales, en régimen estacionario, reducen a dos el número de variables independientes y permiten, además, el empleo del método hodógrafo que se describió en el epígrafe 14.

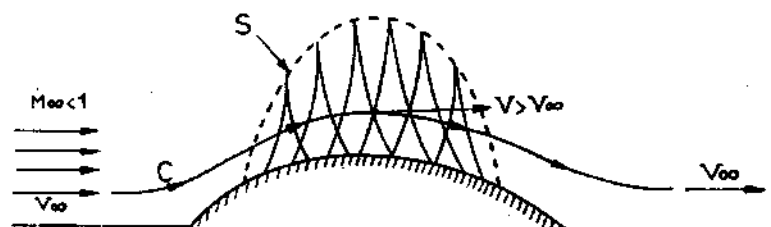
Ya allí mismo se pusieron de manifiesto algunos ejemplos de movimientos transónicos «regulares», es decir, sin ondas de choque, así como la aparición de limitaciones tales como las «líneas límite», que impedían prolongar tales soluciones más allá de un cierto valor del número de Mach máximo del movimiento.

En el presente epígrafe se completará aquella exposición con una descripción más completa de las características de los movimientos transónicos, de las dificultades matemáticas que plantea su estudio y de algunos de los métodos de tratamiento que se han puesto a punto para resolver el problema, limitándonos básicamente, por las razones de sencillez que se han indicado, al caso de los movimientos planos en corrientes exteriores alrededor de obstáculos (359).

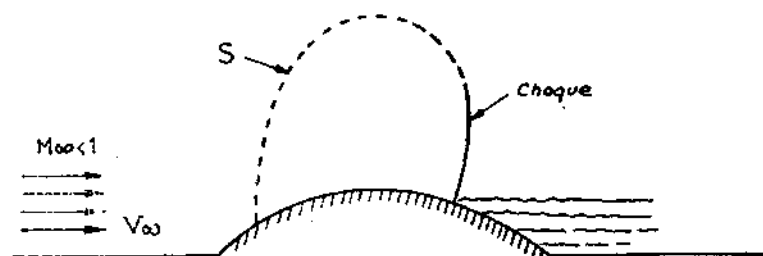
(358) R. H. WRIGHT y V. G. WARD: *NACA Transonic Wind Tunnel Test Sections*. RM L8J06, NACA, Washington, 1948.

(359) Como bibliografía específica para el estudio de este régimen, se recomienda el volumen VI de la Enciclopedia de Princeton, especialmente el capítulo VIII de la sección D y el capítulo II de la sección H; el capítulo V, páginas 130 y sigs. del trabajo de SCHIFFER, ya citado, del volumen IX del «Handbuch der Physik»; la obra clásica de C. FERRARI y F. TRICOMI: *Transonic Aerodynamics*, Acad. Press, Nueva York, 1968, si bien la edición original italiana data de 1962; MAXWELL, ya citado en el epígrafe 14; los «Proceedings» del *Symposium Transonicum* celebrado en Aquisgram en 1962, Springer, Berlín 1964; los «Pro-

La figura I-22 esquematiza el problema para el caso del movimiento alrededor de un obstáculo simétrico con respecto al eje x , bajo ángulo de ataque nulo, en cuyo caso, puesto que el movimiento es también simétrico, se ha representado tan sólo la mitad superior del mismo.



a) Corriente transónica regular



b) Corriente transónica con onda de choque

Fig. I-22.—Corriente transónica exterior.

En a) se muestra un ejemplo de solución «regular», es decir, sin discontinuidades, correspondientes a un movimiento «principal» subsonico ($M_\infty < 1$), en cuyo caso se forma, en la contigüidad del obs-

ceedings» de la Conferencia sobre Aerodinámica transónica organizada por el AGARD en 1968. Finalmente, el excelente trabajo de revisión de G. Y. NIEUWLAND y B. M. SPEE: *Transonic Airfoils: Recent Developments in Theory Experiment and Design*. «Ann. Rev. Fluid. Mech.», 1973, págs. 119-50, donde se incluye bibliografía muy reciente.

táculo, la zona supersónica que muestra la figura, separada de la subsónica por la línea sónica S.

En la zona supersónica, el sistema diferencial del movimiento es hiperbólico, por lo que se han representado también los haces de características que arrancan de cada punto de la línea sónica y que forman las dos familias de líneas de Mach del espacio supersónico.

Por consiguiente, una partícula fluida que recorra una línea de corriente tal como C, al atravesar la zona supersónica experimentará primero una aceleración, seguida a continuación de una compresión que la devuelva al régimen subsónico. En la solución «regular» de a) esa compresión se produce de modo continuo, a través de las sucesivas líneas de Mach, mientras que, por el contrario, en el ejemplo, de corriente no regular que muestra el esquema b), una parte de la compresión se produce «instantáneamente» a través de la onda de choque que se indica.

Es precisamente la aparición de estas ondas de choque y su posterior evolución a medida que aumenta el número de Mach M_∞ de la corriente principal, lo que da lugar a los efectos adversos a que se aludía al comienzo.

Tales efectos incluyen el aumento brusco de la resistencia llamado «divergencia», el cual está motivado por la aparición de la resistencia de onda: la caída de la sustentación, originada por la interferencia de la onda de choque con la capa límite, que da lugar al desprendimiento de ésta, cuando la intensidad del choque es suficiente para ello, como se indicó en el epígrafe 11 y se muestra en la figura; finalmente, la producción de fuertes oscilaciones, a causa de la inestabilidad del sistema.

Este fenómeno de interferencia entre la corriente «exterior» y la de la capa límite (360) constituye una complicación adicional, que viene a sumarse a las que se enumeraron al comienzo como propias del régimen transónico y su dificultad es de tal magnitud que el estudio teórico de la misma se encuentra todavía en una fase muy prematura (361).

(360) Ver. por ejemplo, H. W. LIEPMANN: *The Interaction Between Boundary Layer and Shock Waves in Transonic Flow*, «*Jour. Aer. Sci.*», 1946, págs. 623-37.

(361) Para un intento de toma en consideración de los efectos de viscosidad en el estudio analítico del régimen transónico, ver el trabajo de M. SIEGEL: *Two-Dimensional Shock Structure in Transonic and Hypersonic Flow*, «*Adv. Appl. Mech.*», vol. XI, Acad. Press, 1971, págs. 131-207, donde se hallará además abundante bibliografía.

Si se prescinde de tales efectos, es decir, en la hipótesis de que el fluido se comporte como un gas ideal, el tratamiento analítico del problema transónico consiste en buscar soluciones regulares o no, que satisfagan las ecuaciones del movimiento, así como las condiciones de contorno correspondientes al caso en estudio, y tales que el número de Mach del movimiento difiera poco de la unidad en todo el espacio, en el que además han de coexistir zonas subsónicas y supersónicas.

Dejando de lado las soluciones exactas que puedan conseguirse para algunos pocos ejemplos con el método hodógrafo del epígrafe 14, interesa especialmente al problema transónico desarrollar métodos de tratamiento adecuados para el problema exterior plano, con o sin circulación, que define el esquema de la figura I-22.

Y puesto que la integración del sistema diferencial exacto es sumamente difícil y tampoco se puede aplicar el procedimiento sencillo de linealización que se emplea para una primera aproximación en los regímenes subsónico y supersónico, se trata de ver qué tipo de aproximaciones pueden introducirse aquí, con objeto de hacer abordable el tratamiento matemático del problema, al mismo tiempo que se preservan las características específicas del régimen transónico, las cuales, en términos matemáticos, consisten en que la solución buscada haga que el sistema diferencial sea de tipo mixto.

Una primera simplificación, muy importante, se basa en el hecho de que el valor del número de Mach esté próximo a la unidad en todo el espacio.

Efectivamente, ello significa que el salto de entropía a través de las ondas de choque, que es tercer orden (362), es siempre muy pequeño en el régimen transónico, por lo que también será, al menos de tercer orden, el torbellino que se produce a través de la onda de choque a causa de la curvatura de ésta.

Por tanto, dentro del orden de aproximación indicado puede suponerse que el movimiento transónico es siempre «irrotacional», lo que permite emplear un potencial $\varphi(x, y)$ de velocidades, con lo que el sistema diferencial del movimiento se reduce a la ecuación [271], incluso si aquél no es regular.

Por otra parte, si bien la condición $M \sim 1$ no permite linealizar la ecuación [271] del potencial de velocidades, sí es posible obtener

(362) Ver capítulo II.

una ecuación más sencilla que ésta, aunque no lineal, mediante la aplicación del método de perturbaciones pequeñas a la corriente exterior alrededor de un obstáculo de poco espesor y bajo un ángulo de ataque también pequeño (363).

Para ello hay que proceder en forma parecida a como se hacía para obtener las ecuaciones de la capa límite (364), distorsionando el espacio físico en la forma

$$\begin{aligned}x &= l \xi \\ y &= \Gamma l \eta,\end{aligned}\tag{406}$$

en donde l es una longitud característica del proceso, por ejemplo; la cuerda del perfil y Γ es un parámetro cuyo orden de magnitud dependerá, como allí ocurría para el espesor de la capa límite en función del número de Reynolds, de lo que resulte en el desarrollo asintótico de la ecuación [271] del potencial de velocidades.

Siguiendo a von Karman, este potencial puede expresarse ahora en la forma

$$\Phi(x, y) = a_c l [\xi + \epsilon \cdot \varphi(\xi, \eta)],\tag{407}$$

en donde ϵ es un parámetro que mide la magnitud de la perturbación y

$$a_c = \sqrt{\frac{2}{1 + \gamma}} \cdot a_\infty\tag{408}$$

es, como se vio en [362], la velocidad crítica del sonido, que corresponde al punto sónico $M = 1$, la cual permite escribir la ecuación de Bernoulli en la forma:

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2) + \frac{a^2}{\gamma - 1} = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)} \cdot a_c^2.\tag{409}$$

(363) TH. VON KARMAN: *The Similarity Law of Transonic Flow*, Jour. Math. Phys., 1947, págs. 182-90. «Coll. Works», vol. IV, págs. 327-35.

(364) Ver epígrafe 10.

siendo

$$u = a_c (1 + \epsilon \varphi_\xi) \quad [410]$$

$$v = a_c \frac{\epsilon}{\Gamma} \varphi_\eta \quad [410]$$

las componentes de la velocidad del movimiento del gas.

Si se supone ahora que ϵ es pequeño y se introduce la expresión [407] del potencial de velocidades en la ecuación [271], que escribiremos en la forma:

$$(a^2 - u^2) \Phi_{xx} - 2 u v \Phi_{xy} + (a^2 - v^2) \Phi_{yy} = 0 \quad [411]$$

al retener en el resultado los términos de orden más bajos en ϵ , resulta:

$$-(\gamma + 1) \epsilon \Gamma^2 \varphi_\xi \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} = 0, \quad [412]$$

que es la ecuación característica del régimen transónico, cuya naturaleza mixta depende del cambio de signo de la aceleración horizontal φ_ξ en el proceso.

En cuanto a las condiciones de contorno, éstas deben expresar, como siempre, que a gran distancia del obstáculo la corriente tiende al movimiento uniforme de velocidad V_∞ paralela al eje x , tal que sea

$$|M_\infty - 1| \equiv \left| \frac{V_\infty}{a_\infty} - 1 \right| \ll 1$$

y que, sobre el contorno del obstáculo, la velocidad sea tangente al mismo.

La primera de ambas condiciones, teniendo en cuenta [406] y [407], se reduce a la siguiente:

$$(\xi, \eta) \rightarrow \infty, \quad \varphi_\xi \rightarrow \frac{\frac{V_\infty}{a_c} - 1}{\epsilon}; \quad \varphi_\eta \rightarrow 0, \quad [414]$$

la cual, en virtud de [409] y [413], adopta la forma aproximada

$$(\xi, \eta) \rightarrow \infty, \quad \varphi_\xi \rightarrow -\frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{M_\infty - 1}{\varepsilon} : \quad \varphi_\eta \rightarrow 0. \quad [415]$$

En cuanto a la condición de deslizamiento sobre el contorno del obstáculo, cuya forma $y_e(x)$ se supone dada por la expresión

$$0 \leq x \leq l, \quad y_e(x) = \delta \cdot l \cdot f(\xi), \quad [416]$$

en donde δ es un parámetro mucho menor que la unidad, que mide el espesor del mismo, se comprueba fácilmente que aquella condición de tangencia se expresa en la forma

$$0 \leq \xi \leq 1; \quad \eta = 0; \quad \varphi_\eta(\xi, 0) = \frac{\Gamma \delta}{\varepsilon} f'(\xi), \quad [417]$$

donde, la condición se impone, además, sobre el eje $\eta = 0$, en lugar de hacerlo sobre el propio contorno [416], dentro del orden de aproximación de validez de [412].

Fuera del intervalo del contorno, en el problema simétrico que estamos considerando φ_η debe ser nulo (365).

Así pues, la ecuación [412], junto con las condiciones [415] y [417], definen el problema del movimiento transónico alrededor del obstáculo de contorno [416], sometido a la corriente transónica de número de Mach $M_\infty \sim 1$, para un gas perfecto con relación de calores específicos γ .

Y la forma adimensional en que se ha expresado el problema demuestra que, dada la forma $f(\xi)$, la solución es la misma para todos aquellos casos en que se conserven los valores de los tres parámetros

$$\left. \begin{aligned} (\gamma + 1) \varepsilon \Gamma^2 &= C_1 \\ \frac{M_\infty - 1}{(\gamma + 1) \varepsilon} &= C_2 \\ \frac{\Gamma \delta}{\varepsilon} &= C_3 \end{aligned} \right\} \quad [418]$$

(365) En un problema no simétrico, habría que considerar la condición sobre la mitad inferior de aquél, como se ha visto en la teoría de perfiles delgados.

Ello permite deducir soluciones «semejantes» a partir de una conocida, mediante variaciones de ϵ , Γ , δ , M_∞ e incluso de la relación γ , si se opera con distintos gases o en condiciones termodinámicas diferentes que varíen, siempre que se mantengan las tres condiciones [418].

Los parámetros γ , δ , M_∞ corresponden a datos del gas, del espesor del obstáculo y de la velocidad del movimiento principal y tienen, por tanto, un significado concreto para las condiciones del movimiento.

Al eliminar ϵ y Γ de [418], se obtiene la siguiente relación entre aquellos parámetros:

$$\frac{M_\infty - 1}{[(\gamma + 1)\delta]^{2/3}} = \text{const.} \quad [419]$$

que constituye la célebre «ley de semejanza transónica» de von Karman.

Si el coeficiente de presión C_p del movimiento se mide con respecto a las condiciones de la corriente en el punto de velocidad crítica a_c , se obtiene para él la expresión:

$$C_p = \frac{p - p_c}{\frac{1}{2} \rho_c a_c^2} = -2 \epsilon \varphi \xi, \quad [420]$$

y al expresar ϵ en función δ y M_∞ mediante [418], resulta, finalmente, para formas semejantes:

$$C_p \sim \frac{\delta^{2/3}}{(\gamma + 1)^{1/3}}, \quad [421]$$

que muestra que las variaciones de presión son proporcionales a la potencia $2/3$ del espesor, condición que permite deducir las leyes de variación de la sustentación (cuando el problema no es simétrico, naturalmente) cuyo coeficiente resulta también proporcional a $\delta^{2/3}$ y de la resistencia, cuyo coeficiente es proporcional a $\delta^{5/3}$.

Por último, hay que advertir que las observaciones experimenta-

les confirman plenamente los resultados de esta teoría (366), la cual constituye una contribución fundamental a la resolución del problema transónico.

Claro es que la teoría de la semejanza transónica puede desarrollarse igualmente si el potencial $\Phi(x, y)$ de velocidades del movimiento se expresa en la forma habitual (367)

$$\Phi(x, y) = V_{\infty} \cdot l [\xi + \varepsilon \varphi(\xi, \eta)], \quad [422]$$

utilizando como velocidad de referencia la V_{∞} de la corriente principal, en lugar de emplear la velocidad crítica a_c como aquí se ha hecho, en cuyo caso la ecuación [412] hay que sustituirla por la siguiente:

$$-(\gamma + 1) \varepsilon \Gamma^2 \varphi_{\xi\xi} \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} + 2(1 - M_{\infty}) \Gamma^2 \varphi_{\xi\xi} = 0. \quad [423]$$

En cuanto a las condiciones de contorno, la [414] en el infinito se sustituye, evidentemente, por la condición

$$(\xi, \eta) \rightarrow 0, \quad \varphi_{\xi} \rightarrow 0; \quad \varphi_{\eta} \rightarrow 0, \quad [424]$$

en tanto que la [417] sobre el contorno del obstáculo permanece invariable.

Por consiguiente, la ecuación [423], con las condiciones en los límites [417] y [424] reproduce las tres condiciones de semejanza dadas en [418], pero ahora dos de ellas se extraen de la ecuación [423], al hacerse homogénea la condición [424] en el infinito.

Finalmente, la Teoría de la Semejanza Transónica ha sido extendida al estudio de los cuerpos de revolución (368) y al de las alas de envergadura finita y otros problemas tridimensionales (369).

(366) A. E. BRYSON: *An Experimental Investigation of Transonic Flow Past Two-Dimensional Wedge and Circular-Arc Sections Using a Mach-Zehnder Interferometer*. «Tech. Rept.», núm. 1.094, NASA, Washington, 1951. También W. G. VINCENTI y C. B. WAGENER: *Transonic Flow Past a Wedge Profile with Detached Bow Wave*. «Tech. Rept.», núm. 1.095, NASA, Washington, 1952.

(367) Ver, por ejemplo, capítulo VIII sección D, volumen VI de la Enciclopedia de Princeton.

(368) Ver TH. VON KARMAN, ya citado, así como K. OSWATITSCH y S. B. BERNDT: *Aerodynamic Similarity of Axisymmetric Transonic Flow Around Slender Bodies*. «Aero. Tech.», Note núm. 14, Real Inst. Tecn., Etocolmo, 1950.

Las consideraciones anteriores han permitido poner de manifiesto que, en primera aproximación, los procesos transónicos aparecen gobernados por una ecuación de la forma

$$-\varphi_{\xi\xi} - \varphi_{\eta\eta} = 0, \quad [425]$$

la cual juega para este régimen el mismo papel que la de Laplace y la de ondas, respectivamente, para los regímenes subsónico y supersónico.

La dificultad adicional, en el caso transónico, procede de la presencia del término φ_{ξ} en [425] y del hecho de que éste cambie de signo en el espacio de integración, para que el problema sea mixto, es decir, transónico.

Claro es que el problema puede linealizarse, como se hizo en el epígrafe 14, mediante el paso al plano hodógrafo, el cual proporciona la siguiente «ecuación transónica» para la función de corriente ψ (370):

$$\sigma \psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma}, \quad [426]$$

en donde σ está dada por la expresión

$$\sigma = (\gamma + 1)^{1/2} \int_{\tau}^1 \frac{\rho}{\rho_c} \cdot \frac{d\tau}{\tau}, \quad [427]$$

siendo

$$\tau = \frac{q}{a_c} \quad [428]$$

y el subíndice c indica, como se ha dicho, los valores de las magnitudes fluidas en el punto sónico $M = 1$ (371).

Así pues, la ecuación [426] es la equivalente a [425], para la función de corriente, en el plano hodógrafo.

Es una ecuación lineal, de tipo mixto, puesto que es elíptica para

(370) Se recuerda que en el plano hodógrafo resultaba ventajoso operar con la función de corriente, cuya ecuación diferencial está dada por [298].

(371) Se recuerda que q y θ son el módulo y el argumento de la velocidad.

$\sigma > 0$, es decir, para $\tau < 1$, o sea para $M < 1$, en virtud de [427] y [428], e hiperbólica para $\sigma < 0$.

En particular, en una representación cartesiana de ψ , en el plano (θ, σ) , la línea sónica del movimiento coincide con el eje $\sigma = 0$.

Se trata de la célebre ecuación de Tricomi (372), la cual constituye el ejemplo más sencillo y estudiado de una ecuación de tipo mixto.

Una generalización de la misma se obtiene de [426] al sustituir en ella el coeficiente σ por la función $k(\sigma)$ que se anule en el origen y cuyo signo coincida con el de σ , con lo que resulta:

$$k(\sigma) \psi_{\theta\theta} + \psi_{\sigma\sigma} = 0. \quad [429]$$

En particular, se demuestra que la ecuación exacta [298] de la función de corriente en el plano hodógrafo se reduce a [429], cuando se adopta para $k(\sigma)$ la expresión:

$$k(\sigma) = \left(\frac{\rho_c}{\rho} \right)^2 (1 - M^2). \quad [430]$$

Hemos dicho que la ecuación de Tricomi es la más estudiada de las de tipo mixto, situación a la que ha contribuido considerablemente, durante los últimos veinticinco años, su interés para el estudio del problema transónico.

En particular, se han analizado con gran detenimiento las propiedades de existencia y unicidad de la ecuación [429] y asimismo las condiciones de contorno necesarias para la determinación de la solución en un recinto dado, que comprende un tramo del eje $\sigma = 0$, problema que corresponde en el plano hodógrafo, al de la figura 1-22 en el físico.

Resulta imposible exponer aquí todo ello, por lo que remitimos a la bibliografía existente (373) y pasamos a considerar, antes de terminar con esta materia, otros aspectos del problema transónico.

Una cuestión fundamental y polémica durante bastante tiempo, ha sido la de si pueden o no existir realmente corrientes potenciales

(372) F. G. TRICOMI: *Sulle Equazioni Lineari alle Derivate Parziali di Secondo Ordine di Tipo Misto*. «Mem. Reale Accad. Lincei», 1923. págs. 133-247. También FERRARI y TRICOMI, ya citado, págs. 105 y sigts.

(373) Ver, especialmente, la obra de FERRARI y TRICOMI, ya citada, páginas 105 y sigts., así como la SCHIFFER, también mencionada, págs. 180 y sigts.

regulares, es decir, sin onda de choque, para el problema esquematizado en la figura I-22 (374).

Las reservas contra soluciones de esta naturaleza estaban justificadas, efectivamente, porque se conocían formas para las cuales se sabía que no podía existir aquella solución y porque, en casos en que el método hodógrafo había proporcionado soluciones matemáticas, modificaciones infinitesimales del contorno del obstáculo las hacían desaparecer.

Hoy, después de los trabajos de Nieuwland y Spee que se hallarán en la referencia citada, y de los experimentos de Pearcey que también se citan en la misma, la cuestión aparece despejada en sentido afirmativo, puesto que se ha conseguido diseñar contornos que proporcionan corrientes potenciales y comprobar en el laboratorio la realización de las mismas.

Otra cuestión, igualmente importante, es la relativa a los procedimientos de cálculo de que actualmente se dispone para obtener la solución, con o sin formación de ondas de choque, correspondiente a un obstáculo de forma dada (375).

En primer lugar, en ausencia de ondas de choque, está el método hodógrafo que se expuso en el epígrafe 14 y del que se hace extenso uso en el estudio del régimen transónico. El carácter lineal de la ecuación constituye un gran atractivo, pero el hecho de que la forma de obstáculo se obtenga sólo «a posteriori» es un inconveniente que ya se ha señalado precedentemente.

En segundo lugar, está el método «asintótico» de Moretti, al que se aludió en el epígrafe precedente en relación con los movimientos supersónicos y que consiste en buscar la solución como límite para $t \rightarrow \infty$ de un movimiento no estacionario.

La ventaja estriba en transformar el problema mixto en uno hiperbólico, para el que se postula una condición inicial plausible (376).

Entre los métodos estacionarios de cálculo numérico, Murman y

(374) Ver NIEUWLAND y SPEE, ya citados, así como K. G. GUDERLEY: *Transonic Flow*, de «Research Frontiers in Fluid Dynamics», ya citado, capítulo IX, págs. 250-83, donde se hallará la pertinente bibliografía sobre esta cuestión.

(375) Para una enumeración y valoración de los métodos existentes, ver el trabajo de NIEUWLAND y SPEE, reiteradamente citado.

(376) B. GROSSMAN y G. MORETTI: *Time-Dependent Computation of Transonic Flows*. «AIAA Papers», 70-1322, año 1970.

Cole (377) han puesto a punto un procedimiento de relajación para la integración de la ecuación aproximada [423], en lugar de utilizar la ecuación exacta [411]. Ello facilita considerablemente el cálculo numérico, sobre todo por lo que respecta a las condiciones en los límites, a gran distancia del obstáculo, para las que desarrollan una aproximación asintótica.

Los resultados del cálculo, tanto para corrientes regulares como con ondas de choque, muestran una coincidencia excelente al compararlos con soluciones exactas conocidas y con mediciones experimentales.

Una peculiaridad del procedimiento es que al instrumentar el algoritmo para el cálculo numérico de las derivadas, hay que tener en cuenta el carácter elíptico o hiperbólico del punto de cálculo, en la selección de la red a emplear en cada paso.

Además, el método ha sido extendido posteriormente al cálculo de la ecuación [412].

Una variante del método, mediante el empleo de un sistema de coordenadas especial, alrededor del obstáculo, ha sido desarrollada por Steger y Lomax (378), de la NASA, con resultados también excelentes.

Todo lo cual significa que durante los últimos años se han efectuado progresos definitivos, tanto en la comprensión del fenómeno transónico, como en cuanto a la puesta a punto de procedimientos de cálculo que den solución satisfactoria a algunos de sus problemas más importantes.

Por lo que respecta al estado de desarrollo alcanzado para problemas tridimensionales, la situación, por el contrario, es bastante satisfactoria.

Aparte de la extensión citada al comienzo de la Ley de Semejanza Transónica, una de las contribuciones más importantes, desde el punto de vista práctico, es la «regla del área» de Whitcomb (379), la

(377) E. M. MURMAN y J. D. COLE: *Calculation of Plane Steady Transonic Flow*. «AIAA Jour.», 1971, págs. 114-21.

(378) J. L. STEGER y H. LOMAX: *Numerical Calculation of Transonic Flow About Two-Dimensional Airfoils by Relaxation Procedures*. «AIAA Paper», número 71-579, año 1971.

(379) R. T. WHITCOMB: *A Study of the Zero-Lift Drag-Rise Characteristics of Wing-Body Combinations Near the Speed of Sound*. «Tech. Rept.», núm. 1.273. NASA, Washington, 1956. También, J. R. SPREITER y S. S. STAHARA: *Developments in Transonic Flow Theory*. «Zeit. Flugwiss.», 1970, págs. 33-40.

cual establece que el elemento determinante del incremento transónico de resistencia de los cuerpos fuselados, incluso con alas pero a sustentación nula, es la distribución del área de la sección transversal a lo largo del eje del obstáculo.

Otro procedimiento que permite calcular con aproximación aceptable movimientos planos y con simetría de revolución, así como algunos casos tridimensionales, es el llamado de la «linealización total», que se obtiene al sustituir en [412] φ_{ξ} ó $\varphi_{\xi\xi}$ por un parámetro, para hacer lineal la ecuación y variar después el valor del mismo, de un punto a otro, para mejorar el resultado.

El procedimiento, cuya justificación matemática no está exenta de crítica, fue desarrollado inicialmente por Spreiter y Alksne (380) sobre una idea de Oswatitsch.

Para terminar, mencionaremos un problema distinto, de carácter no estacionario, que tiene interés tecnológico en relación, por ejemplo, con el flujo en compresores y turbinas, el cual ha sido tratado recientemente, mediante un procedimiento de perturbaciones pequeñas, por Adamson y Richey (381), de la Universidad de Michigan.

Se trata del movimiento transónico, no estacionario, en un canal plano, con formación de ondas de choque y en el que se incorporan los efectos de la viscosidad.

En ausencia de la viscosidad, el carácter no estacionario del movimiento sustituye la ecuación [425] por una de la forma

$$-\varphi_{\xi} \varphi_{\xi\xi} + \varphi_{\eta\eta} - a \varphi_{\xi t} - b \varphi_{t t} = 0, \quad [431]$$

en donde a y b son dos parámetros del proceso, mientras que la acción de la viscosidad se traduce en la aparición de derivadas de tercer orden.

Los autores obtienen un conjunto de soluciones mediante la aplicación de un procedimiento de semejanza.

(380) J. R. SPREITER y A. ALKSNE: *Thin Airfoil Theory Based on Approximate Solution of the Transonic Flow Equation*. «Tech. Rep.», núm. 1.350, NASA, Washington, 1958. Ver también SPREITER y STAHARA, ya citado, donde se hallarán referencias complementarias.

(381) T. C. ADAMS y G. K. RICHEY: *Unsteady Transonic Flow with Shock Waves in Two-Dimensional Channels*. «Jour. Fluid Mech.», 1973, págs. 363-82.

En el epígrafe 18 se anticipó que cuando el número de Mach es mucho mayor que la unidad hay que esperar limitaciones en la aplicabilidad del tratamiento lineal que allí se desarrolló para el análisis aproximado de los movimientos supersónicos alrededor de cuerpos de poco espesor.

Tales casos exigen, efectivamente, el desarrollo de métodos «ad hoc», los cuales, al igual de lo que hemos visto para los movimientos transónicos, no son lineales y configuran un área de estudio que corresponde al régimen llamado generalmente «hipersónico», cuya importancia tecnológica es muy considerable, como consecuencia del desarrollo de los grandes proyectiles propulsados y de la Astronáutica, donde se alcanzan valores del número de Mach del orden de 10 unidades y aun mayores.

En el problema transónico se vio que la dificultad tenía su origen en la combinación de la no linealidad del problema con el carácter mixto de las ecuaciones y con la falta de regularidad de muchas de las soluciones.

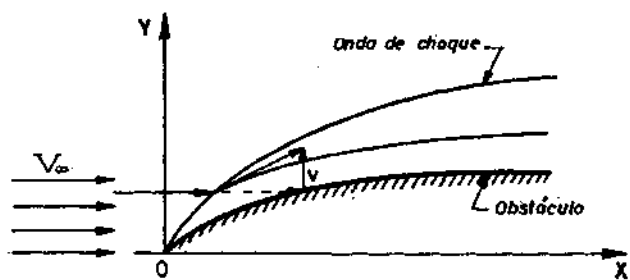
En el régimen hipersónico subsiste, como ya se ha dicho, el carácter no lineal, junto con problemas de índole distinta que proceden de los elevados saltos de entropía a través de las ondas de choque «casi» normal para números de Mach muy grandes (382), así como de la interacción de la capa límite, cuyo espesor puede ser considerable a causa del calentamiento del gas en su contacto con la pared del obstáculo (383), con la corriente exterior a la misma (384).

Una peculiaridad muy característica del movimiento hipersónico de un cuerpo a través de un gas, problema fundamental de este régimen, es que la perturbación que produce el paso de aquél a través del fluido queda circunscrita a una zona muy próxima al obstáculo y a su estela, delimitada por una onda de choque que arranca de la

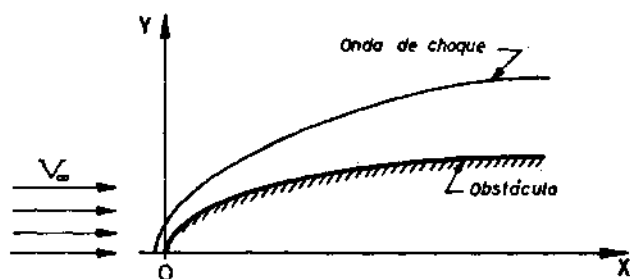
(382) Ver epígrafe 18 y el capítulo II.

(383) Ver epígrafe 12.

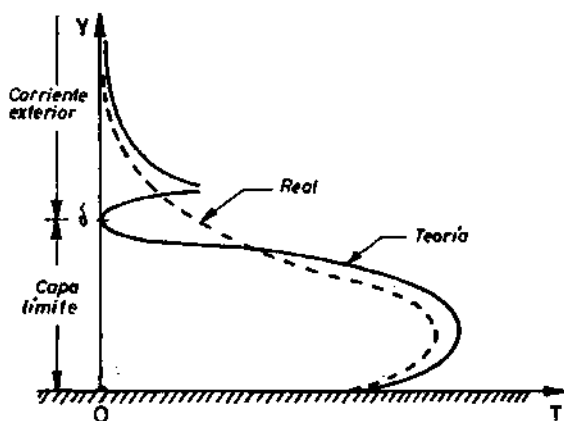
(384) Como bibliografía específica para el tema, se recomiendan las obras clásicas de G. G. CHERNYI: *Introduction to Hypersonic Flow*. Acad. Press, Nueva York, 1961; W. D. HAYES y R. F. PROBSTEN: *Hypersonic Flow Theory*. Acad. Press, 1966, y de R. N. COX y L. F. CRABTREE: *Elements of Hypersonic Aerodynamics*. Acad. Press, Nueva York, 1966.



a) Cuerpo de proa aguda



b) Cuerpo de proa redondeada



c) Capa límite.- Perfil de temperaturas

Fig. I-23.—Movimientos hipersónicos.

proa del cuerpo y que se ciñe mucho a su contorno, como ilustra la figura I-23.

Pero, en general, hay que distinguir entre las dos clases de problemas que esquematiza la figura, válida indistintamente para cuerpos planos o con simetría de revolución.

En ella, el esquema a) corresponde a un cuerpo de proa aguda, tal que la inclinación de la superficie del mismo con respecto a la dirección x de la corriente principal es pequeña en todos sus puntos.

Por tanto, cabe plantearse para este caso, como se hizo en el régimen transónico, la aplicabilidad del método de perturbaciones pequeñas mediante el desarrollo asintótico de las ecuaciones del movimiento y de las condiciones de contorno, en función de un parámetro mucho menor que la unidad.

Si bien debe esperarse que el problema resultante no sea lineal, por las razones que se apuntaron en el epígrafe 13, dicho tratamiento podrá aportar, aquí también, simplificaciones importantes, al mismo tiempo que retiene los elementos característicos fundamentales del régimen hipersónico.

En cuanto al esquema b), corresponde al caso de un obstáculo de proa redondeada, cuyo interés se puso de manifiesto en el apartado d) del epígrafe 18, bien por exigencias tecnológicas o por la dificultad de conseguir en la práctica proas rigurosamente agudas. Es evidente que, en tal situación no puede ser aplicable el método de las perturbaciones pequeñas, al menos en un entorno de aquella región de proa, por lo que habrán de desarrollarse otros procedimientos de cálculo distintos.

También aquí se pueden obtener, efectivamente, como veremos más adelante, aproximaciones asintóticas para $M_\infty \gg 1$, las cuales aportan soluciones simplificadas del problema que en el apartado d) del epígrafe 18 se consideró válidas para números de Mach del movimiento suficientemente altos.

Por otra parte, al aplicar la teoría de perturbaciones pequeñas al esquema a) de la figura I-23, surge la cuestión de delimitar la zona de influencia de la parte casi normal de la onda desprendida de proa que inevitablemente existe siempre, como se ha dicho, y entonces se comprueba que para $M_\infty \gg 1$ aquella región puede tener mucho mayor alcance que el que correspondería al régimen supersónico normal.

Por último, bien sea en el salto a través de la onda casi normal, bien a causa del rozamiento con la pared del obstáculo, la tempera-

tura del gas puede aumentar a tal punto que entren en juego fenómenos de excitación de los grados internos de libertad del gas, así como los de disociación, reacción química, ionización y radiación, lo que complica sustancialmente el análisis del problema (385).

Al abordar el análisis del régimen hipersónico, cuyas características y dificultades esenciales acabamos de enunciar, se comprueba que también en este caso, al igual de lo que ocurría en el régimen transónico, se han explorado leyes de semejanza, que permitan coordinar soluciones de problemas afines, mediante la adecuada transformación geométrica y de los parámetros del movimiento.

Siguiendo un procedimiento análogo a los que se han aplicado en los epígrafes precedentes para obtener las reglas de semejanza subsónica, transónica y supersónica, Tsien (386), en la hipótesis de un movimiento potencial, para campos de poco espesor con proa aguda, demostró que el parámetro K de la semejanza hipersónica está dado por la expresión

$$K = M_{\infty} \cdot \delta, \quad [432]$$

en donde δ es una medida de la pendiente máxima del contorno del obstáculo y se cumple la doble condición de ser

$$\delta \ll 1$$

y

$$K \equiv M_{\infty} \cdot \delta \sim 0 \quad \text{ó} \quad \gg 1. \quad [433]$$

La primera de estas condiciones corresponde al caso de cuerpos fuselados que se está considerando, mientras que la segunda es un requerimiento del régimen hipersónico pues, si fuese $M_{\infty} \cdot \delta \ll 1$, se estaría en el caso supersónico del epígrafe 16, de la aplicabilidad de la Teoría Lineal.

(385) Ver el epígrafe 22 de este capítulo, así como el 4 del capítulo IV. También, *Fundamental Phenomena in Hypersonic Flow*. Ed. por J. G. Hall, Cornell Univ. Press, Ithaca, Nueva York, 1966.

(386) H. S. TSIENT: *Similarity Laws of Hypersonic Flows*. «Jour. Math. and Phys.», 1946, págs. 247-51.

En las condiciones definidas por [433], se comprueba fácilmente que el coeficiente de presión C_p está dado por la expresión:

$$C_p \equiv \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} = \delta^2 \cdot f(K), \quad [434]$$

y que los coeficientes de sustentación C_L y de resistencia C_D adoptan a su vez la forma:

$$C_L = \delta^2 \cdot L(K) \quad [435]$$

$$C_D = \delta^3 \cdot D(K), \quad [436]$$

respectivamente, en donde f , L , D son tres funciones del parámetro de semejanza K , determinadas por la forma del obstáculo.

En cuanto a la transformación geométrica de movimientos afines, los puntos correspondientes se obtienen mediante una transformación de la forma:

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \xi \\ y &= \delta \cdot l \cdot \eta \\ z &= \delta \cdot l \cdot \zeta, \end{aligned} \quad [437]$$

en donde l es una longitud característica del fenómeno, que se adopta como referencia para medir las distancias.

Tsien dedujo la ley de semejanza hipersónica anterior para el caso de movimientos planos o con simetría de revolución, en la hipótesis de que el movimiento era potencial y además obtuvo la ecuación no lineal de ésta, que sustituye en el régimen hipersónico a la ecuación lineal [267] del movimiento supersónico.

En particular, para el caso del movimiento plano, estacionario y en un sistema de referencia ligado al obstáculo, si la corriente principal de número de Mach M_∞ es paralela al eje x , la ecuación del potencial $\varphi(x, y)$ de velocidades de perturbación es la siguiente:

$$\begin{aligned} M_\infty^2 \varphi_{xx} - 2 M_\infty \frac{\varphi_y}{a_\infty} \varphi_{xy} - \\ - \left[1 - (\gamma - 1) M_\infty \frac{\varphi_x}{a_\infty} - \frac{\gamma + 1}{2} \frac{\varphi_y^2}{a_\infty^2} \right] \varphi_{yy} = 0. \end{aligned} \quad [438]$$

como se comprueba fácilmente por desarrollo y retención de los términos de menor orden, en la ecuación completa [292].

Pero ocurre que los movimientos hipersónicos no son, en general, potenciales, a causa de la curvatura de las ondas de choque, la cual origina gradientes de entropía que producen torbellinos, como se vio en la expresión [373] del epígrafe 18.

Por ello, es necesario explorar la generalización de la regla de semejanza hipersónica a este caso. Tal generalización, así como su extensión a los movimientos en tres dimensiones, junto con una interpretación física directa, expresada en el llamado «Principio de Equivalencia», se deben a Hayes (387).

El problema consiste, efectivamente, en aplicar las ecuaciones generales [25], [26] y [27] del movimiento de un gas ideal al caso de la figura I-23, a), teniendo en cuenta la condición de deslizamiento sobre el contorno dado del obstáculo así como las condiciones de Rankine-Hugoniot sobre la onda de choque de forma desconocida que se produce a partir del borde de ataque y las condiciones de compatibilidad sobre cualquier otra discontinuidad que pueda originarse en el espacio del movimiento de perturbación que está comprendido entre los contornos de la onda de proa y del cuerpo.

Además, es necesario introducir en todo ello la doble condición [433] propia del régimen hipersónico alrededor de un cuerpo fuselado que corresponde al caso en estudio y proceder seguidamente a retener los términos de orden más bajo en el desarrollo del sistema de ecuaciones y condiciones de contorno que resulta.

Por ejemplo, al proceder así para el caso de un movimiento estacionario bidimensional (plano o con simetría de revolución), se obtiene el siguiente sistema de tres ecuaciones para el cálculo de la componente transversal v de la velocidad de perturbación, así como de la presión p y de la densidad ρ (388):

$$\begin{aligned} V_{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \cdot \frac{v}{y} &= 0 \\ V_{\infty} \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \\ V_{\infty} \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} - \gamma \frac{p}{\rho} \left(V_{\infty} \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} \right) &= 0, \end{aligned} \quad [439]$$

(387) W. D. HAYES: *On Hypersonic Similitud.* «Quart. Appl. Math.», 1947, págs. 105-6. También HAYES y PROBSTEN o CHERNYI, ya citados.

(388) Para movimientos en tres dimensiones, incluidos los no estacionarios, ver HAYES y PROBSTEN, ya citado.

en donde debe hacerse $n = 0$ para los movimientos planos y $n = 1$ para los de revolución.

En la tercera ecuación de este sistema se ha hecho uso de la expresión $S = C_v \cdot L_m \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{const.}$, válida para la entropía de un gas perfecto.

Lo importante del sistema de ecuaciones [439] es que en él no aparece la componente axial u de la velocidad de perturbación, lo que reduce, por ahora, el número de ecuaciones y el de incógnitas del problema en una unidad.

Por otra parte, sobre el contorno $y_0(x)$ del obstáculo, la condición de tangencia se expresa, aproximadamente, como es habitual, en la forma:

$$\frac{v(x, y_0)}{V_\infty} = \frac{d y_0(x)}{d x}, \quad [440]$$

expresión en la que tampoco interviene, dentro del orden de aproximación del sistema [439], la citada componente de la velocidad de perturbación.

Por último, también dentro del orden de aproximación con que se está operando, las condiciones de Rankine-Hugoniot proporcionan los siguientes valores para la componente transversal v_e de la velocidad de perturbación, así como para la presión p_e y la densidad ρ_e detrás de la onda de choque, de contorno $y_e(x)$:

$$\begin{aligned} \frac{v_e}{V_\infty} &= \frac{\frac{2}{\gamma + 1} \left[\left(\frac{d y_e}{d x} \right)^2 - \frac{1}{M_\infty^2} \right]}{\frac{d y_e}{d x}}, \\ \frac{p_e}{p_\infty} &= \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \cdot M_\infty^2 \left(\frac{d y_e}{d x} \right)^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \quad [441] \\ \frac{\rho_e}{\rho_\infty} &= \frac{\frac{d y_e}{d x}}{\frac{d y_e}{d x} - \frac{v_e}{V_\infty}} \end{aligned}$$

Por consiguiente, también estas expresiones son independientes de la velocidad axial de perturbación u , la cual puede obtenerse, una

vez resuelto el problema [439], [440] y [441] para v , p y ρ , mediante la ecuación de Bernoulli, con lo que resulta:

$$u = \frac{1}{V_{\infty}} \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \left(\frac{p_{\infty}}{\rho_{\infty}} - \frac{p}{\rho} \right) - \frac{1}{2} v^2 \right] \quad [442]$$

En cuanto a la interpretación física de esa formulación, es claro que el sistema [439] resulta equivalente al de un movimiento unidimensional de coordenada y , no estacionario, donde el tiempo t está dado por la expresión

$$t = \frac{x}{V_{\infty}} \quad [443]$$

y la condición de contorno [440] equivale al movimiento de un émbolo en el extremo $y_0(x)$, mientras que $y_e(x)$ es el punto que ha alcanzado, en el instante [443], la onda de choque que transmite la perturbación del émbolo a la masa de gas.

Este es el «Principio de Equivalencia» de Hayes, el cual permite, por ejemplo, estudiar los movimientos hipersónicos mediante la teoría de las ondas planas o cilíndricas que se expuso en el apartado e) del epígrafe 18, de todo lo cual se encuentra extensa referencia en la bibliografía citada.

Para terminar con este punto hay que señalar que, tanto las observaciones experimentales, como los resultados de la integración de las ecuaciones, en aquellos casos en que ha podido obtenerse, confirman plenamente la validez, dentro de los límites correspondientes, de la Ley de Semejanza hipersónica de Tsien, así como del principio de equivalencia de Hayes.

Por otra parte es claro que una Ley de Semejanza como la de Tsien, o las que hemos visto para otros regímenes, si bien permite correlacionar resultados en casos afines, como se ha dicho, no basta para resolver el problema, cuya solución requiere la integración exacta o aproximada del sistema diferencial correspondiente.

El primer estudio sistemático de un conjunto de casos de movimientos hipersónicos alrededor de cuerpos fuselados, planos y de revolución, cónicos y ojivales, se debe a van Dyke (389).

(389) M. D. VAN DYKE: *A Study of Hypersonic Small-Disturbance Theory*. «Tech. Rept.», núm. 1.194, NASA, Washington, 1964. Debe señalarse que del

Entre los procedimientos para el cálculo aproximado de las soluciones, está en primer lugar, la analogía que resulta, como se ha

visto, del Principio de Equivalencia de Hayes, de la que se ha hecho extenso uso para el análisis de un gran número de casos (390).

Por ejemplo, la aplicación del principio de equivalencia ha permitido a Lees y Kubota (391) estudiar el comportamiento de un conjunto de obstáculos de la forma

$$y_0 \sim x^m, \quad [444]$$

en cuyo caso la forma de la onda de choque está dada también por una expresión potencial semejante a [444].

En el caso $m < 1$, que es el de mayor interés práctico, la proa de [444] es redondeada, lo que hace que la pendiente del contorno no sea pequeña en un entorno de dicho punto, por lo que la convergencia de la solución obtenida no puede ser uniforme.

El problema que plantea esta situación es, en el régimen hipersónico, bastante más importante de lo que cabía esperar de una singularidad local.

En efecto, la existencia de una proa redondeada significa que, como se vio en el epígrafe 18, existe una onda desprendida «casi» normal, a través de la cual el salto de entropía es muy grande, como se ha dicho, para $M_\infty \gg 1$. Ello produce un gran calentamiento local del gas, cuyos efectos pueden influir considerablemente en las características de la corriente, aguas abajo de la proa, en la inmediata proximidad de la pared del obstáculo a lo largo de todo su contorno y en la estela.

Es el efecto llamado de la «estela de entropía», cuyo análisis requiere tomar en consideración términos de orden superior en el desarrollo asintótico del método de las perturbaciones pequeñas, como han hecho, por ejemplo, Freeman (392) y Cheng (393), a cuyos tra-

lado ruso se produjeron, simultánea e independientemente, desarrollos paralelos sobre el problema hipersónico, cuya bibliografía detallada se puede hallar, por ejemplo, en CHERNYI, ya citado.

(390) Ver, por ejemplo, HAYES y PREBSTEIN, así como CHERNYI.

(391) Ver L. LEES y T. KUBOTA: *Inviscid Hypersonic Flow over Blunt-Nosed Slender Bodies*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1967, págs. 195-202.

(392) N. C. FREEMAN: *Asymptotic Solutions in Hypersonic Flow: An Approach to Second-Order Solutions of Hypersonic Small-Disturbance Theory*. «*Research Frontiers in Fluid Dynamics*», ya citado, págs. 284-307.

(393) H. K. CHENG: *Hypersonic Gas Dynamics of Slender Bodies*. «*Modern Develop. in Gas Dyn.*», también citado, págs. 181-82.

bajos remitimos al lector, porque el desarrollo matemático requerido para el tratamiento del problema es muy laborioso.

Las soluciones no estacionarias que se obtienen mediante el principio de equivalencia de Hayes, permiten tratar también los cuerpos con proa redondeada, mediante la liberación instantánea de una cierta cantidad de energía en el origen, en el instante inicial $t = 0$.

Por ejemplo, se comprueba que el caso de energía constante que corresponde al problema de Taylor y Sedov que se desarrolló en el apartado e) del epígrafe 18, corresponde al de una plana con borde de ataque romo.

Por último, hay que señalar que también se han desarrollado otros procedimientos aproximados de cálculo, cuya descripción se hallará en la bibliografía citada.

Por otra parte, para terminar con este punto, nos limitaremos a mencionar la aplicación a esta clase de movimientos de la célebre ley de la resistencia de Newton, llamada generalmente del «seno al cuadrado».

Fue Isaac Newton, efectivamente, el primero en aplicar los principios de la Mecánica al cálculo de la resistencia de un fluido al movimiento de un cuerpo que se traslada a través de aquél (397).

El modelo simplificado que consideró Newton supone que cada partícula fluida no experimenta perturbación alguna hasta chocar con el cuerpo. En el impacto, la partícula pierde la componente de su cantidad de movimiento normal al elemento de superficie en el punto, lo que origina la presión sobre el mismo, en tanto que no varía la componente tangencial, de tal modo que aquélla continúa su camino, después del choque, sobre una trayectoria tangente al obstáculo.

Es claro que para este modelo, la masa $d m$ de fluido que incide por unidad de tiempo sobre el elemento de superficie $d \sigma$, que está

(394) Ver, por ejemplo, TH. VON KARMAN: *Isaac Newton and Aerodynamics*. «Jour. Aer. Sci.», 1942, págs. 521-22. También «Coll Works», así como HAYES y PREBSTEIN, ya citado, capítulo III. La aplicabilidad de la fórmula de Newton al régimen hipersónico fue reconocida en Alemania, separadamente, por A. BUSEMANN: *Flüssigkeits-und-Gasbewegung*. Handwörterbuch der Naturwissenschaften. G. Fisher, Jena, 1933, y por E. SÄNGER: *Raketenflugtechnik*. R. Oldenburg, Munich, 1933.

inclinado en ángulo α con respecto a la dirección del movimiento, es:

$$d m = \rho \cdot V \cdot \sin \alpha \cdot d \sigma. \quad [445]$$

Por tanto, la cantidad de movimiento normal a $d \sigma$ que pierde el elemento $d m$ en el choque inelástico con el cuerpo, es decir, la fuerza $p \cdot d \sigma$ que ejerce sobre dicho elemento, si es p la presión del fluido, está dada por la expresión:

$$p = \rho V^2 \sin^2 \alpha. \quad [446]$$

Pues bien, esta ley, que había sido utilizada durante mucho tiempo para el cálculo de la resistencia de proyectiles, encuentra aplicación en los movimientos supersónicos, como ley límite para $M_\infty \rightarrow \infty$, porque el proceso de la corriente, entonces, se asemeja al de Newton, al quedar limitada la perturbación del obstáculo a una estrecha banda muy próxima a éste, limitada, como hemos visto, de un lado por su contorno y de otro por la onda de choque que se forma a proa.

Concretamente, como se comprueba sin dificultad mediante las condiciones de Rankine-Hugoniot, para $M_\infty \gg 1$, la presión detrás de una onda de choque que forma un ángulo θ_c con respecto a la velocidad de la corriente delante de ella, toma el valor límite

$$p_c = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \theta_c, \quad [447]$$

expresión que se identifica con la [446] de Newton cuando la inclinación θ_c de la onda de choque coincide con la α de la pared del obstáculo y la relación γ de calores específicos se hace igual a la unidad.

Ahora bien, se comprueba también fácilmente que si $\gamma = 1$, la desviación δ de la velocidad al atravesar la onda de choque coincide con la inclinación θ_c de ésta, en el límite $M_\infty \rightarrow \infty$.

Por tanto, la expresión [446] de Newton, cuya deducción no ha requerido el empleo de la hipótesis de perturbaciones pequeñas, por lo que resulta aplicable para cualquier valor de la inclinación α , aparece como una ley límite para $M_\infty \rightarrow \infty$ y para gases con relación de calores específicos que difiera poco de la unidad, la cual permite

calcular aproximadamente el valor local del coeficiente de presión C_p , mediante la expresión

$$C_p = 2 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad [448]$$

que sólo hace intervenir la inclinación de la superficie del cuerpo en el punto considerado.

Una fórmula tan atractiva por su sencillez como ésta, justifica que se explore exhaustivamente, como así se ha hecho, la posibilidad y limitaciones de su utilización, comparándola con los resultados de cálculos más precisos y con los de las observaciones experimentales, así como introduciendo en ella las modificaciones y perfeccionamientos que permita ampliar su campo de utilización y mejorar el grado de aproximación que proporciona.

Por ejemplo, empíricamente se ha comprobado que la aproximación de Newton mejora sustancialmente si la expresión [448] se corrige mediante el valor de C_{p_0} en la proa, sustituyéndola por la siguiente:

$$\frac{C_p}{C_{p_0}} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha_0}. \quad [449]$$

Asimismo, ha dado lugar al empleo de los procedimientos llamados de la cuña (para el caso plano) y del cono (para el de revolución) tangentes, en que el coeficiente de presión en cada punto se identifica con el de una cuña o un cono tangente al obstáculo en él.

Por último, Busemann (395) ha desarrollado una corrección a la fórmula de Newton por la acción de la fuerza centrífuga en la trayectoria curva de las partículas fluidas, en el espacio comprendido entre el contorno del obstáculo y el de la onda de choque.

Un problema que sugieren de modo natural las consideraciones precedentes, es el de calcular la ojiva de resistencia mínima, en el caso plano o de revolución, sometida a condiciones tales como que sean dada su longitud y el espesor en la base, o el volumen interior.

Se trata, naturalmente, de un problema de Cálculo de Variaciones que fue ya inicialmente resuelto por Newton y para el que posteriormente se han desarrollado soluciones más elaboradas, cuyo de-

(395) Ver la referencia previamente citada.

talle se hallará en la bibliografía que se cita al comienzo de este epígrafe (396).

Pasemos seguidamente a considerar el caso del obstáculo de proa redondeada, recordando que en el apartado c) del epígrafe 18 se dieron procedimientos para calcular la solución del movimiento en la zona anterior del cuerpo, que es la que tiene mayor importancia desde el punto de vista de la resistencia y del calentamiento.

Con anterioridad a disponer de tales soluciones o para poder obtener con poco esfuerzo resultados preliminares, se desarrollaron métodos aproximados basados, por ejemplo, en el hecho de que la relación de densidades a través de la onda, en la parte casi normal de ésta, es muy grande y en que la onda se forma muy cerca de la superficie del obstáculo, lo que reduce la zona de perturbación a una «capa de choque» de poco espesor, a la que se pueden aplicar procedimientos de cálculo parecidos a algunos de los que se emplearon en la Teoría de la Capa Límite.

Por otra parte, Oswatitsche (397) desarrolló también para este caso un «principio de independencia» para la zona afectada por la parte casi normal de la onda de choque en cuerpos de proa redondeada, según el cual, para $M_\infty \gg 1$ la corriente tiende a una solución límite independiente de tal modo que las expresiones adimensionales

$$\frac{u}{V_\infty}, \frac{v}{V_\infty}, \frac{w}{V_\infty}, \frac{\rho}{\rho_\infty} \text{ y } \frac{p}{\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2} \text{ no dependen del número de}$$

Mach.

Además, se comprueba que dicha solución límite se aproxima rápidamente, de tal modo que, en casos normales, las diferencias entre ella y la solución exacta son muy pequeñas para números de Mach mayores de 3 ó 4, lo que confiere gran utilidad práctica a este principio de independencia dado que, como se ha dicho, una gran parte de los efectos importantes, en materia de resistencia y calentamiento, se origina en la zona donde aquél resulta aplicable.

Para terminar con el régimen hipersónico, vamos a referirnos muy brevemente a los problemas que plantea, en este caso, la capa

(396) Ver también el capítulo XXVI, debido al Prof. Cole, del Inst. Téc. de California, de la obra editada por A. Miele, «cuya referencia se da en la introducción.

(397) K. OSWATITSCH: *Ähnlichkeitsgesetze für Hyperschallströmung*. ZAMP, 1951, págs. 249-64. También, *Similarity Laws for Hypersonic Flow*. «Tech. Notes», núm. 16, Inst. Tec. Real de Estocolmo, 1950.

límite, los cuales, como se ha dicho, son de una doble naturaleza (398).

En primer lugar está, efectivamente, el efecto de la elevada temperatura que produce el rozamiento en el seno de la capa límite, como muestra el esquema c) de la figura I-23, incluso si la pared del obstáculo está muy refrigerada.

Ello da lugar, como se ha dicho, a fenómenos de excitación de los grados internos de libertad del gas cuyo grado de disociación puede llegar a ser muy alto, lo que obliga a tomar en consideración los efectos que todo ello produce, mediante los procedimientos que se describen en el epígrafe 22.

Por otra parte, el calentamiento del gas hace que el espesor de la capa límite sea mucho mayor que el que correspondería a unas condiciones normales y ello precisamente en un tipo de corrientes en donde la perturbación del movimiento queda circunscrita, como se ha visto, a una zona de poco espesor entre la pared del obstáculo y la onda de choque.

Por tanto, es necesario tomar en consideración la interacción entre la capa límite y la corriente exterior a la misma, puesto que la diferencia entre ambas puede llegar incluso a desaparecer.

Se comprueba que el parámetro de semejanza cuyo valor sirve para definir el alcance de esa interacción es el producto

$$X = M_{\infty}^2 R_{\tau\tau}^{-1/2} \quad [450]$$

entre el número de Mach M_{∞} de la corriente principal y la potencia

— 1/2 del número de Reynolds $R_{\tau\tau} = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty x}}{\mu_{\tau}}$, donde el valor μ_{τ}

del coeficiente de viscosidad del gas es el correspondiente a la temperatura de remanso. Puesto que esta temperatura alcanza valores muy grandes en los movimientos hipersónicos y la viscosidad del gas crece con ella, el número de Reynolds $R_{\tau\tau}$ es mucho menor que el que correspondería a unas condiciones termodinámicas normales, a igualdad de valores de ρ_{∞} y V_{∞} .

Para valores pequeños de X , los cuales se dan siempre al menos

(398) Ver, además de HAYES y PRESTEIN ya citado, el trabajo de revisión de V. V. MIKHAILOV, V. YA. NEILAND y V. V. SIVEHEV: *The Theory of Viscous Hypersonic Flow*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 371-96, con abundante bibliografía.

en la proa del obstáculo, la interacción es muy fuerte, debilitándose aguas abajo de la corriente.

Cuando dicha interacción es débil, es decir, para valores suficientemente grandes de X , la interacción se traduce fundamentalmente en una corrección del espesor del obstáculo a causa del desplazamiento de la capa límite, cuyo efecto puede analizarse mediante el método de aproximaciones sucesivas que se describió en el epígrafe 10.

Por el contrario, en el caso de interacción fuerte hay que desarrollar métodos de tratamiento específicos, cuya descripción se hallará en las referencias citadas.

Por ejemplo, un problema concreto es el llamado del «borde exterior», que ilustra la figura I-23, c).

Ocurre, efectivamente, que en él la temperatura de la capa límite tiende a cero (frente a la de remanso) mientras que la de la corriente exterior crece bruscamente, lo que origina una dificultad importante para el empalme entre ambas soluciones, problema que ha sido analizado, entre otros, por Cheng (339).

Por lo que respecta a la estabilidad de las capas límites laminares y su transición al régimen turbulento, en fluidos compresibles y con especial referencia a los movimientos hipersónicos, la cuestión ha sido analizada por Lees y Gald. en un trabajo altamente ilustrativo (400).

Por último A. E. Gentry, de la Douglas Aircraft Co., de los Estados Unidos de América, ha ilustrado en un reciente trabajo de gran interés (401) la forma en que una oficina de proyectos utiliza hoy los resultados de las teorías expuestas, mediante el empleo de calculadores electrónicos, para analizar el comportamiento aerodinámico, en régimen hipersónico, de aeronaves de forma compleja y el excelente grado de aproximación que puede conseguirse, al comparar sus resultados con las mediciones experimentales.

(399) Ver la referencia antes citada.

(400) L. LEES y H. GALD: *Stability of Laminar Boundary Layers and Wakes at Hypersonic Speeds*. «Fluid Phen. in Hyper. Flows», ya citado en este epígrafe, págs. 310-42.

(401) A. E. GENTRY: *Aerodynamic Characteristics of Arbitrary Three-Dimensional Shapes at Hypersonic Speeds*. «Aerospace Proceedings», 1966, ya citado, págs. 385-408.

21. DINÁMICA DE GASES ENRARECIDOS

En todo lo precedente se han considerado situaciones en que la densidad del gas era lo suficientemente elevada para que se comportase siempre como un medio continuo.

Pero existen casos de interés, tanto científico como tecnológico, cuyos orígenes se remontan a los trabajos de Boltzmann y Maxwell durante el siglo pasado, en que el nivel de enrarecimiento es tal que se dejan sentir efectos derivados de la naturaleza molecular del gas, lo que dio lugar a algunas investigaciones teóricas y experimentales sobre la materia.

Ya dentro de nuestro siglo, durante la década de los años 30, se produjo una corriente de renovado interés por la Dinámica de Gases Enrarecidos, como consecuencia de las perspectivas que abría la Aeronáutica a la utilización de las capas superiores de la atmósfera, corriente que se ha intensificado muy considerablemente durante las últimas décadas, con el advenimiento de la Astronáutica y el empleo de los satélites artificiales.

Esta nueva corriente que relaciona la Dinámica de Gases Enrarecidos con las necesidades de la tecnología aeroespacial, se inicia con un célebre trabajo de Zahm (402), quien hace aplicación teórica del modelo de Newton que se ha descrito en el epígrafe precedente, a un conjunto de casos de interés aeronáutico y sugiere algunas líneas de desarrollo teórico y experimental, introduciendo la denominación de Superdinámica para esta rama de la Mecánica de Fluidos, de la que considera tan sólo el caso límite en que la interacción entre moléculas es nula, a causa de la gran longitud del camino libre molecular medio, que él supone mucho mayor que la dimensión característica de los obstáculos que investiga.

El trabajo de Zahm pasó desapercibido durante algún tiempo hasta que, al final de la segunda guerra mundial, en que los progresos de la tecnología aeronáutica con el desarrollo de la propulsión por reacción y más concretamente de la propulsión por cohetes hicieron efectiva la posible utilización de la atmósfera alta, Tsien (403) publi-

(402) A. F. ZAHM: *Superaerodynamics*. «Jour. Franklin Inst.», 1934, páginas 153-166.

(403) H. S. TSIENT: *Superaerodynamics, Mechanics of Rarefied Gases*. «Jour. Aer. Sci.», 1946, págs. 653-64.

có un célebre trabajo que constituye una referencia obligada porque abre el camino al tratamiento moderno de este capítulo de Aerodinámica (404).

El parámetro de semejanza que sirve para determinar el régimen del movimiento es el número de Knudsen

$$K_n = \frac{l}{L} \quad [451]$$

que mide la relación entre el camino libre molecular medio l y una longitud L característica del proceso que puede ser, por ejemplo, una dimensión geométrica del contorno o el espesor de la capa límite, según las condiciones del caso en estudio.

Por ejemplo, a nivel del mar l es del orden de 10^{-5} cm; a una altura de 100 km, es de varios centímetros y a los 200 km es de más de 100 m.

Teniendo presente que, como enseña la Teoría Cinética de Gases, el coeficiente de viscosidad μ se expresa en función del camino libre medio l y de la velocidad del sonido a del gas en la forma:

$$\mu \sim \rho a l \quad [452]$$

el número de Knudsen se puede expresar, a su vez, en función de los números de Mach M y de Reynolds R_e del movimiento, en la forma

$$K_n = \frac{M}{R_e} \quad [453]$$

que permite operar con magnitudes macroscópicas.

Cuatro regímenes distintos, cuyos métodos de tratamiento son

(404) Como bibliografía específica para este epígrafe ver S. A. SCHAAF y P. L. CHAMBRE: *Flow of Rarefied Gases*. Cap. H, vol. III de la Enciclopedia de Princeton. S. A. SCHAAF: *Mechanics of Rarefied Gases*, vol. VIII-2, Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Berlín 1963, págs. 591-624. Una excelente obra de introducción, con abundante bibliografía, es la de V. P. SHILOVSKIY: *Introduction to Dynamics of Rarefied Gases*. Elsevier. Nueva York, 1967. Pero la más completa colección de trabajos sobre la materia la forman los *Proceeding of Rarefied Gas Dynamics* editados por Academic Press a partir de 1961.

también diferentes, resultan de los valores que tome el número de Knudsen.

1.º Para valores de K_n prácticamente nulos, se está en el caso considerado hasta aquí del medio continuo, que queda fuera del dominio de los gases enrarecidos.

2.º Para valores de K_n pequeños frente a la unidad, pero no despreciables, aparecen los primeros efectos del enrarecimiento del gas, pero el problema se puede tratar con los procedimientos de la Mecánica de Fluidos, sin más que introducir las pertinentes modificaciones en las condiciones de contorno.

En efecto, experimentalmente se comprueba y el análisis teórico mediante los procedimientos de la Teoría Cinética lo confirma, que la condición de continuidad entre la velocidad y la temperatura del gas y las de la pared, propios del régimen de Navier-Stokes para un medio continuo, no se cumplen en este caso sino que, por el contrario, existe un deslizamiento y un salto de temperaturas en la pared, los cuales están determinados por los valores que toman sendos «coeficientes de acomodación» que dependen de la naturaleza del gas y de la de la pared.

Tales análisis demuestran que, en primera aproximación, la velocidad de deslizamiento v_s en la pared y el salto de temperatura T_s se expresan linealmente en función de los gradientes de dichas magnitudes, en la forma:

$$\left. \begin{aligned} v_s &= a \frac{\partial v}{\partial n} + b \frac{\partial T}{\partial s} \\ T_s &= c \frac{\partial T}{\partial n} \end{aligned} \right\} \quad [454]$$

en donde a , b y c son tres coeficientes cuyos valores proporciona la Teoría Cinética o la observación experimental, mientras que n y s son las dos direcciones normal y tangencial a la pared respectivamente.

El régimen correspondiente a esta situación se llama, a causa de los saltos indicados, de la «corriente deslizante» y de él se hallarán numerosos ejemplos en la bibliografía citada, especialmente en la obra de Shidlovskiy.

3.º En el otro extremo, es decir, para valores del número de Knudsen mucho mayores que la unidad, se pueden despreciar las

interacciones moleculares frente a las de éstas con los contornos, lo que simplifica considerablemente el cálculo, especialmente en el caso de paredes convexas.

El cálculo se efectúa a partir de la Teoría Cinética, determinando el esfuerzo normal (presión) y tangencial (rozamiento), así como la energía (temperatura absoluta) que transmiten a un elemento de superficie $d\sigma$ inclinado un ángulo α con respecto a la corriente principal, las moléculas dN , que inciden sobre dicho elemento por unidad de superficie y por unidad de tiempo, en la hipótesis de que el gas está en equilibrio y que, por tanto, la función de distribución molecular es maxwelliana.

Ello proporciona la componente incidente del esfuerzo y del calentamiento producidos por el gas en el impacto, a la que hay que agregar la componente emergente, la cual depende de los coeficientes de acomodación que determinan el reparto entre la fracción de choques con reflexión especular y difusa, respectivamente. Tales coeficientes no pueden determinarse todavía teóricamente, por lo que es necesario operar con modelos simplificados o con los resultados de observaciones experimentales.

Una consecuencia de la teoría, que en la hipótesis de que toda la reflexión sea difusa se reduce a la de Newton para valores muy grandes del número de Mach de la corriente principal, es que la presión sobre la pared depende del coeficiente de acomodación de la temperatura y de la relación entre la del gas y la de la pared.

El cálculo de todo ello no ofrece dificultad conceptual, pero es muy laborioso, por lo que nos limitamos a remitir a la bibliografía citada, donde se hallarán ejemplos correspondientes, por ejemplo, a los movimientos en conductos, a placas planas, esferas y formas geométricas de resistencia mínima para la corriente molecular libre.

4.º Por último, existe un régimen intermedio o de «transición» entre el de la corriente deslizante y el molecular libre, para valores del número de Knudsen que no sean ni demasiado grandes ni demasiado pequeños.

Como cabe prever, es el caso más difícil de tratar, porque su resolución exige la integración de la ecuación íntegro diferencial de Boltzmann, bajo las condiciones iniciales y de contorno que correspondan al problema en estudio.

Como es sabido (405), en ausencia de fuerzas másicas, que aquí no interesan, dicha ecuación está dada por la expresión:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f = \iint' |\mathbf{v}' - \mathbf{v}| \cdot (f' f'_1 - f f_1) d\chi dv_1. \quad [455]$$

En ella, $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es la función que da la densidad de distribución, en el espacio de fase, de las moléculas que en el instante t tienen la velocidad $\mathbf{v}$ en el punto $\mathbf{x}$.

El segundo miembro mide la modificación introducida en f por el efecto de las colisiones moleculares. En el integrando, el acento se refiere a los valores de la función después de la colisión; el subíndice uno se aplica a todas las moléculas que chocan con las elegidas, de distribución f y el símbolo χ se refiere a la integración sobre los parámetros del choque.

Salvo en ocasiones muy especiales, la integración de esta ecuación que constituye el problema básico para la resolución de las corrientes de transición, es un problema de una dificultad formidable.

Durante los últimos años, en que se viene trabajando intensamente en la materia (406), se han puesto a punto diversos procedimientos aproximados de resolución de la ecuación de Boltzmann, si bien la cuestión está aún lejos de haber alcanzado una situación satisfactoria.

Un par de ejemplos sencillos se hallarán en el capítulo IV, al estudiar la estructura interna de las ondas de choque intensas.

Un problema interesante, que ha sido objeto de investigaciones recientes, es el de la propagación y reflexión del sonido en gases enrarecidos, especialmente en el régimen molecular libre (407).

Por último, para terminar con el tema de la Dinámica de Gases Enrarecidos hay que advertir que la clasificación simplificada que aquí se ha efectuado ofrece en la realidad alguna mayor dificultad

(405) V., p. ej., CHAPMAN y COWLING, que se menciona en el capítulo IV, o H. GRAAD: *Principles of the Kinetic Theory of Gases*, «Handbuch der Physik», vol. 12, págs. 205 y sgts., Springer-Verlag, Berlin, 1958.

(406) V., p. e., H. GRAD: *Theory of Rarefied Gases*, Procc. First. Int. Symp. in Rarefied Gas Dynamics. Acad. Press, 1961, págs. 100-38, así como el resumen de procedimientos que se describe en la obra de SHIDLOVSKIY.

(407) G. M. MAIDANIK, H. L. FOX y M. HECKEL: *Propagation and Reflection of Sound in Rarefied Gases*, «The Physics of Fluids», vol. 8, núm. 2, 1965, págs. 259-272.

a la hora de determinar, por ejemplo, la longitud de referencia que resulta más adecuada para un problema específico, como podrá comprobarse en la literatura de referencia (408).

22. EFECTOS DE RELAJACIÓN. AEROTERMOQUÍMICA

En todos los casos considerados hasta aquí se ha supuesto que el fluido estaba en equilibrio termodinámico, lo que reduce a dos el número de variables termodinámicas necesarias para determinar su estado.

Por consiguiente, dos de ellas, debidamente seleccionadas, permitirán calcular los valores de todas las demás mediante los procedimientos que enseña la Termodinámica.

Con ello, el cálculo del estado de un gas de composición variable, como ocurre, por ejemplo, con los productos de la combustión de un motor de reacción, o con la excitación de los grados internos de libertad al aumentar su temperatura por efectos del rozamiento con una pared o detrás de una onda de choque fuerte, se hace más laborioso, pero no presenta dificultad conceptual adicional al planteamiento del problema en la forma en que hasta aquí se ha formulado.

Concretamente, en el capítulo siguiente se dan algunos procedimientos para llevar a cabo los cálculos para el equilibrio termoquímico, cuya evolución puede ser importante en numerosas situaciones.

Sin embargo, hay que tener presente que al producirse un desplazamiento, el nuevo estado de equilibrio no puede alcanzarse instantáneamente, sino que requiere un tiempo para ello, cuya magnitud puede no ser despreciable con respecto al tiempo característico del proceso mecánico que origina la transformación.

En tales circunstancias, como se ha adelantado en la introducción, es preciso tomar en consideración la cinética del desplazamiento del equilibrio, es decir, la velocidad de la reacción química o de relajación de la mezcla, con lo que se produce una nueva situación que altera sustancialmente las características del problema, como va-

(408) V., p. e., W. WUEST: *Boundary Layers in Rarefied Gas Flow*. «Progress in Aer. Sci.», vol. 8, ya citado. También G. N. PATTERSON: *A. Synthetic View of Mechanics of Rarefied Gases*, «AIAA Jour.», 1965, págs. 577-89, con extensa bibliografía. Por último, F. S. SHERMAN: *The Transition from Continuum to Molecular Flow*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1970, págs. 317-40 y M. N. KOGAN: *Molecular Gas Dynamics*. Id. id., 1973, págs. 383-404.

mos a ver en forma muy resumida (409), puesto que los capítulos siguientes desarrollan con todo pormenor las aplicaciones de esta teoría al estudio de la estructura interna de las ondas de choque y de las de combustión.

Por otra parte, al ser variable la composición del gas de un punto a otro, es necesario tomar en consideración los efectos de difusión de las diversas especies entre sí.

Por consiguiente, a las ecuaciones generales de la Dinámica de Gases que hemos manejado hasta aquí, es necesario agregar las de reacción química o relajación de las distintas especies, así como las de la difusión entre ellas.

En ausencia de fuerzas másicas, que sólo revisten interés en problemas muy especiales, el sistema general de ecuaciones de la Aero-termoquímica, que fue establecido por Hirschfelder (410), reviste la forma siguiente, en donde la notación tiene el mismo significado que hasta aquí, complementada con la que se incorpora en lo que sigue:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad [456]$$

en donde $\mathbf{v}$ es la velocidad media de la mezcla, relacionada con las velocidades $\mathbf{v}_i$ de las diversas especies, por la condición:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N Y_i \mathbf{v}_i, \quad [457]$$

donde Y_i es la fracción másica de la especie i , y N es el número de especies distintas de la mezcla.

(409) Para este epígrafe, ver la bibliografía siguiente, además de la que se cita en los capítulos IV, V y VI. G. MILLÁN: *Acrothermochemistry*. INTA. 1956; *Nonequilibrium Flows*, vols. I y II. Ed. por P. P. Wegener. Marcel Dekker, Nueva York, 1969; E. BECKER: *Relaxation Effects in Gas Dynamics*. «The Aer. Jour. Roy. Aer. Soc.», 1970, págs. 736-48; E. BECKER: *Chemically Reacting Flows*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1972, págs. 155-94; F. A. WILLIAMS: *Theory of Combustion in Laminar Flows*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 171-88. Finalmente, M. BARRERE y R. PRUD'HOMME: *Equations Fondamentales de l'Aérothermochimie*. Masson et Cie., 1973.

(410) Ver HIRSCHFELDER et al., citado en la introducción.

$$\rho \cdot \frac{D \mathbf{v}}{D t} = - \nabla p + \nabla \tau, \quad [458]$$

en donde τ es el tensor de esfuerzos de viscosidad, cuya expresión se dio en el epígrafe 1.

Ecuación de la energía:

$$\rho \frac{D e}{D t} = - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \Phi + \nabla (\lambda \nabla T) - \nabla \left(\rho \sum_{i=1}^N h_i Y_i \mathbf{v}_{di} \right) \quad [459]$$

En esta expresión, h_i es la entalpía específica de la especie i , y $\mathbf{v}_{di} = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}$ es su velocidad de difusión a través de la mezcla.

Por consiguiente, en el balance energético, la presencia de especies diferentes lo que hace es agregar un término adicional

$\rho \sum_{i=1}^N h_i Y_i \mathbf{v}_{di}$ al flujo de calor, debido al transporte de entalpía por la difusión de las distintas especies.

En cuanto a la entalpía h_i de la especie i , si la mezcla se comporta como un gas perfecto está dada por la expresión

$$h_i = h_i^0 + \int_{T_0}^T C_{p,i} \cdot dT, \quad [460]$$

en donde h_i^0 es la entalpía de formación de la especie y $C_{p,i}$ es su calor específico a presión constante, el cual no puede considerarse, en general, independiente de la temperatura, dados los grandes intervalos de ésta que suelen producirse en los procesos de combustión.

A estas tres ecuaciones vectoriales, que reflejan los principios clásicos de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía, deben añadirse ahora las de conservación de las diversas especies, las cuales revisten la forma:

$$\rho \frac{D Y_i}{D t} = W_i - \nabla (\rho Y_i \mathbf{v}_{di}), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad [461]$$

en donde W_i es la velocidad de formación de la especie i en las condiciones termoquímicas de la mezcla, en el punto considerado.

Su valor debe ser proporcionado, por tanto, por la Cinética Química (411) o por la Teoría de Relajación (412).

En general, para una reacción química, W_i está dada por una expresión de la forma

$$W_i = \rho \sum_{l=1}^M K_l(T) \cdot e^{-\frac{E_l}{R T}} \prod_{j=1}^N Y_j^{n'_{lj}}$$

en donde M es el número de reacciones químicas en que participa la especie i ; E_l es la energía de activación de la reacción l ; n'_{lj} es un coeficiente que mide el orden de la misma, para la especie j y $K_l(T)$ es un coeficiente llamado factor de frecuencia que depende de la temperatura, $e^{-\frac{E_l}{R T}}$ es el llamado factor de Arrhenius y para valores elevados de la energía de activación E_l , tales que sea $\frac{E_l}{R T} \gg 1$ como ocurre a menudo en reacciones de combustión, es el responsable de la fuerte dependencia de la velocidad de reacción con respecto a las variaciones de la temperatura T .

Para un proceso de relajación, en cambio, W_i suele adoptar, al menos como aproximación, la forma:

$$W_i = \rho \frac{Y_i^e - Y_i}{\tau_i}, \quad [463]$$

en donde Y_i^e es el valor de equilibrio termodinámico de Y_i en el estado del punto y τ_i es un «tiempo de relajación», que depende del estado termodinámico y del tipo de proceso.

Por último, el sistema anterior incluye, como nuevas incógnitas, las velocidades de difusión v_{di} , las cuales están determinadas por un sistema diferencial de la forma:

$$\nabla X_i = \sum_{j=1}^N \frac{X_i X_j}{D_{ij}} (v_{dj} - v_{di}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad [464]$$

(411) Aparte de la bibliografía que se da sobre esta materia en los capítulos V y VI, ver la obra ya citada de Barrere y Prud'homme, así como la de C. P. FERNIMORE: *Chemistry in Premixed Flames*. Pergamon Press, 1964.

(412) Ver la bibliografía del capítulo IV.

en donde X_i son las concentraciones molares de las especies, relacionadas con las fracciones másicas Y_i y con los pesos moleculares M_i de aquéllas mediante expresiones de la forma:

$$X_i = \frac{\frac{Y_i}{M_i}}{\sum_{j=1}^N \frac{Y_j}{M_j}}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad [465]$$

y D_{ij} son los coeficientes de difusión binaria entre las especies j e i , respectivamente, cuyos valores proporciona la Teoría Cinética de Gases o la medición experimental.

Debe señalarse, en primer lugar, que, por sencillez, en el sistema anterior se han omitido los efectos de la difusión de presión y de la térmica, que suelen ser secundarios y agregarán nuevos términos a las ecuaciones de difusión y al flujo de calor en la de la energética.

Asimismo, se ha prescindido de los efectos de la radiación, cuyo tratamiento se hallará en el epígrafe 5 del capítulo IV (413)

Por último, se obtiene una simplificación importante cuando el término de difusión de las ecuaciones [461] se sustituye por una expresión aproximada de la Ley de Fick (414), en cuyo caso aquéllas adoptan la forma simplificada:

$$\rho \frac{D Y_i}{D t} = W_i - \nabla \cdot (\rho D_i \nabla Y_i), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad [466]$$

en donde D_i es un coeficiente aproximado de difusión de la especie i a través de la mezcla de todas las demás.

En particular esta aproximación, que a menudo resulta suficiente, y se utiliza extensamente en los cálculos de Aerotermodinámica, hace innecesario el empleo del sistema [464].

Debe señalarse, también, que el número de componentes independientes con que se necesita operar para describir la composición de la mezcla de gases es, a menudo, menor que el de especies químicas distintas y depende del sistema de ecuaciones de reacción del proceso.

(413) Ver, por ejemplo, W. VINCENTI y S. C. TRAUGOTT: *The Coupling of Radiative Transfer and Gas Motion*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 89-116.

(414) Ver ecuación [7], capítulo III.

Como se verá en los casos que se tratan en los capítulos siguientes, la Termoquímica dispone de procedimientos adecuados para seleccionar aquéllos en la forma más conveniente.

A título de ejemplo sencillo de aplicación de lo que acabamos de exponer, consideremos el caso del movimiento unidimensional no estacionario que analizamos en el epígrafe 17, comenzando por recordar la exposición que allí se hizo, pero partiendo en este caso de las ecuaciones del movimiento en lugar de hacerlo de la del potencial de velocidades.

En el ejemplo supondremos, además, que son nulos los efectos disipativos de la viscosidad, conductividad térmica y difusión, para poner de manifiesto exclusivamente la influencia en el fenómeno de los efectos de las transformaciones químicas, que limitaremos al caso de una única reacción.

Con ello, en el caso de composición química constante, las tres ecuaciones que rigen el proceso son las siguientes:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad [467]$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0; \quad [468]$$

Ecuación de la entropía:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = 0. \quad [469]$$

La última de estas ecuaciones expresa el carácter isentrópico de las transformaciones de cada partícula, válida en ausencia, como se ha supuesto, de fenómenos de disipación (conducción térmica, viscosidad, difusión o reacción química).

Este sistema de tres ecuaciones para las cuatro incógnitas ρ , p , v y S , se complementa con la ecuación de estado del medio, la cual, en equilibrio termodinámico, se expresa en la forma:

$$p = f(\rho, S) \quad [470]$$

y permite eliminar la densidad ρ de [467], con lo que se obtiene, en su lugar, la ecuación:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad [471]$$

donde

$$a^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad [472]$$

es la velocidad de propagación del sonido en el medio.

Con ello, el sistema a integrar se reduce al formado por las ecuaciones [468], [469] y [472] para el cálculo de la velocidad, la presión y la entropía, con coeficientes que dependen de tales variables, bien sea directamente o a través de la función de estado (470).

Por consiguiente, se trata de un sistema homogéneo, casi lineal, cuyos coeficientes son independientes de las variables t y x ; es decir, estamos ante un sistema que es «reducible» a uno lineal, lo que se consigue, como es sabido, sin más que invertir las variables.

Un sistema como el anterior es siempre hiperbólico, como se comprueba fácilmente, y las curvas características del mismo están dadas por las condiciones:

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^+ = v + a; \quad \left(\frac{dx}{dt} \right)^- = v - a \quad \text{y} \quad \frac{dx}{dt} = v. \quad [473]$$

De ellas, las dos primeras coinciden con las que se obtuvieron en el epígrafe 17, en tanto que la tercera, que corresponde al haz de trayectorias de las diversas partículas, toma en consideración la circunstancia, excluida allí, de que la entropía pueda ser distinta de una partícula a otra.

Dicho esto, veamos ahora cómo se modifica el sistema anterior en el caso en que se produzcan transformaciones químicas en el medio, como las que corresponden a los procesos de combustión que estamos analizando.

En primer lugar, es claro que las ecuaciones [467] y [468] subsisten idénticas, como se ha visto en las ecuaciones generales, puesto que expresan dos principios que son independientes de la composición del medio.

En cuanto a la variación de la composición, queda determinada por una ecuación de la forma [461] que, en ausencia de efectos de difusión, como se ha supuesto, se reduce a

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + v \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{w}{\rho}, \quad [474]$$

para la única variable Y que es necesaria para describir la composición de la mezcla (415).

Por otra parte, la reacción química es un proceso irreversible, por lo que la entropía de cada partícula no se mantiene constante en este caso, sino que varía al hacerlo la composición de la partícula.

La Termodinámica enseña que la variación de la entropía debida al cambio de composición está determinada por el incremento ΔF de la energía libre específica de Gibbs, por lo que la ecuación [469] debe sustituirse, en este caso, por la siguiente (416):

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} = - \frac{\Delta F}{T} \cdot \frac{w}{\rho}. \quad [475]$$

Finalmente, la función de estado [470] debe sustituirse también aquí por una expresión de la forma

$$p = f(\rho, S, Y), \quad [476]$$

puesto que la presión no sólo depende de los valores de la densidad y de la entropía, sino que varía también con la composición.

De todo lo cual resulta que el sistema diferencial inicial [467] a [470], para la determinación de ρ , p , v y S en el caso de composición constante, queda sustituido ahora por el sistema [467], [468], [474], [475] y [476], de cinco ecuaciones similares a las anteriores para la determinación de las cuatro incógnitas precedentes y de la fracción másica Y (417).

(415) Efectivamente, Y es la concentración másica de una de las especies; por ejemplo, de los reactantes. La de los productos es entonces, evidentemente, $1 - Y$.

(416) Ver, por ejemplo, la obra de DE GROOT y MAZUR citada en la introducción.

(417) Si en lugar de una única especie independiente Y , hubiese N especies, el sistema sería $4 + N$ ecuaciones con el mismo número de incógnitas. Para ello

Pero ocurre, además, que el sistema citado ya no es homogéneo, a causa de los segundos miembros no nulos de [474] y [475], por lo que deja de ser reducible, circunstancia que introduce una difícil complicación a la hora de obtener soluciones.

Así las cosas, si, para reducir en una unidad el orden del sistema, se procede a eliminar ρ de la ecuación [467], como se hizo en el caso anterior, en lugar de la ecuación [471] se obtiene la siguiente:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a_c^2 \frac{\partial v}{\partial x} = \sigma \cdot W, \quad [477]$$

donde σ es una función del estado termodinámico del gas y de la velocidad de reacción de la mezcla y

$$a_c^2 \equiv \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s, Y} = \frac{\partial f}{\partial \rho}, \quad [478]$$

es la velocidad de propagación del sonido correspondiente al estado del medio en el punto, con composición química constante, es decir, «congelada», puesto que, en la derivada parcial de [478], no sólo la entropía S , sino también la composición Y , se mantienen constantes (418).

Ello esclarece la polémica que existió durante algún tiempo sobre qué expresión debería utilizarse para la velocidad de propagación del

bastaría con sustituir la ecuación [474] por un sistema de N ecuaciones de la forma

$$\frac{\partial Y_i}{\partial t} + v \frac{\partial Y_i}{\partial x} = \frac{w_i}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad [474']$$

Asimismo, el segundo miembro de [475] debería sustituirse por una expresión de la forma

$$- \sum_{i=1}^N \frac{\Delta F_i}{T} \cdot \frac{w_i}{\rho}. \quad [475']$$

Finalmente, la ecuación de estado [476] tomaría la forma

$$p = f(\rho, S, Y_1, Y_2, \dots, Y_N). \quad [476']$$

(418) Ver, por ejemplo, F. E. EHLERS: *Method of Characteristics and Velocity of Sound for Reacting Gases*. «AIAA Jour.», 1963, págs. 1415-16.

sonido, si la correspondiente al estado de congelación que aquí se ha obtenido, la de equilibrio químico a_e , o alguna intermedia entre ambas (419).

Por otra parte, la comparación entre el sistema [468], [469] y [471] correspondiente al caso de composición constante y el [468], [474], [475] y [477], aplicable a un medio de composición variable, muestra que las «características» están definidas en ambos casos por las mismas condiciones [473], con idéntica interpretación física, puesto que tales curvas sólo dependen del primer miembro de las ecuaciones, sin más que sustituir a por a_e .

Sin embargo, la aplicación a la resolución de los problemas prácticos es, en el caso que estamos considerando, sensiblemente más complicada que en el primero, a causa del carácter no homogéneo del sistema que, en particular, impide el desacoplamiento entre las variables v, p de un lado y las x, t del otro, que tan fecundos métodos de solución proporciona en aquél, como vimos, en particular, en los epígrafes 17 y 18.

Por ello, cuando varía la composición química, las soluciones hay que obtenerlas generalmente mediante procedimientos de integración numérica a lo largo de las líneas características (420).

En los capítulos siguientes se van a desarrollar con detalle soluciones correspondientes a fenómenos de relajación y reacción química, en el caso de ondas de choque y combustión.

Por ello, para terminar este epígrafe nos limitaremos a citar bibliografía específica de la generalización a la aerotermoquímica de algunos de los problemas tratados en epígrafes precedentes para el caso de composición constante, remitiendo a la bibliografía general

(419) Ver E. L. RESLER: *Characteristics and Sound Speed in Nonisentropic Gas Flows with Nonequilibrium Thermodynamic States*, v. Jour. Aer. Sci., 1957, págs. 785-90; L. F. BROER: *Characteristics of the Equations of Motion of a Reacting Gas*, «Jour. Fluid Mech.», 1958, págs. 276-83; R. A. GROSS y C. L. EISEN: *On the Speed of Sound in Air*, «The Physics of Fluids», 1959, págs. 276-9; W. LICK, ya citado en el epígrafe 17, y T. Y. TOONG: *Chemical Effects on Sound Propagation*, «Comb. and Flames», 1972, págs. 207-16.

(420) Ver, por ejemplo, G. RUDINGER: *Wave Diagrams for Nonsteady Flow in Ducts*, D. van Nostrand, Nueva York, 1955. También las páginas 83 y siguientes de la obra de WILLIAMS que se cita en el capítulo V, así como W. W. WOOD y J. G. KIRKWOOD: *Hydrodynamics of a Reacting and Relaxing Fluid*, «Jour. App. Phys.», 1957, págs. 395-98.

que hemos dado al comienzo y, concretamente, a la excelente obra de Barrere y Prud'homme, para una información más completa sobre los métodos propios de esta rama especializada de la Mecánica de Fluidos.

Para una interesante discusión de las propiedades del sistema general de ecuaciones de la Aerotermodinámica de un gas ideal, con especial aplicación a problemas con simetría de revolución, ver un trabajo de Gravalos (421).

Para los movimientos unidimensionales con formación de ondas de choque, ver un reciente trabajo de Sternberg (422).

Para el movimiento en toberas de cohetes, cuya importancia ya se ha señalado en la introducción, ver un trabajo de Der (423) y otro de Anderson (424), con abundante bibliografía.

Para el cálculo de corrientes supersónicas con reacciones químicas, por el método de las características, ver un trabajo de Spurk et al. (425).

Para movimientos cónicos con ondas de combustión, un trabajo de Clarke y Petty (426).

Para el cálculo de corrientes con ondas de choque desprendidas, ver los trabajos de Bohachevsky y Rubin (427) y de Li (428).

Para el estudio de capas límites en gases de composición variable, ver los trabajos de Fay y Kaye (429).

(421) F. G. GRAVALOS: *Analytical Foundations of Aerothermochemistry*. ZAMP, 1966, págs. 732-55.

(422) H. M. STERNBERG: *Similarity Solutions for Reactive Shock Waves*. «Quart. Jour. Mech. Appl. Math.», 1970, págs. 77-79.

(423) J. J. DER: *Theoretical Studies of Supersonic Two-Dimensional and Axisymmetric Nonequilibrium Flow, Including Calculations of Flow Through a Nozzle*. NASA TR R-164, 1963.

(424) J. D. ANDERSON: *A Time-Dependent Analysis for Vibrational and Chemical Nonequilibrium Nozzle Flow*. «AIAA Jour.», 1970, págs. 545-50.

(425) J. H. SPURK, N. GERBER y R. SEDNEY: *Characteristic Calculation of Flow Fields with Chemical Reactions*. «AIAA Jour.», 1966, págs. 30-37.

(426) J. F. CLARKE y D. G. PETTY: *The Supersonic Flow Field Associated with a Conical Flame Sheet*. «The Aeronautical Quarterly», 1969, págs. 368-78.

(427) I. O. BOHACHEVSKY y E. L. RUBIN: *A Direct Method for Computation of Nonequilibrium Flows with Detached Shock Waves*. «AIAA Jour.», 1966, páginas 600-606.

(428) C. P. LI: *Time-Dependent Solutions of Nonequilibrium Airflow Past a Blunt Body*. «AIAA Paper», núm. 71-505, 1971.

(429) J. A. FAY y H. KAYE: *A Finite-Difference Solution of Similar Nonequilibrium Boundary Layers*. «AIAA Jour.», 1967, págs. 1949-54.

También son interesantes los de Sharma y Sirignano (430).

Para corrientes con ondas de combustión, el trabajo de Chernyi (431), que es el equivalente para este caso del que se dio en el epígrafe 18 para el caso de composición constante.

Para corrientes hipersónicas, ver los trabajos de Chu (432) y de Liñán y Da Riva (433).

Para problemas de estabilidad en corrientes de composición variable, los trabajos de McVey y Toong (434).

Para métodos de cálculo numérico de reacciones rápidas, el trabajo de Spiegler (435).

Para procesos turbulentos en Aerotermodinámica, Barrere y Prud'homme, ya citado, así como Libby y Williams (436).

Para la combustión supersónica, los trabajos de Da Riva, Liñán, Urrutia y Fraga (437), así como un reciente trabajo de revisión de Ferri (438).

Por último, para gases enrarecidos, la reciente obra de Burgers (439).

(430) O. P. SHARMA y W. A. SIRIGNANO: *On Ignition of a Pre-Mixed Fuel by a Hot Projectile*. «Combustion and Science Technology», 1970, págs. 481-94.

(431) G. G. CHERNYI: *Supersonic Flow Past Bodies with Formation of Detonation and Combustion Fronts*. Obra de homenaje a Sedov, ya citada, páginas 145-69.

(432) B. T. CHU: *Wave Propagation and the Method of Characteristics in Reacting Gas Mixtures with Application to Hypersonic Flow*. WADC, TN-57-218, 1957.

(433) A. LIÑÁN e I. DA RIVA: *Chemical Non-Equilibrium Effects in Hypersonic Aerodynamics*. INTA, 1962.

(434) J. B. McVEY y T. Y. TOONG: *Mechanism of Instabilities of Exothermic Hypersonic Blunt-Body Flows*. «Comb. Sci. Tech.», 1971, págs. 68-76, y T. T. TOONG: *Instabilities in Reacting Flows*. «Acta Astronautica», 1974, págs. 317-44.

(435) E. SPIEGLER, M. WOLFSSTEIN y Y. M. TIMNAT: *On the Numerical Solution of Flows with Fast Reactions*. «Acta Astr.», 1974, págs. 935-47.

(436) P. A. LIBBY y F. A. WILLIAMS: *Turbulent Flows Involving Chemical Reactions*. A publicar en «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1976.

(437) I. DA RIVA, A. LIÑÁN y E. FRAGA: *Algunos resultados en combustión supersónica*. «Ing. Aer. y Astr.», 1965, págs. 10-25; I. DA RIVA y J. L. URRUTIA: *Investigaciones recientes sobre combustión supersónica en el INTA*. Idem id., 1967, págs. 39-46; I. DA RIVA y J. L. URRUTIA: *Ignition Delay in Diffusive Supersonic Combustion*. «AIAA Jour.», 1968, págs. 2095-2101.

(438) A. FERRI: *Mixing-Controlled Supersonic Combustion*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1975, págs. 301-38.

(439) J. M. BURGERS: *Flow Equations for Composite Gases*. Acad. Press, Nueva York, 1969.

CAPÍTULO II

ONDAS DE CHOQUE Y COMBUSTION

Aun cuando el objeto del presente trabajo es desarrollar la teoría de la estructura interna de las ondas de choque y combustión, sin embargo, resulta obligado hacer preceder dicho estudio de una exposición sucinta, que, en su mayor parte, es ya clásica, sobre la naturaleza y propiedades de los diversos tipos de ondas que pueden existir, atendiendo exclusivamente a las características del salto que se produce a través de la discontinuidad a que se reduce la onda, cuando se prescinde de los efectos disipativos y del tiempo de reacción química.

En particular se busca con ello separar, en cuanto a la existencia y unicidad de las soluciones, aquellas limitaciones que dependen exclusivamente de las características ligadas al salto, de las que exigen un conocimiento de la estructura interna de la onda.

Para ello, hay que comenzar por tener presente que en una superficie de discontinuidad, los saltos de las variables mecánicas, termodinámicas y químicas del proceso no pueden ser arbitrarios.

Efectivamente, tales saltos tienen que satisfacer unas «condiciones de compatibilidad» que resultan de aplicar los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía al fluido situado en el entorno de cada punto de la superficie de discontinuidad.

En su forma general, el procedimiento para calcular dichas condiciones puede hallarse en la obra clásica de Courant y Friedrichs sobre «Corrientes supersónicas y ondas de choque» (1) a la que se

(1) R. COURANT y K. O. FRIEDRICHS: *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience Publ., Nueva York y Londres, 1948.

También son interesantes los de Sharma y Sirignano (430).

Para corrientes con ondas de combustión, el trabajo de Chernyi (431), que es el equivalente para este caso del que se dio en el epígrafe 18 para el caso de composición constante.

Para corrientes hipersónicas, ver los trabajos de Chu (432) y de Liñán y Da Riva (433).

Para problemas de estabilidad en corrientes de composición variable, los trabajos de McVey y Toong (434).

Para métodos de cálculo numérico de reacciones rápidas, el trabajo de Spiegler (435).

Para procesos turbulentos en Aerotermoquímica, Barrere y Prud'homme, ya citado, así como Libby y Williams (436).

Para la combustión supersónica, los trabajos de Da Riva, Liñán, Urrutia y Fraga (437), así como un reciente trabajo de revisión de Ferri (438).

Por último, para gases enrarecidos, la reciente obra de Burgers (439).

(430) O. P. SHARMA y W. A. SIRIGNANO: *On Ignition of a Pre-Mixed Fuel by a Hot Projectile*. «Combustion and Science Technology», 1970, págs. 481-94.

(431) G. G. CHERNYI: *Supersonic Flow Past Bodies with Formation of Detonation and Combustion Fronts*. Obra de homenaje a Sedov, ya citada, páginas 145-69.

(432) B. T. CHU: *Wave Propagation and the Method of Characteristics in Reacting Gas Mixtures with Application to Hypersonic Flow*. WADC, TN-57-218, 1957.

(433) A. LIÑÁN e I. DA RIVA: *Chemical Non-Equilibrium Effects in Hypersonic Aerodynamics*. INTA, 1962.

(434) J. B. MCVEY y T. Y. TOONG: *Mechanism of Instabilities of Exothermic Hypersonic Blunt-Body Flows*. «Comb. Sci. Tech.», 1971, págs. 68-76, y T. T. TOONG: *Instabilities in Reacting Flows*. «Acta Astronautica», 1974, págs. 317-44.

(435) E. SPIEGLER, M. WOLFSSTEIN y Y. M. TIMNAT: *On the Numerical Solution of Flows with Fast Reactions*. «Acta Astr.», 1974, págs. 935-47.

(436) P. A. LIBBY y F. A. WILLIAMS: *Turbulent Flows Involving Chemical Reactions*. A publicar en «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1976.

(437) I. DA RIVA, A. LIÑÁN y E. FRAGA: *Algunos resultados en combustión supersónica*. «Ing. Aer. y Astr.», 1965, págs. 10-25; I. DA RIVA y J. L. URRUTIA: *Investigaciones recientes sobre combustión supersónica en el INTA*. Idem id., 1967, págs. 39-46; I. DA RIVA y J. L. URRUTIA: *Ignition Delay in Diffusive Supersonic Combustion*. «AIAA Jour.», 1968, págs. 2095-2101.

(438) A. FERRI: *Mixing-Controlled Supersonic Combustion*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1973, págs. 301-38.

(439) J. M. BURGERS: *Flow Equations for Composite Gases*. Acad. Press, Nueva York, 1969.

CAPÍTULO II

ONDAS DE CHOQUE Y COMBUSTION

Aun cuando el objeto del presente trabajo es desarrollar la teoría de la estructura interna de las ondas de choque y combustión, sin embargo, resulta obligado hacer preceder dicho estudio de una exposición sucinta, que, en su mayor parte, es ya clásica, sobre la naturaleza y propiedades de los diversos tipos de ondas que pueden existir, atendiendo exclusivamente a las características del salto que se produce a través de la discontinuidad a que se reduce la onda, cuando se prescinde de los efectos disipativos y del tiempo de reacción química.

En particular se busca con ello separar, en cuanto a la existencia y unicidad de las soluciones, aquellas limitaciones que dependen exclusivamente de las características ligadas al salto, de las que exigen un conocimiento de la estructura interna de la onda.

Para ello, hay que comenzar por tener presente que en una superficie de discontinuidad, los saltos de las variables mecánicas, termodinámicas y químicas del proceso no pueden ser arbitrarios.

Efectivamente, tales saltos tienen que satisfacer unas «condiciones de compatibilidad» que resultan de aplicar los principios de conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía al fluido situado en el entorno de cada punto de la superficie de discontinuidad.

En su forma general, el procedimiento para calcular dichas condiciones puede hallarse en la obra clásica de Courant y Friedrichs sobre «Corrientes supersónicas y ondas de choque» (1) a la que se

(1) R. COURANT y K. O. FRIEDRICHS: *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience Publ., Nueva York y Londres, 1948.

aludirá repetidamente en este trabajo, páginas 121 y 134, así como en el excelente libro de Williams sobre la «Teoría de combustión» (2), al que también apelaremos frecuentemente, páginas 13 y siguientes.

Una primera conclusión de las condiciones de compatibilidad así establecidas, es que las superficies de discontinuidad pueden clasificarse en dos grupos de naturaleza esencialmente distinta, según que el fluido deslice a lo largo de la superficie de discontinuidad o que, por el contrario, la atraviese. Es decir, según que la componente $v_n^\pm$ (3) normal a la superficie de discontinuidad, de la velocidad relativa del fluido con respecto a dicha superficie, sea respectivamente nula o distinta de cero.

En el primer caso, la velocidad relativa $\mathbf{v}_t^\pm$ del fluido en cada punto de la superficie de discontinuidad es, evidentemente, tangente a ella y la única condición de compatibilidad que resulta para esta clase de discontinuidades, llamadas generalmente «superficies de contacto», es la de que la presión sea continua a través de las mismas.

De ellas hemos visto numerosos ejemplos en los epígrafes 8 y 9 del capítulo .I

Por tanto, las superficies de contacto son superficies de posible discontinuidad de la velocidad relativa tangencial $\mathbf{v}_t^\pm \neq \mathbf{v}_t^\mp$, de la densidad, temperatura, etc., pero en las que se cumple la doble condición de ser:

$$\left. \begin{aligned} v_n^+ &= v_n^- = 0; \\ p^+ &= p^-. \end{aligned} \right\} \quad [1]$$

Si, por el contrario, la velocidad relativa normal $v_n^\pm$ es distinta de cero, entonces la superficie de discontinuidad se propaga, evidentemente, a través del fluido, por lo que aquella se dice que es una «onda», en cuyo caso el establecimiento de las condiciones de compatibilidad pone de manifiesto las siguientes conclusiones generales:

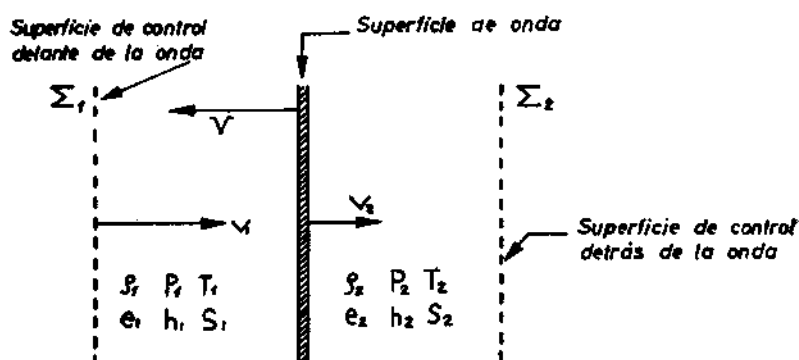
En primer lugar, la componente de la velocidad del fluido tangente a la superficie debe ser continua al atravesarla, es decir, debe cumplirse la condición

$$\mathbf{v}_t^+ = \mathbf{v}_t^-. \quad [2]$$

(2) F. A. WILLIAMS: *Combustion Theory*. Addison-Wesley Publ. Reading. Mass. y Londres, 1965.

(3) Se usa el doble índice +, — porque, por definición, la componente normal v_n de la velocidad, al igual que las restantes variables de fluido, puede tomar valores distintos a uno y otro lado de la superficie de discontinuidad.

En segundo lugar, las condiciones de compatibilidad en un punto de la superficie son independientes de que ésta sea plana o curva y de que el régimen del movimiento sea o no estacionario, por lo que tales condiciones pueden establecerse para el caso más sencillo de un movimiento unidimensional y estacionario, con un sistema de referencia ligado a la onda, como el que ilustra la figura II-1.



$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 = m$$

$$p_1 + m v_1 = p_2 + m v_2$$

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2$$

Fig. II-1.—Condiciones de Rankine Hugoniot a través de una onda.

En ella, v , ρ , p , T , e , h y S son, respectivamente, la velocidad, densidad, presión, temperatura absoluta, energía interna, entalpía y entropía del fluido y los subíndices 1 y 2 se refieren a los valores de las citadas magnitudes en las caras de entrada y salida de aquél a través de la onda, cuya velocidad de propagación V es, evidentemente:

$$V = -v_1. \quad [3]$$

Puesto que, como se indicó en el capítulo precedente, las superficies de discontinuidad solamente pueden producirse en fluidos ideales, es decir, en fluidos desprovistos de efectos de transporte dis-

pativo (viscosidad, conductividad térmica y difusión) (4) y en equilibrio termodinámico, la aplicación de los tres principios enunciados al comienzo a la masa de fluido de la figura II-1 delimitada por las superficies Σ_1 y Σ_2 resulta elemental, toda vez que es un sistema térmicamente aislado, sobre el que la única fuerza externa es la presión p (5), lo que conduce, como se comprueba de modo sencillo, a las siguientes condiciones de compatibilidad, llamadas habitualmente de Rankine-Hugoniot (6).

1. *Conservación de la masa:*

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv m. \quad [4]$$

2. *Conservación de la cantidad de movimiento:*

$$p_1 + m v_1 = p_2 + m v_2 \equiv p_0. \quad [5]$$

3. *Conservación de la energía:*

$$h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2 \equiv h_0. \quad [6]$$

(4) Una extensión de la teoría al caso de fluidos débilmente disipativos, mediante el desarrollo asintótico de las variables del proceso en función de un parámetro pequeño ϵ , que se reduce a cero en el caso de un fluido ideal, como aproximación de orden cero al fluido real ha sido efectuada por V. P. Germain y J. P. Guiraud en Francia, y simultánea e independientemente por Chow y Ting en los Estados Unidos. Tal desarrollo, sumamente laborioso, incorpora términos de corrección en las condiciones de compatibilidad de «orden cero» de la onda, así como de la curvatura de la superficie de discontinuidad. Ver P. GERMAIN y J. P. GUIRAUD: *Conditions de Choc et Structure des Ondes de Choc dans un Ecoulement Stationnaire de Fluides Dissipatif*. ONERA, Publ. núm. 105, año 1962, así como los «Comptes Rendus», vol. 250, año 1960, pág. 1965, y vol. 252, año 1961, pág. 1101, de los mismos autores; ídem id. R. R. CHOW y L. TING: *Higher Order Theory of Curved Shocks*. «*Journal of Aerospace Sciences*», Washington, 1961, págs. 428-30.

(5) Se suponen nulas las fuerzas de masa que solamente adquieren significación en el caso de algunas ondas de deflagración o en problemas de magnetohidrodinámica.

(6) Para una historia del establecimiento de las condiciones de Rankine, correspondientes a las «ondas de combustión», ver, por ejemplo, la obra citada de COURANT y FRIEDRICHs, págs. 118 y 204, respectivamente.

en donde m , p_0 y h_0 son tres constantes, de interpretación física inmediata.

Además, como el sistema es adiabático, pero el salto a través de la onda no es necesariamente reversible, existe la condición adicional,

$$S_1 \leq S_2, \quad [7]$$

como expresión de la Segunda Ley de la Termodinámica.

Por otra parte, puesto que el fluido está en equilibrio termodinámico, su entalpía está determinada por los valores de dos únicas variables termodinámicas; por ejemplo, por la presión p y la densidad ρ :

$$h = h(p, \rho), \quad [8]$$

con lo que las únicas variables del problema son los seis valores v_1 , ρ_1 , p_1 y v_2 , ρ_2 , p_2 de la velocidad, de la densidad y de la presión a uno y otro lado de la onda.

Por tanto, dados tres de tales valores de dichas variables, las tres condiciones [4], [5] y [6] de Rankine-Hugoniot determinan los tres restantes de una *posible* solución, toda vez que las condiciones de compatibilidad son, evidentemente, condiciones necesarias para la existencia de aquélla, pero nada autoriza, por el momento, a suponer que constituyen al mismo tiempo condiciones de suficiencia.

En particular, la condición independiente [7] es una exigencia complementaria que, salvo en el caso de reversibilidad, el cual puede presumirse habrá que excluir, marca una dirección privilegiada para el salto, excluyendo la opuesta.

Por otra parte, tampoco está claro cuál puede ser el criterio para fijar los valores de tres de las variables que hayan determinado el problema. Por ejemplo, está claro que puede fijarse arbitrariamente el estado termodinámico del gas delante de la onda, es decir, que pueden elegirse arbitrariamente los valores de ρ_1 y p_1 ; pero ya no lo es tanto el que además pueda fijarse el valor de la velocidad de propagación de aquélla o alguna de las variables detrás de la misma y que ello conduzca a soluciones que puedan darse realmente.

Todo lo cual habrá de esclarecerse mediante el análisis más detallado de las condiciones de compatibilidad y de las propiedades termodinámicas del medio, de un lado, y mediante el estudio de la es-

estructura interna de las ondas, que se llevará a cabo en los capítulos siguientes, del otro.

En cuanto a las restantes variables de estado, la energía interna e se relaciona con la entalpía mediante la expresión:

$$e = h - \frac{p}{\rho} \quad [9]$$

y la temperatura absoluta T se expresa en función de la presión y de la densidad mediante la ecuación de estado

$$T = f(p, \rho). \quad [10]$$

Por último, como enseña la Termodinámica, la entropía S se relaciona con las restantes magnitudes mediante la expresión:

$$T dS = dh - \frac{1}{\rho} dp = e + p d\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad [11]$$

Para efectuar el estudio del conjunto de los estados termodinámicos del fluido detrás de la onda, que son compatibles con unas condiciones termodinámicas dadas delante de ella, resulta ventajoso operar en el plano de la presión p y del volumen específico $\frac{1}{\rho}$.

Esto se consigue mediante la eliminación de las velocidades v_1 y v_2 , entre las tres ecuaciones [4], [5] y [6], con lo que se obtiene la siguiente relación, llamada habitualmente de Hugoniot:

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (p_2 - p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_1} \right), \quad [12]$$

la cual, en virtud de la relación [9], puede escribirse también en la forma

$$e_2 - e_1 = -\frac{1}{2} (p_2 + p_1) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right). \quad [13]$$

Por otra parte, la combinación de [4] y [5] proporciona la relación

$$m^2 = - \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}}, \quad [14]$$

de la que se hará uso más adelante.

Para cada valor de m , esta ecuación define una recta de pendiente

$$\operatorname{tg} \theta = -m^2, \quad [15]$$

llamada de Rayleigh en la literatura anglosajona y de Mikhelson en la soviética.

Por consiguiente, dado el estado termodinámico inicial del gas, el cual queda determinado por los valores p_1 y $\frac{1}{\rho_1}$, cada posible solución de la onda se encuentra en el punto de intersección de una recta de Rayleigh, definida por el valor del parámetro m , o, lo que es lo mismo, en virtud de [3] y [4], por el valor de la velocidad V de propagación de la onda, con la curva de Hugoniot definida por [12].

La curva de Hugoniot definida por [12] o [13] contendrá o no el punto $\left(p_1, \frac{1}{\rho_1}\right)$ correspondiente al estado inicial, según que se pueda o no pasar mediante una sucesión continua de estados de equilibrio, del valor h_2 al h_1 , o bien, lo que es lo mismo, de e_2 a e_1 .

Las ondas de la primera naturaleza se llaman «ondas de choque» (7) y las de la segunda, caracterizadas porque en el salto se produce una transformación química exotérmica, irreversible, «ondas de combustión» (8).

Por último, la combinación de [11], [12] y [14] proporciona la

(7) Las de expansión, opuestas a las de choque, no pueden existir, como veremos, en virtud de la condición [7].

(8) Para una discusión sobre la posible existencia de ondas llamadas de «condensación», que se excluyen del presente trabajo, ver la referencia de W. HAYES, que se menciona en la página 20.

siguiente expresión para la variación de la entropía dS a lo largo de la curva de Hugoniot:

$$T dS = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)^2 dm^2. \quad [16]$$

Esta expresión demuestra que las variaciones de la entropía y de la pendiente de la recta de Rayleigh tienen signos opuestos y que sus extremos coinciden, propiedades que resultan de interés para lo que sigue, en virtud de la condición [7].

Antes de seguir adelante con el análisis de las propiedades de las condiciones de compatibilidad, a título de ejemplo sencillo y para ilustrar en términos concretos lo que acaba de exponerse, vamos a considerar el caso de un gas perfecto, cuya composición química se mantiene constante sobre la curva de Hugoniot, de tal modo que las variaciones termodinámicas que experimente sean solamente las correspondientes a las de la presión y de la densidad, suponiendo, además, que el calor específico es constante (9).

En este caso, la ecuación de estado [10] se reduce a la de los gases perfectos

$$\frac{p}{\rho} = R T, \quad [15]$$

en donde es

$$R = \frac{R_0}{W}, \quad [16]$$

siendo R_0 la constante universal de los gases y W el peso molecular del gas, el cual no varía, puesto que la composición del mismo permanece inalterable por hipótesis.

Asimismo, la entalpía [8] del gas adopta la forma

$$h = C_p T + h^0, \quad [17]$$

(9) Para el estudio más detallado de este caso, ver, por ejemplo, la obra de WILLIAMS citada en la pág. 2, págs. 23 y sigts., o bien la de R. A. STREHLOW: *Fundamentals of Combustion*. Int. Textbook Co. Scranton, Penn., 1968; páginas 149 y sigts., así como la de GREENE y TOENNIES, que se cita en las págs. 18 y 20 y sigts.

donde C_p es el calor específico a presión constante, que se supone invariable, y h^0 es la entalpía de formación del gas a la temperatura de 0°K .

En virtud de la relación [15], esta expresión puede escribirse también en la forma

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + h^0, \quad [18]$$

en donde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ es la relación entre los calores específicos del gas, la cual es también constante, puesto que, como es sabido, se cumple la condición $C_p - C_v = R$.

Por consiguiente, al introducir esta expresión en la relación [12] de Hugoniot, empleando las variables adimensionales $\zeta = \frac{p_2}{p_1}$ y $\eta = \frac{1/\rho_2}{1/\rho_1}$, dicha relación se reduce a la ecuación

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \zeta \eta - \zeta + \eta = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \alpha, \quad [19]$$

en donde

$$\alpha = -\frac{h_1^0 - h_2^0}{p_1/\rho_1} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \cdot \frac{h_1^0 - h_2^0}{c_p T_1} \quad [20]$$

es un parámetro adimensional que mide el calor liberado en la reacción química a través del salto, en función de la entalpía térmica $C_p T_1$ de los gases delante de la onda (10).

Por consiguiente, la curva de Hugoniot es una hipérbola que pasa por el punto inicial $\left(p_1, \frac{1}{\rho_1}\right)$ en el caso $\alpha = 0$ de una onda adiabática y queda por encima de ésta en el caso $\alpha > 0$ de una onda de combustión, según ilustra el gráfico de la figura II-2 (11).

(10) En el caso $\alpha \neq 0$ se supone, además, que la relación γ de calores específicos es la misma delante y detrás de la onda.

(11) Evidentemente sólo tiene significación física la rama contenida en el primer cuadrante $\zeta > 0$, $\eta > 0$.

Por otra parte, la condición [14] se reduce en este caso a la ecuación

$$M_1^2 = - \frac{1}{\gamma} \frac{\zeta - 1}{\eta - 1} = - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\gamma} . \quad [21]$$

En ella,

$$M_1^2 = \frac{v_1^2}{a_1^2} = \frac{V^2}{a_1^2} \quad [22]$$

es el número de Mach de la velocidad de propagación de la onda, puesto que

$$a_1^2 = \gamma \frac{p_1}{\rho_1} \quad [23]$$

es la velocidad de propagación del sonido en el gas que se encuentra delante de ella y θ es el ángulo de la recta que une los dos puntos correspondientes a los estados termodinámicos del gas delante y detrás de la onda, como muestra la figura II-2.

En cuanto a la variación de la entropía sobre la curva de Hugoniot, respecto de la del estado inicial, está dada por la expresión:

$$\frac{S_2 - S_1}{c_v} \equiv \sigma = L_n \zeta + \gamma L_n \eta, \quad [24]$$

donde ζ debe expresarse en función de η mediante [19].

En el caso $\alpha = 0$ en que no se produce liberación química de calor en el salto, la rama AC corresponde a una onda de compresión: la onda de choque y la AB a una onda de expansión.

Sin necesidad de recurrir a la expresión explícita [24] para la variación de la entropía a lo largo de la curva de Hugoniot, la ecuación [16], al tener en cuenta la forma de la curva BC y el significado de m^2 dado por la expresión [14], muestra que la entropía crece

sobre la rama AC de compresión y disminuye sobre la AB de expansión (12).

Por consiguiente, en virtud de la condición [7], los saltos de expansión no pueden existir.

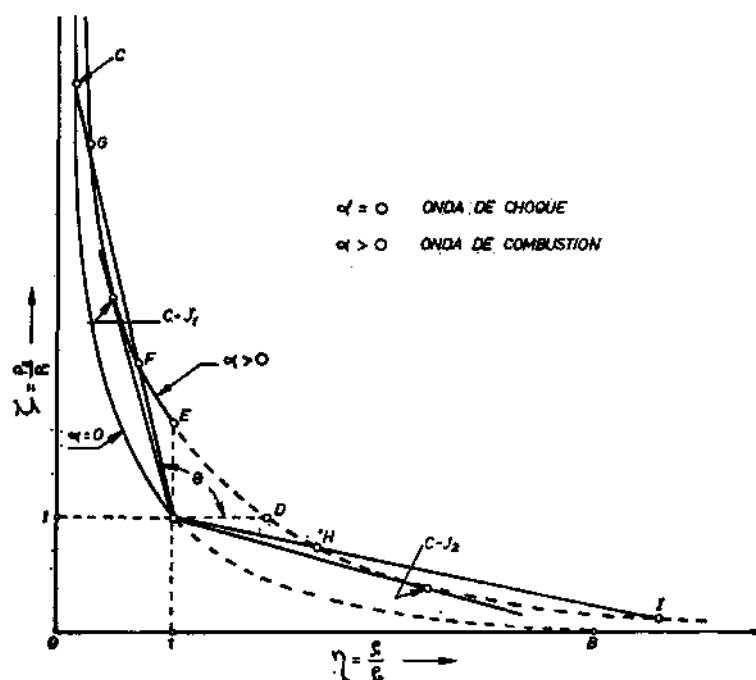


Fig. II-2.—Diagrama de Hugoniot en el caso de un gas perfecto de composición constante.

Por otra parte, la pendiente de la tangente a la curva de Hugoniot en el punto A, donde la intensidad del salto es nula, es γ , como se comprueba fácilmente. Por tanto, se ve en la figura II-2 que, en cualquier otro punto de la rama de compresión AC, la pendiente de la recta de Rayleigh es mayor que γ , o bien, en virtud de la expresión [21], que $M_1^2 > 1$, es decir, que la velocidad de propagación de toda onda de choque es supersónica.

Análogamente se comprueba que, por el contrario, siempre se

(12) Se demuestra que la variación de entropía en el entorno del punto A es un infinitésimo de tercer orden.

cumple la condición $M_2^2 < 1$, es decir, que la velocidad de los gases detrás de la onda es siempre subsónica (13).

En cuanto a la unicidad de la solución, dados el estado termodinámico inicial y, además, la velocidad de propagación o uno de los valores detrás de la onda, queda garantizada por el carácter monótono de la rama AC.

Pasando ahora a considerar las ondas de combustión, representadas por la curva de Hugoniot $\alpha > 0$ de la figura II-2, una primera conclusión del signo negativo del segundo miembro de [14] es que $(\xi - 1)$ y $(\eta - 1)$ deben tener signos opuestos, lo cual excluye el tramo DE de la curva.

De los dos tramos que restan, el EG de compresión corresponde a las ondas llamadas de detonación, mientras que el DI de expansión corresponde a las llamadas ondas de deflagración.

Como muestra la figura, las ondas de detonación se caracterizan por un aumento de la presión y de la densidad, lo que lleva consigo una reducción de la velocidad de los gases.

Por el contrario, en las deflagraciones se produce una disminución de la presión, una reducción de la densidad y, consiguientemente, una aceleración de los gases.

Es claro que en ambos casos se produce un aumento de la temperatura.

Además, y por la misma razón que se vio en el caso de las ondas de choque, la velocidad de propagación de las ondas de detonación es siempre supersónica, mientras que, por el contrario, la de las ondas de deflagración es siempre subsónica.

Dos puntos especialmente importantes son los de tangencia de las dos rectas de Reyleigh que muestra la figura, con las ramas de detonación y de deflagración respectivamente. Tales puntos, CJ_1 y CJ_2 , se llaman de Chapman-Jouguet, y están caracterizados por la doble propiedad de que la velocidad de propagación de la onda es mínima en el correspondiente a las detonaciones y máxima en el de las deflagraciones, como resulta de la figura y de la relación [14].

(13) La relación entre M_1^2 y M_2^2 está dada por la expresión

$$M_2^2 = \frac{\frac{2}{\gamma - 1} + M_1^2}{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1}.$$

y de que en ambos casos la velocidad de los gases quemados es sónica.

Para demostrar esta última propiedad, que como muchas de las anteriores es independiente de que el fluido sea o no un gas perfecto (14), es suficiente tener presente que la condición de tangencia se expresa por la relación:

$$\frac{d\zeta}{d\eta} = \frac{\zeta - 1}{\eta - 1}, \quad [25]$$

que también puede escribirse en la forma

$$\frac{d \frac{p_2}{1}}{d \frac{1}{\rho_2}} = - \rho_2^2 \frac{d p_2}{d \rho_2} \frac{p_2 - p_1}{\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}}, \quad [26]$$

lo que conduce, en virtud de [14], a la conclusión:

$$v_2^2 = \frac{d p_2}{d \rho_2}. \quad [27]$$

Ahora bien, al combinar [11] con [12] y tener en cuenta la condición [26] se comprueba que en dichos puntos la entropía satisface la condición

$$d S_2 = 0. \quad [28]$$

Por tanto, los puntos de Chapman-Jouguet son extremos (15) para la variación de la entropía sobre la curva de Hugoniot y la derivada [27] es isentrópica, lo que significa que la velocidad de los gases quemados coincide con la del sonido detrás de la onda:

$$v_2^2 = a_2^2. \quad [29]$$

(14) Este ejemplo de desarrollo tiene la ventaja de ilustrar la clase de razonamientos que permiten generalizar las propiedades que estamos estudiando, como veremos después, a otros medios distintos de los gases perfectos.

(15) Concretamente se demuestra que el punto de Chapman-Jouguet es un mínimo para la variación de la entropía sobre la curva de Hugoniot en las detonaciones y un máximo en las deflagraciones.

Análogamente se demuestra que la velocidad de los gases quemados es subsónica en las detonaciones fuertes y supersónica en las débiles, así como que dicha velocidad es subsónica en las deflagraciones débiles y supersónica en las fuertes.

En particular y por lo que respecta a la velocidad de propagación de las ondas de Chapman-Jouguet en el caso de un gas perfecto con γ constante, el número de Mach correspondiente a las mismas está dado por la siguiente expresión, como puede comprobarse fácilmente (16):

$$M_1 = \left[1 + \frac{\alpha (\gamma^2 - 1)}{2 \gamma} \right]^{1/2} \pm \left[\frac{\alpha (\gamma^2 - 1)}{2 \gamma} \right]^{1/2}, \quad [30]$$

en donde el signo positivo corresponde a las detonaciones y el negativo a las deflagraciones.

Por último, en cuanto a la clase de detonaciones fuertes, débiles o de Chapman-Jouguet que existen realmente entre las que acabamos de considerar, las propiedades termodinámicas y las condiciones del salto no permiten, por sí solas, decidir sobre la cuestión, que sólo puede esclarecerse a la vista de las características internas de la onda y de las condiciones del experimento que la origina.

Las conclusiones más importantes son las siguientes:

En los experimentos de detonaciones que se propagan espontáneamente, como ocurre, por ejemplo, con una mezcla detonante en el interior de un tubo, la detonación es del tipo de Chapman-Jouguet, cuya existencia se ha justificado por ser mínima la entropía (17) y porque, al ser sónica la velocidad de los gases quemados, las perturbaciones que se originen detrás de la onda, las cuales se propagan a la velocidad del sonido, no pueden alcanzarla y, por tanto, no modifican su estructura.

También pueden producirse, y de hecho se producen experimentalmente en condiciones adecuadas, detonaciones fuertes.

Tampoco se opone nada a que puedan obtenerse detonaciones débiles, pero para ello ha de tratarse de mezclas explosivas que reúnan condiciones especiales.

Por lo que respecta a las deflagraciones, todas las que se conocen

(16) Ver F. A. WILLIAMS, ya citado, págs. 81.

(17) Ver la obra de JAUMOTTE que se cita en la referencia de la página 1 del capítulo IV, págs. 199 y sigts.

son débiles, muy próximas al punto D de combustión a presión constante y con una velocidad de propagación única para cada mezcla combustible de composición y estado dados, siendo imposibles las deflagraciones fuertes. Por todo esto sólo puede justificarse debidamente mediante el análisis de la estructura interna que se llevará a cabo en los capítulos siguientes.

Si bien hemos utilizado el ejemplo de un gas perfecto de calor específico constante para ilustrar la teoría de las ondas de choque y combustión, es claro que en la realidad las cosas son considerablemente más complicadas y ello por dos razones.

La primera porque, si bien en muchos problemas de interés, las condiciones del gas delante de la onda se asemejan a las citadas, detrás de ella no ocurre lo mismo.

Ocurre, efectivamente, que si bien en muchos casos es válida la hipótesis de que el fluido detrás de la onda se comporta como un gas perfecto, lo que permite aplicarle las ecuaciones [15] y [17], sin embargo, es necesario tomar en consideración en los cálculos las variaciones sobre la curva de Hugoniot del calor específico C_p y del peso molecular W , las cuales pueden llegar a ser muy importantes como consecuencia del desplazamiento del equilibrio termodinámico y químico a lo largo de aquélla.

Concretamente, en las ondas de choque muy fuertes, como las que se dan en las explosiones y en los movimientos hipersónicos, cuestiones ambas que ofrecen hoy gran interés científico y tecnológico, las temperaturas que produce la compresión son tan elevadas que los efectos de vibración molecular, disociación, excitación electrónica, ionización e incluso las reacciones químicas entre las diversas especies que forman la mezcla si, como ocurre por ejemplo en el aire, no se trata de un gas puro, alcanzan gran importancia, distorsionando considerablemente la curva de Hugoniot con respecto a la del caso ideal que acabamos de considerar (18).

Análogamente, en las ondas de combustión hay que tomar en consideración el desplazamiento sobre la curva de Hugoniot del equilibrio químico de los productos de combustión al variar la densidad y la presión de los gases quemados, porque la composición de los mis-

(18) Para un análisis más detenido de esta cuestión, ver el capítulo IV, así como E. F. GREENE y J. P. TOENNIES: *Chemical Reactions in Shock Waves*. E. Arnold Publ., Londres, 1964, págs. 81 y sigts.

mos cambia considerablemente a lo largo de la citada curva, alterando de modo sustancial su trazado (19).

Por otra parte, tanto las ondas de choque como las de combustión se producen también en otras muchas sustancias, además de los gases, cuyas propiedades termodinámicas difieren de las de éstos (20).

Por ello se ha planteado la cuestión de investigar el comportamiento de tales ondas bajo hipótesis muy generales sobre las propiedades termodinámicas de las sustancias en que se producen.

No es propósito del presente trabajo desarrollar esta teoría completa, por lo que nos limitaremos a señalar aquí que, efectivamente, se demuestra que para una clase muy general de sustancias desde el punto de vista termodinámico, entre las que se incluyen desde luego todas las que interesan en la Mecánica de Fluidos, son válidas las conclusiones que se han extraído en el caso particular de los gases perfectos, sobre los diversos tipos de ondas, así como en cuanto a su clasificación y propiedades relativas a la existencia y régimen del movimiento propios de cada una de ellas.

Sí creemos, no obstante, que tiene interés matemático el análisis de las hipótesis de partida y de los procedimientos que se aplican para extraer las anteriores conclusiones, a cuyo efecto remitimos al lector a los trabajos de Bethe (21), Courant y Friedrichs (22), Weyl (23) Cowan (24) y Hayes (25). Particularmente se recomien-

(19) Ver, por ejemplo, C. L. EISEN, R. A. GROSS y T. S. RIVLIN: *Theoretical Calculations in Gaseous Detonation*. «Comb. and Flames», 1960, págs. 137-47.

(20) Ver, por ejemplo, para las ondas de choque, la obra de JAUMOTTE, ya mencionada, y la de ZELDOVICH y RAIZER, que se cita en la referencia de la página 1 del capítulo IV. Para las detonación, el reciente trabajo de S. H. LIN y H. EYRING: *Detonation*, del «Annual Rev. of Physical Chemistry», 1970, páginas 225-64 de la «Annual Rev. Inc.», Palo Alto, Calif., donde se da abundante bibliografía.

(21) H. A. BETHE: *The Theory of Shock Waves for an Arbitrary Equation of State*. OSRD, Rept. 545, año 1942, USA.

(22) Referencia de la página 1, páginas 141 para ondas de choque y 204 para ondas de combustión.

(23) H. WEYL: *Shock Waves in Arbitrary Fluids*. «Comm. Pure Appl. Math.», 1949, págs. 103-22.

(24) R. D. COWAN: *Properties of the Hugoniot Function*. «Phys. Rev.», 1953, pág. 1079, y «Jour. Fluid Mech.», 1957, págs. 531-45.

(25) W. D. HAYES: *The Basic Theory of Gasdynamic Discontinuities*, Sec. D, págs. 416 y sigts. de *Fundamentals of Gas Dynamics*, vol. III de «High Speed Aerod. and Jet Prop.», Oxford Univ. Press, 1958.

dan el de Cowan, que desarrolla una exposición geométrica muy ilustrativa y el de Hayes, por ser el más completo y sistemático.

En definitiva, puesto que la forma de la curva de Hugoniot está determinada por el comportamiento termodinámico de la materia en que tiene lugar el proceso, tales condiciones deben referirse a las propiedades termodinámicas del medio, es decir, deben expresarse como condiciones a cumplir por las funciones termodinámicas del mismo o por sus derivadas.

Condiciones muy generales establecidas por Bethe y Weil, para un comportamiento «normal» de fluido son, por ejemplo, las tres siguientes (26):

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s < 0; \left(\frac{\partial^2 p}{\partial v^2}\right)_s > 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_v > 0. \quad [31]$$

en donde excepcionalmente v designa el volumen específico (27). Tales condiciones han sido «suavizadas» en el trabajo de Hayes ya citado.

Para terminar la exposición de este capítulo es necesario aludir, por un momento, a los problemas que plantea el cálculo de la curva de Hugoniot en un caso real y la determinación sobre la misma de puntos especiales, tales como, por ejemplo, los de Chapman-Jouguet.

Se trata, en definitiva, de construir por puntos, puesto que en general se carece de una expresión analítica para la misma, la curva definida por la ecuación [12] para un par de valores dados del estado inicial $\left(p_1, \frac{1}{\rho_1}\right)$, teniendo presente que la entalpía es una función de

estado de la forma [8], puesto que en cada punto $\left(p_2, \frac{1}{\rho_2}\right)$ de la misma el gas está en equilibrio termoquímico.

Ahora bien, dicho gas está formado, en general, por una mezcla de especies químicas distintas en los casos de ondas de combustión o de ondas de choque en mezclas de gases; o bien para una única especie en los casos de ondas de choque en gases puros, pero con

(26) Ver, por ejemplo, H. D. GRUSCHKA y F. WECKEN: *Gasdynamic Theory of Detonation*, Gordon and Breach, Sc. Publ., New York, 1971, págs. 20 y sigts.

(27) En general, en toda la exposición se elude el empleo del volumen específico en beneficio de la densidad, porque ésta es una variable más idónea para las ecuaciones del movimiento.

grados de libertad internos excitados, tales como la disociación, ionización, etc., de sus moléculas, en proporciones determinadas por las leyes del equilibrio termodinámico.

Por consiguiente, la primera cuestión que se plantea es el conocimiento de los valores de las funciones termodinámicas necesarias para el cálculo, tales como el calor específico, la entalpía, la entropía y la ecuación de estado de las diversas sustancias y de las mezclas, bajo condiciones dadas de la presión y de la densidad (o de otra variable de estado; por ejemplo, de la temperatura), con el grado de aproximación requerido y para intervalos suficientemente amplios de dichas variables de estado (28).

Para cubrir esta necesidad se han llevado a cabo tabulaciones muy extensas de funciones termodinámicas, combinando procedimientos de cálculo teóricos y experimentales, de las que existe una bibliografía muy completa.

En particular, debe hacerse referencia a las tablas JANAF (29) de las Fuerzas Armadas de los Estados Unidos, porque son muy extensas, actuales y completas.

Una aplicación de las mismas, de interés en problemas de combustión, mediante el empleo de calculadoras electrónicas, ha sido desarrollada recientemente por Prothero (30).

En segundo lugar, y supuesto el conocimiento de las funciones termodinámicas requeridas, se plantea la cuestión de determinar la composición de equilibrio de una mezcla de sustancias dada, para condiciones de estado (presión y densidad o temperatura) determinadas, problema naturalmente básico en numerosos aspectos de los procesos de combustión.

La resolución de los problemas de equilibrio termoquímico no ofrece dificultad conceptual alguna, puesto que la solución está de-

(28) Ver, por ejemplo, H. N. POWELL y S. N. SUCIN: *Survey of the Thermodynamic Properties of $C_n H_{2n}$ — Air Combustion Gases*, «Proc. Gas Dyn. Symp. Aerothermochemistry», Evanston, Ill., USA, 1956, págs. 273-81, para un ejemplo interesante de gases de combustión, y V. STUPOCHENKO, E. V. SAMUILOV, A. S. PLESHANOV, I. B. ROZHDETSVENSKY e I. P. STAKHANOV: *Thermodynamic Properties of Air at High Temperatures*, «Eighth Symp. Comb.», 1962, págs. 688-97, para ondas de choque.

(29) *JANAF Thermochemical Tables*, Clearinghouse for Federal, Scientific and Technical Information, USA, PB 168370, 1965 y sucesivos Adenda.

(30) A. PROTHERO: *Computing with Thermochemical Data*, «Comb. and Flame», 1969, págs. 399-408.

terminada por la doble condición (31) de que en el proceso se conserven las cantidades de los diversos elementos químicos que forman las distintas especies y de que se cumpla la «Ley de Acción de Masas» que determina la composición química en el estado de equilibrio.

Ambas condiciones permiten, efectivamente, establecer un sistema de tantas ecuaciones independientes como especies químicas distintas existen en la mezcla.

Dichas ecuaciones son de dos clases: las que resultan de expresar la conservación de los elementos químicos son, evidentemente, ecuaciones lineales de la forma:

$$\sum_j a_{ij} X_j = c_i, \quad [32]$$

entre las fracciones X_j máscas o molares de las diversas especies.

Por el contrario, las que resultan de la Ley de Acción de Masas son ecuaciones no lineales de la forma:

$$\prod_j p_j^{a_{ij}} = K_i(T) \quad [33]$$

entre las presiones parciales (32) p_j de las diversas especies.

En esta ecuación, $K_i(T)$ es la constante de equilibrio correspondiente a la i -ésima reacción química

$$\sum_j \alpha_{ij} A_j \rightleftharpoons 0 \quad [34]$$

entre las especies A_j , donde α_{ij} son coeficientes estequiométricos de la reacción [34].

Los valores de las constantes de equilibrio correspondientes a las reacciones [34] los proporcionan las tablas de funciones termoquímicas (33).

Ahora bien, incluso en los casos más sencillos ocurre que el nú-

(31) Ver, por ejemplo, M. BARRERE y R. PRUD'HOMME: *Equations Fondamentales de l'Aerothermochimie*. Masson et Cie., 1973, págs. 132 y sgtes. También la obra de GRUSCHKA y WECKEN, citada en las páginas 20 y 103-11.

(32) Si la mezcla no puede tratarse como un gas perfecto, la presión parcial hay que sustituirla por la «fugacidad» de la especie.

(33) Ver las tablas JANAF antes citadas.

mero de ecuaciones es bastante elevado y como además es preciso determinar un cierto número de puntos, el cálculo de tales problemas resulta, en general, muy laborioso, si bien el uso de calculadoras electrónicas ha permitido aliviar esencialmente la situación durante los últimos años.

Por ejemplo, la resolución de un sistema que contenga carbono, hidrógeno, oxígeno y nitrógeno, por tanto muy frecuente en los problemas prácticos de combustión, obliga a tomar en consideración, para un cálculo preciso, al menos las once especies químicas siguientes: anhídrido carbónico, CO_2 ; óxido de carbono CO ; nitrógeno molecular, N_2 ; nitrógeno atómico, N ; agua, H_2O ; hidrógeno molecular, H_2 ; hidrógeno atómico, H ; oxígeno molecular, O_2 ; oxígeno atómico, O ; radical oxhidrilo, OH ; y monóxido de nitrógeno, NO .

Por tanto, se trata de resolver un sistema de once ecuaciones, de las cuales cuatro son lineales de la forma [32]: las correspondientes a los cuatro elementos C, O, H, N; y siete son no lineales, de la forma [33] (34).

Ante una situación de esta naturaleza, es claro que está justificado un esfuerzo de sistematización en la formulación y tratamiento del problema, que permita simplificarlo todo lo posible, así como el desarrollo de métodos aproximados de resolución mediante procedimientos de iteración o de otra naturaleza y todo ello en forma idónea para la utilización rutinaria de los calculadores electrónicos.

Ese esfuerzo se ha llevado a cabo, en efecto, especialmente a partir de la Segunda Guerra Mundial, lo que permite disponer en la actualidad de formulaciones y de procedimientos muy generales y de gran utilidad, así como de un gran número de resultados de su aplicación a muchos casos de interés tecnológico (35).

En especial, deben mencionarse los trabajos de Brinkley (36),

(34) Ver, por ejemplo, STREHLOW, ya citado, págs. 139 y sigts., o BRINKLEY, que se menciona más adelante, págs. 73 y sigts.

(35) Para una bibliografía reciente ver, por ejemplo, las obras de BARRERE-PRUD'HOMME y de STREHLOW, ya citadas, así como el trabajo de R. CHEVANCE: *Contribution au Calcul des Equilibres Chimiques en Phase Gazeuse Homogene*. Dir. Techn. des Armements Terrestres, París 9904/CEPA-RA, 1966.

(36) S. R. BRINKLEY: *Computational Methods in Combustion Calculations*. Volumen II de la Enciclopedia de Princeton, págs. 64-96, donde además se incluye bibliografía para casos más generales que el que nos interesa aquí.

Huff et al. (37) y White et al. (38), quienes resuelven el problema por aplicación de diversos procedimientos de iteración.

Aplicaciones posteriores, especialmente concebidas para el uso de calculadoras electrónicas, han sido desarrolladas, entre otros, por Anthony y Himmelblau (39) y por White (40).

Por último, el desarrollo de métodos especiales para la aplicación de todo ello al cálculo de las curvas de Hugoniot, especialmente en el caso de las detonaciones, así como al de los puntos de Chapman-Jouguet en sistemas de interés tecnológico, ha sido objeto de numerosos trabajos durante los últimos años, entre los que deben mencionarse, además del de Eisen, Gross y Rivlin ya citado en la página 18, los de Bollinger y Edse (41), Zeleznik y Gordon (42), Brinkley y Seely (43) y Zajac y Oppenheim (44).

(37) V. N. HUFF, S. GORDON y V. S. MORRELL: *General Method and Thermodynamic Tables for Computation of Equilibrium*. «NACA Tech. Rept.», 1037. año 1951.

(38) W. B. WHITE, S. M. JOHNSON y G. B. DANTZING: *Chemical Equilibrium in Complex Mixtures*. «Jr. Chem. Phys.», 1958, págs. 751-55.

(39) R. G. ANTHONY y D. M. HIMMELBLAU: *Calculation of Complex Chemical Equilibria by Search Techniques*. «Jour. Phys. Chem.», 1963, págs. 1080-83.

(40) W. B. WHITE: *Numerical Determination of Chemical Equilibrium and the Partitioning of Free Energy*. «Jour. Chem. Phys.», 1967, págs. 4171-75.

(41) L. E. BOLLINGER y R. ELSE: *Thermodynamic Calculations of Hydrogen-Oxygen Detonation Parameters for Various Initial Pressures*. «Am. Rock. Soc. Jour.», 1961, págs. 251-6.

(42) J. ZELEZNIK y S. GORDON: *Calculation of Detonation Properties and Effect of Independent Parameters on Gaseous Detonations*. «Am. Rock. Soc. Jour.», 1962, págs. 606-15.

(43) S. R. BRINKLEY y L. B. SEELY: *Construction of the Hugoniot Curve and Calculation of the Chapman-Jouguet Points for General Equations of State*. «Comb. and Flame», 1969, págs. 506-10.

(44) L. J. ZAJAC y K. OPPENHEIM: *Thermodynamic Computations for the Gasdynamic Analysis of Explosion Phenomena*. «Comb. and Flame», 1969, páginas 537-50.

CAPÍTULO III

ECUACIONES DE ESTRUCTURA DE LAS ONDAS DE CHOQUE Y COMBUSTION

El problema fundamental en el estudio de la estructura interna de las ondas de choque y de combustión consiste en el análisis de las posibles soluciones de las ecuaciones de la Aerotermodinámica correspondientes a un movimiento unidimensional y estacionario, en un intervalo indefinido en los dos sentidos, cuyas condiciones en los límites se identifican en ambos extremos con las del gas en cada una de las dos caras de la discontinuidad de orden cero correspondiente a la onda, cuyo estudio ha constituido el objeto del capítulo anterior.

A este modelo se llega adoptando un sistema de referencia ligado a la discontinuidad, cuya normal en el punto considerado determina la dirección del movimiento unidimensional estacionario correspondiente a la estructura interna de la onda en él.

A título de ejemplo, la figura III-1 ilustra el comportamiento del campo de velocidades en el caso de una discontinuidad normal que acelera el gas al atravesarla, como ocurre en las ondas de combustión.

El esquema a) muestra la superficie de discontinuidad, el sistema de referencia adoptado en el entorno del punto O donde se quiere estudiar la estructura interna de aquélla y las componentes normal y tangencial de la velocidad a uno y otro lado de la onda.

El esquema b) ilustra la distribución supuesta de la componente v_n de la velocidad sobre la normal $\mathbf{n}$ a la onda, a uno y otro lado de ésta, en un entorno del punto O en el que se produce el salto. El ejemplo corresponde, como puede verse, al caso de un movimiento de velocidad decreciente en el sentido de la corriente, a ambos lados de la onda.

El esquema c) ilustra el verdadero comportamiento de la distribución de velocidades cuando se toma en consideración lo que realmente ocurre en el interior de la onda, cuyo espesor δ se reduce a cero al convertirla en una discontinuidad, porque es muy pequeño con respecto a la longitud característica del movimiento en cuyo seno

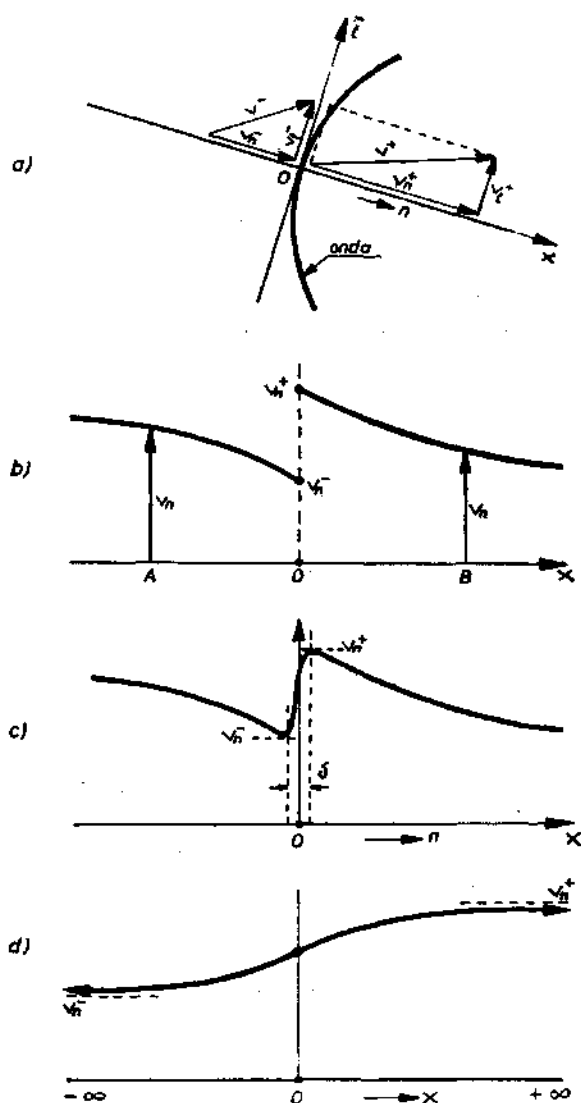


Fig. III-1.—Descripción esquemática de la estructura interna de una discontinuidad normal.

se forma la onda. Ello da lugar a que el gradiente de la componente normal de la velocidad en el interior de la onda, cuyo orden de magnitud es $\frac{v_n^+ - v_n^-}{\delta}$, sea mucho mayor que el valor de dicho gradiente en el campo del movimiento exterior a la misma.

Finalmente, el esquema d) muestra el modelo que se adopta para el análisis de la estructura interna de la onda. En este modelo, el espesor abarca todo el espacio $-\infty < x < +\infty$, de tal modo que la distribución de la componente normal de la velocidad tiende asintóticamente a los valores v_n^+ y v_n^- en ambos extremos, como ilustra la figura.

Por lo demás, es claro que podrían hacerse consideraciones análogas sobre las distribuciones de la densidad, presión, temperatura o composición del gas en el entorno de la superficie de discontinuidad.

Evidentemente la transferencia del esquema c) al d) implica un paso al límite de tipo similar al que conduce a las ecuaciones de Prandtl en la fecunda Teoría de la Capa Límite, que estudia la estructura interna de las discontinuidades tangenciales de orden cero en fluidos de poca viscosidad y que consideramos en los epígrafes 10 al 12 del capítulo I.

Dicho esto y con objeto de ilustrar el tipo de problema matemático que plantea el estudio de la estructura interna de las ondas de choque y de combustión, vamos a formular a continuación aquel problema, para el caso sencillo de un gas perfecto formado por una mezcla de dos únicas especies químicas, de igual peso molecular: reactivos y productos, que se transforman íntegramente la una en la otra mediante una reacción química irreversible.

Adoptando un sistema de referencia ligado a la onda como el que muestra la figura III-1 y teniendo presente que el movimiento es unidimensional y estacionario, así como las hipótesis de simplificación que acabamos de enunciar, el sistema diferencial correspondiente, que se reduce a uno de ecuaciones ordinarias puesto que la única variable independiente es x , se obtiene fácilmente particularizando al caso el sistema general de ecuaciones en derivadas parciales de la Aerotermodinámica (1).

(1) Ver, por ejemplo, el volumen III de la Enciclopedia Princeton, citada en reiteradas ocasiones.

Sin embargo, tal sistema se puede obtener también directamente mediante la aplicación de los principios de conservación de la masa, de las especies químicas, de la cantidad de movimiento y de la energía, al flujo de cada una de estas magnitudes a través de una sección de área unidad normal a la dirección del movimiento en el punto de abscisa x .

Ello tiene la ventaja de ofrecer la interpretación física inmediata de cada ecuación y de proporcionar un sistema de primer orden, cuyas ecuaciones son integrales primeras de las del movimiento propiamente dichas y cuyas constantes de integración miden precisamente los flujos de las magnitudes cuya conservación expresa el sistema.

Concretamente, con la notación habitual, la conservación de la masa se expresa mediante la ecuación:

$$\rho v = m. \quad [1]$$

Análogamente, la conservación de la cantidad de movimiento se expresa por la ecuación:

$$-\frac{4}{3}\mu \frac{dv}{dx} + p + \rho v^2 = p_0, \quad [2]$$

siendo μ el coeficiente de viscosidad de la mezcla (2).

Asimismo, la conservación de la energía se expresa mediante la ecuación:

$$-\lambda \frac{dT}{dx} + m \left(C_p T + \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{4}{3} \mu v \frac{dv}{dx} - m q \epsilon = h_0. \quad [3]$$

en donde λ es el coeficiente de conductividad térmica de la mezcla y ϵ es la fracción del flujo de productos de la combustión que pasa a través de la unidad de sección en el punto x y las demás variables tienen el significado atribuido en el capítulo anterior.

(2) Se supone que el coeficiente de viscosidad de volumen μ' es nulo. En rigor, esto ocurre solamente en gases monoatómicos diluidos. En gases poliatómicos μ' es pequeño frente a μ , pero no nulo, y su valor depende de los tiempos de relajación de los grados internos de libertad de las moléculas que lo forman. Para tomar en consideración la influencia de μ' bastará con sustituir el término $\frac{4}{3}\mu$ en las ecuaciones [2] y [3], por $\left(\frac{4}{3}\mu + \mu'\right)$.

Debe advertirse que este planteamiento excluye los efectos de la radiación, los cuales pueden llegar a ser de gran consideración en ondas de choque muy intensas y en algunas ondas de combustión, como veremos en el capítulo IV.

Por último, la conservación de las especies se expresa formulando la condición de que la variación del flujo de una de ellas, por ejemplo, del producto de la combustión, entre dos puntos, se debe exclusivamente al efecto de la reacción química, lo que conduce a la expresión:

$$m \frac{d \epsilon}{d x} = w, \quad [4]$$

donde w es, por definición, la masa de producto de combustión generada en el punto x por unidad de volumen y por unidad de tiempo, cuyo valor, en función del estado termodinámico y de la composición de la mezcla en ese punto, debe proporcionarlo para cada caso la Cinética Química (3).

En el caso de una reacción unimolecular como la que aquí se supone, enseña la Teoría Cinética que se obtiene una buena aproximación del proceso mediante una expresión de la forma:

$$w = K \varphi (1 - Y) e^{-\frac{E}{RT}}, \quad [5]$$

en donde Y es la fracción de masa de producto de combustión de la mezcla en el punto x , mientras que K y E son dos constantes características de la reacción, las cuales se llaman, respectivamente, factor de frecuencia (4) y energía de activación.

Puesto que $(1 - Y)$ es, evidentemente, la fracción de combustible contenida en la mezcla en el punto x y $\frac{E}{RT}$ mide la fracción de moléculas cuya energía cinética excede de un cierto valor, la interpretación estadística de la expresión [5], resulta inmediata.

(3) Para este punto, así como para el estudio de los fenómenos de transporte de masa y energía ver, por ejemplo, el excelente tratado de D. A. FRANK-KAMENETSKII: *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*, Plenum Press, Nueva York, 1969.

(4) K tiene las dimensiones del inverso de un tiempo, es decir, de una frecuencia, como se comprueba fácilmente.

En ella, el término $K e^{-\frac{E}{RT}}$ se llama habitualmente factor de Arrhenius de la ley de reacción.

Una dificultad en la formulación anterior resulta del hecho de que, mientras que en las ecuaciones [3] y [4] la variación de composición se expresa en función del flujo ϵ del producto, la velocidad de la reacción química w , dada por [5], contiene la fracción Y del mismo en la composición de la mezcla y ambas cantidades son, en general, diferentes, a causa de los efectos de la difusión de cada una de las dos especies a través de la otra.

La cuestión se resuelve al expresar que esa diferencia se debe precisamente al efecto de la difusión, el cual da lugar a que la velocidad media v_p del producto de la combustión sea diferente de la v de la mezcla, siendo la diferencia $v_d \equiv v_p - v$ la velocidad de difusión de aquél a través de los gases frescos, lo que da lugar a la condición:

$$m(\epsilon - Y) = \rho v_d Y. \quad [6]$$

Ahora bien, la teoría de la difusión enseña que la velocidad de difusión v_d es proporcional y opuesta al gradiente de concentración $-\frac{dY}{dx}$ y a un coeficiente de difusión D que depende de la composición y estado de la mezcla (5), según la llamada ley de Fick, lo que da la ecuación de relación buscada entre ϵ e Y :

$$-\rho D \frac{dY}{dx} = m(\epsilon - Y). \quad [7]$$

Por último, hay que tener en cuenta la ecuación de estado de la mezcla, que, en este caso, se reduce a

$$\frac{p}{\rho} = RT, \quad [8]$$

puesto que se trata de un gas perfecto y el peso molecular de ambas especies químicas es, por hipótesis, el mismo.

En definitiva, se ha obtenido un conjunto de cuatro ecuaciones

(5) Ver la obra citada de FRANK-KAMENETSKII.

diferenciales ordinarias de primer orden [2], [3], [4] y [7] que, unido a la condición [1] y a la ecuación de estado [8], proporciona un sistema determinado para el cálculo de las seis incógnitas ρ , T , p , v , Y y ϵ .

En cuanto a los tres parámetros m , p_0 , h_0 , sus valores guardan relación con las condiciones en los límites, como vamos a ver seguidamente.

Debiendo advertir antes de proseguir que si se hubiese deducido este sistema a partir de las ecuaciones generales de la Aerotermodinámica que se establecieron en el epígrafe 22 del capítulo I, no aparecería la variable de flujo ϵ pero, en cambio, las ecuaciones [3] y [7] serían de segundo orden, como se comprueba fácilmente al eliminar ϵ entre [4] y ellas por diferenciación de ambas, lo que eliminaría también el parámetro p_0 .

Para completar el planteamiento del problema es necesario establecer las condiciones en los límites, las cuales, como muestra el esquema de la figura III-1, deben hacer tender asintóticamente las seis variables del problema, en los extremos $-\infty$ y $+\infty$ del espacio, hacia los valores que toman en una y otra cara de la discontinuidad normal cuya estructura interna se está estudiando. Concretamente, las condiciones en los límites deben ser:

Extremo de entrada $x \rightarrow -\infty$: $\rho \rightarrow \rho_1$, $T \rightarrow T_1$, $p \rightarrow p_1$, $v \rightarrow v_1$, $Y \rightarrow Y_1$, $\epsilon \rightarrow \epsilon_1$, mientras que todas las derivadas tienden a cero.

Extremo de salida $x \rightarrow +\infty$: $\rho \rightarrow \rho_2$, $T \rightarrow T_2$, $p \rightarrow p_2$, $v \rightarrow v_2$, $Y \rightarrow Y_2$, $\epsilon \rightarrow \epsilon_2$ y todas las derivadas tienden a cero.

Es claro que estas condiciones no son todas ellas independientes, puesto que deben satisfacer las ecuaciones del sistema, de las cuales resultan las siguientes relaciones entre ellas, que definen, además, el significado de los tres parámetros m , ρ_0 , h_0 .

$$\frac{p_1}{\rho_1} = R T_1; \quad \frac{p_2}{\rho_2} = R T_2; \quad [9]$$

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \equiv m; \quad [10]$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2 \equiv p_0; \quad [11]$$

$$C_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = C_p T_2 + \frac{1}{2} v_2^2 - q \equiv h_0; \quad [12]$$

$$\epsilon_1 = Y_1 = 0; \quad \epsilon_2 = Y_2 = 1. \quad [13]$$

Respecto de este conjunto de relaciones hay que señalar, en primer lugar, que las expresiones [10], [11] y [12] constituyen las condiciones de Rankine-Hugoniot que se establecieron en el capítulo precedente para el salto a través de la onda, como no podía menos de ocurrir.

En segundo lugar, que las relaciones entre ϵ_1 , Y_1 y ϵ_2 , Y_2 expresadas en [13] resulta de la ecuación de difusión [8] y de la anulación de la derivada $\frac{dY}{dx}$ en los extremos.

Finalmente, que los valores cero y uno atribuidos en [13] a la concentración de los productos de la combustión en los extremos de entrada y salida de la onda respectivamente, resultan de la hipótesis de que el combustible se quema íntegramente en ella. En cualquier otro caso, por ejemplo, si el combustible está inicialmente diluido en gas inerte, se obtienen los mismos valores mediante una sencilla normalización del único parámetro químico que basta para describir la composición de la mezcla, puesto que, por hipótesis, la combustión se produce mediante una única reacción química.

Por otra parte, el hecho de que la velocidad de combustión adopte la forma dada en [5] plantea un problema en el extremo de entrada $x \rightarrow -\infty$, llamado generalmente extremo frío de la onda.

En efecto, es claro que w tiende a cero en el extremo de salida $x \rightarrow +\infty$, que se llama generalmente extremo caliente, puesto que en él Y tiende a la unidad, en virtud de la condición [13]. Por el contrario, en el extremo frío, w tiende al valor $w_1 = K \rho_1 e^{-\frac{E}{RT_1}}$ no nulo, lo cual, en virtud de la ecuación [4], hace divergente el valor de ϵ en él.

Es ésta una dificultad clásica de la teoría de las ondas de combustión, que desarrollaremos con más detalle en el capítulo VI, al estudiar la estructura de las llamas.

Aquí bastará decir que esa dificultad se soslaya suponiendo que existe una temperatura de encendido T_i mayor que T_1 , por debajo de la cual la velocidad de reacción es nula, con lo que la expresión [5] debe sustituirse por la siguiente:

$$T < T_i, w = 0; \quad T \geq T_i, w = K \rho (1 - Y) e^{-\frac{E}{RT}} \quad [5']$$

lo cual introduce una discontinuidad finita en las derivadas de la solución en ese punto, o bien sustituyendo la expresión [5] por otra

que se comporte como ésta para valores de T distintos de T_1 y que tienda a cero cuando T tienda a T_1 . Por ejemplo, la expresión

$$w = K \varphi (1 - Y) e^{-\frac{E}{R(T - T_1)}}, \quad [5'']$$

cuyo comportamiento es muy parecido al de [5], salvo en el entorno de T_1 , cuando la energía de activación E es suficientemente grande respecto del término $R T_1$, como suele ocurrir en las relaciones de combustión, según se verá más adelante.

En definitiva, de los 12 valores que toman las seis incógnitas en los dos extremos, los cuatro de ϵ e Y están determinados por las condiciones [13] y entre los ocho que restan existen las cinco condiciones [9] a [12], lo cual reduce a tres, como máximo, el número de los que pueden elegirse libremente.

Por otra parte, el sistema diferencial es de cuatro ecuaciones de primer orden, pero como es autónomo, al no depender explícitamente de x sus coeficientes y puesto que además las condiciones en los límites se fijan en el infinito, la solución debe ser invariante a una traslación, lo que haría que el número máximo de condiciones para hacerlo determinado fuera de tres, en lugar de cuatro, como debería ser en otro caso.

Ahora bien, aunque ello podría sugerir que estamos ante un problema bien planteado y que, por consiguiente, para cada trío de valores arbitrarios de las variables en los límites existe una y sólo una solución, la cuestión es más compleja porque se trata de un problema de condiciones en los límites, donde éstos son, además, puntos singulares del sistema, puesto que todas las derivadas se anulan en ellos.

Por tanto, la existencia y la unicidad o multiplicidad de las soluciones buscadas dependerá de las características de tales puntos y del comportamiento de las soluciones que pasan por ellos (6).

Para esclarecer la cuestión, el análisis debe efectuarse aplicando la teoría de Poincaré-Bendixon al espacio de fase formado por las cuatro coordenadas v , T , ϵ , Y correspondientes a las cuatro ecuaciones [2], [3], [4] y [7], o a un número mayor si es superior a dos

(6) Ver, por ejemplo, P. B. BAYLEY, L. F. SHAMPINE y P. E. WALTMAN: *Non Linear Two Point Boundary Value Problems*. Acad. Press., Nueva York, 1968.

el número de especies químicas a considerar, lo que hace que el método resulte muy laborioso (7).

Un ejemplo de análisis de esta naturaleza es el llevado a cabo por el profesor Williams en la notable obra citada en la página 2 del capítulo precedente (8).

Pero el ejemplo seguramente más completo de un tratamiento de esta naturaleza es, sin duda, el efectuado por Wood y Salsburg hace unos años, en un trabajo fundamental sobre la Teoría de las Ondas de Detonación, al que nos referiremos más adelante (9) y cuya lectura permite apreciar perfectamente, entre otras cosas, la índole del problema que plantea el análisis del comportamiento de las soluciones de las ondas de combustión en el entorno de los puntos singulares.

El sistema que acabamos de deducir contiene entre sus soluciones las que corresponden a los distintos tipos de ondas de choque, de detonación y de deflagración, cuyas características específicas constituyen el objeto del presente trabajo y pueden obtenerse a partir del análisis de tales soluciones.

Sin embargo, para cada tipo de onda, bien sea de choque, de detonación o de deflagración, hay determinados efectos que privan largamente sobre los demás y que permiten analizar las propiedades de ese tipo mediante un sistema simplificado, el cual se deduce del general suprimiendo aquellos términos cuya influencia es despreciable para el tipo de onda en estudio.

Ello no sólo tiene la ventaja de simplificar considerablemente el análisis, sino que, además y sobre todo, sirve para poner de manifiesto los diferentes efectos que controlan el proceso en cada caso, es decir, la esencia misma de la estructura de cada tipo de onda.

En particular, las ondas de choque resultan al considerar que no varía la composición de la mezcla a través de ella (10), por lo que el

(7) Ver, por ejemplo, S. FENYO y T. FREY: *Modern Mathematical Methods in Technology*. Vol. I, «North-Holland», Publ. Co. Amsterdam y Londres, 1960, págs. 341 y sigts.

(8) También el trabajo de H. W. EMMONS. Vol. III de la Enciclopedia Princeton, págs. 467 y sigts., así como la bibliografía que en él se contiene sobre la cuestión.

(9) Ver la referencia del epígrafe 3 del capítulo V.

(10) En el capítulo siguiente veremos que las ondas de choque fuertes pueden producir cambios de composición del gas como consecuencia de fenómenos tales como la disociación, ionización, etc.

sistema diferencial y las condiciones en los límites resultan, para este caso, de las que acabamos de ver sin más que hacer en ellos u e Y idénticamente nulas. En especial, desaparecen las ecuaciones de reacción [4] y de difusión [7], lo que introduce, como veremos, una gran simplificación en el problema.

Por lo que respecta al caso de las ondas de combustión, es decir, a las ondas de detonación o de deflagración, con objeto de diferenciarlas entre sí seguiremos el tratamiento sumamente esclarecedor de von Karman (11), basado esencialmente en la idea de que en dichos fenómenos hay dos tipos de procesos esencialmente distintos, uno de transporte térmico, mecánico o de masa (conductividad, viscosidad o difusión) y otros de transformación química (ecuación de reacción), cada uno de los cuales tiene un tiempo característico distinto y de órdenes de magnitud diferentes.

Es decir, que hay un «tiempo mecánico» τ_m , propio de los fenómenos de transporte, y un «tiempo químico» τ_c , propio de las reacciones químicas, cuya comparación permite poner de manifiesto aquellos fenómenos del proceso que deben ser dominantes en cada caso y, en definitiva, retener en el sistema diferencial de la onda los términos determinantes del tipo de solución que se busca para cada una de ellas.

Este planteamiento unitario de von Karman permite extraer del sistema general propuesto, como vamos a ver, los sistemas simplificados que se utilizan para el estudio de los diversos tipos de ondas, en forma que ilustra plenamente las causas de la simplificación y constituye además un excelente ejemplo del empleo de modelos esquemáticos a que aludíamos en la Introducción, cuyo empleo generalizado en la Dinámica de Gases proporciona uno de los más fecundos recursos para hacer abordables los problemas que interesan a la técnica.

Para ello hay que empezar por definir adecuadamente los tiempos característicos y ponerlos de manifiesto en el sistema diferencial propuesto, donde, por sencillez también, cuando sea necesario supondremos que se trata de un gas perfecto con relación constante de calores específicos, para facilitar la formulación explícita de propiedades, como se hizo en el ejemplo del capítulo II.

(11) TH. VON KARMAN: *Aerothermodynamics and Combustion Theory*. «L'Aerotecnica», 1953. También *Aerothermodynamic Problems of Combustion*, del volumen III de la Enciclopedia de Princeton.

Un «tiempo mecánico» característico lo proporciona la Teoría Cinética de Gases, como relación entre una distancia característica de los procesos moleculares y una velocidad. con ello se obtiene la siguiente definición para el mismo:

$$\tau_m \sim \frac{\mu}{p}, \quad [14]$$

o bien

$$\tau_m \sim \frac{\lambda}{\rho C_p}, \quad [15]$$

ya que la relación entre uno y otro es el llamado número de Prandtl (12),

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}, \quad [16]$$

el cual tiene, en general, valores próximos a la unidad.

También hubiera podido utilizarse la definición

$$\tau_m \sim \frac{\rho D}{p}, \quad [17]$$

cuyas relaciones con [14] y [15] son respectivamente el llamado número de Schmidt:

$$Sc = \frac{\mu}{\rho D} \quad [18]$$

y el número de Lewis-Semenov:

$$L = \frac{\lambda}{\rho D C_p}, \quad [19]$$

ambos también del orden de magnitud de la unidad.

(12) Ver el epígrafe 2 del capítulo I.

Análogamente, como tiempo químico se puede utilizar el que transcurre entre dos colisiones que den lugar a una transformación química, el cual puede medirse, evidentemente, por la expresión:

$$\tau_e \sim \frac{\rho}{w}. \quad [20]$$

Para poner de manifiesto la influencia relativa

$$\beta \equiv \frac{\tau_m}{\tau_e} \sim \frac{\mu w}{\rho p} \quad [21]$$

de ambos tiempos en el proceso, conviene expresar el sistema diferencial en forma adimensional, sustituyendo además la variable x por ϵ , puesto que ésta varía monótonamente de 0 a 1 a lo largo de la onda, como hemos visto.

Con ello se obtiene, en sustitución de la ecuación [2], la siguiente:

$$p \left[-\frac{4}{3} \beta \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{d\epsilon} \right) + 1 + \gamma m^2 \right] = p_0, \quad [22]$$

donde γ es la relación de calores específicos de la mezcla, que se supone constante y $M = \frac{v}{a}$ es el número de Mach del movimiento en

el punto x , siendo $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ la correspondiente velocidad de propagación del sonido.

Análogamente se obtienen, en sustitución de [3] y [8], respectivamente, las dos ecuaciones siguientes:

$$C_p T \left[-\frac{1}{P_r} \frac{\beta}{\gamma M^2} \left(\frac{1}{T} \frac{dT}{d\epsilon} \right) - \frac{4}{3} \frac{\gamma-1}{\gamma} \beta \left(\frac{1}{v} \frac{dv}{d\epsilon} \right) + \right. \quad [23]$$

$$\left. + 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 - \frac{q}{C_p T} \epsilon \right] = h_0;$$

$$\frac{1}{S_c} \frac{\beta}{\gamma M^2} \frac{dY}{d\epsilon} = Y - \epsilon. \quad [24]$$

Ahora bien, ocurre que, en general, el tiempo mecánico es siempre mucho menor que el tiempo químico, puesto que sólo un reducido número de colisiones moleculares son efectivas para la reacción química, lo que equivale a decir que en el seno de las ondas de combustión se cumple siempre la condición

$$\beta \ll 1. \quad [25]$$

Por el contrario, tanto el número de Prandtl como el de Schmidt, como hemos visto, son del orden de magnitud de la unidad, como también lo es el número llamado de Damköhler

$$D_* = \frac{q}{C_* T}, \quad [26]$$

que mide la relación entre la entalpía química y la térmica del proceso.

Asimismo, el valor del coeficiente $\frac{\beta}{\gamma M^2}$ es también muy pequeño si el número de Mach del movimiento es del orden de magnitud de la unidad, como ocurre, por ejemplo, en las ondas de detonación, pero no así cuando el movimiento sea muy lento, como ocurre en las deflagraciones muy débiles.

En definitiva, al introducir estas consideraciones sobre el orden de magnitud de los diversos términos en el sistema diferencial de la onda de combustión, se obtienen las siguientes conclusiones:

1.^a La influencia de la viscosidad es muy pequeña en cualquier caso, por lo que, en primera aproximación, puede suponerse nula, tanto en las ondas de deflagración como en las de detonación, prescindiendo de los términos correspondientes en las ecuaciones de la cantidad de movimiento y de la energía. En particular, la primera se reduce entonces a la siguiente:

$$p + \rho v^2 = p_0. \quad [27]$$

2.^a Si el número de Mach es del orden de la unidad $M \sim O(1)$, como ocurre en las detonaciones, también resulta entonces muy pequeña la influencia de la conductividad térmica, así como la de la difusión, con lo que esta última ecuación se reduce a la siguiente:

$$Y \equiv \epsilon, \quad [28]$$

y la de la energía toma la forma :

$$C_p T + \frac{v^2}{2} - q \epsilon = h_0. \quad [29]$$

3.ª Por el contrario, si el número de Mach es muy pequeño $M^2 \ll 1$, como ocurre en las deflagraciones débiles, entonces debe ser

$$\frac{\beta}{\gamma M^2} \sim 0 \quad (1), \quad [30]$$

para que subsistan los términos de difusión y de transporte de calor en el sistema, en cuyo caso la ecuación [22] se reduce a la siguiente :

$$p \simeq p_0 = \text{const.}, \quad [31]$$

es decir, se trata de un proceso a presión constante, en tanto que la ecuación de la energía toma la forma simplificada,

$$\frac{\lambda w}{m^2 C_p} \frac{dT}{d\epsilon} - T + \frac{q}{C_p} \epsilon = 0 \quad [32]$$

y la de difusión subsiste en la forma [24], que se puede escribir también :

$$\frac{\rho D w}{m^2} \frac{dY}{d\epsilon} = Y - \epsilon. \quad [33]$$

Por consiguiente, en las ondas de deflagración débiles el proceso está esencialmente controlado por los fenómenos de transporte térmico y de difusión y por la velocidad de transformación química de las especies.

Se obtienen con ello los sistemas diferenciales simplificados que emplearemos en los capítulos siguientes para el estudio de la estructura interna de cada clase de onda, sin perjuicio de analizar, cuando sea necesario, las perturbaciones que pueden introducir en las mismas los términos que aquí se han suprimido.

Por otra parte, es claro que el tratamiento matemático completo del problema requeriría el desarrollo de la solución en serie de poten-

cias del parámetro [21], de las que los sistemas anteriores constituyen las aproximaciones de orden cero, así como el análisis de las características de convergencia del mismo.

En los capítulos siguientes se desarrollan sucesivamente la teoría de la estructura interna de las ondas de choque; de las de detonación y de las de deflagración débiles, las cuales se designan también habitualmente «llamas premezcladas».

CAPÍTULO IV

ONDAS DE CHOQUE

1. INTRODUCCIÓN

Una gran variedad de procesos del mayor interés tecnológico, especialmente después del desarrollo de la Aerodinámica de altas velocidades y de la propulsión por reacción, relacionadas con la Aeronáutica, con la Astronáutica, con el movimiento de los proyectiles y con el estudio de las explosiones, incluyen la formación de ondas de choque, cuyas características es necesario conocer con gran precisión (1).

Una de tales características es la estructura interna de las ondas, cuyo conocimiento, sin embargo, no es necesario para la resolución de la inmensa mayoría de aquellos procesos, porque basta tratar la onda como una discontinuidad, como se ha hecho en el epígrafe número 17 del capítulo I, donde los estados del gas a uno y otro

(1) Una de las más recientes publicaciones sobre todos los aspectos, tanto externos como internos de las ondas de choque, que contiene además una bibliografía muy completa, es la obra de varios autores editada bajo la dirección del Prof. A. L. JAUMOTTE, de la Universidad de Bruselas: *Chocs et Ondes de Choc*. Masson et Cie., París, vol. I, 1971; vol. II, 1973. Una obra clásica, especialmente sobre los aspectos externos de los movimientos con ondas de choque, es la de los matemáticos R. COURANT y K. O. FRIEDRICHS: *Supersonic Flow and Shock Waves*. Interscience Publ., Nueva York, 1948. Una obra fundamental sobre la física de la estructura interna de las ondas de choque, es la de YA. B. ZELDOVICH y YU. P. RAIZER, de la Academia de Ciencias de la URSS: *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena*. Acad. Press, Nueva York, vol. I, 1966; vol. II, 1967. Finalmente, es obra importante de consulta la de GREENE y TOENNIES, que se menciona en la página 18 del capítulo II.

lado de la misma quedan determinados, como se ha visto en el capítulo II, por las condiciones de Rankine-Hugoniot.

Ocorre, sin embargo, que en ningún otro fenómeno de la Dinámica de Gases se producen gradientes tan intensos como en el seno de una onda de choque, donde los elevados saltos de la densidad, presión, temperatura y velocidad del gas tienen lugar en una distancia del orden de magnitud de su camino libre medio molecular, lo que hace altamente cuestionable la aplicabilidad al caso del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes, salvo para las ondas débiles, planteando con ello un problema básico de gran interés científico.

Por otra parte y precisamente a causa de estas propiedades, la onda de choque proporciona un instrumento ideal para provocar, en un reducidísimo intervalo de tiempo, una compresión y un calentamiento muy elevados en una masa uniforme de gas, lo que la convierte en un instrumento ideal para la observación y el estudio de los efectos subsiguientes a ese impacto, tales como los fenómenos de relajación, disociación, ionización, radiación y reacción química, en condiciones experimentales que difícilmente podrían lograrse de otro modo.

El dispositivo empleado para ello es el llamado «tubo de choque» donde, por diversos procedimientos, se provoca una onda de choque de las características deseadas, la cual se propaga a través de una masa uniforme de gas de composición y estado termodinámico predeterminados, cuya evolución después del paso de la onda se observa mediante técnicas e instrumentos especialmente desarrollados para ello. Si bien el tubo de choque es un instrumento conocido desde finales del siglo pasado, su aplicación sistemática al laboratorio data de los años de la Segunda Guerra Mundial, en que el estudio de estos fenómenos recibió un gran impulso, habiéndose extendido desde entonces su empleo al análisis de un número cada vez mayor de aplicaciones, especialmente durante las dos últimas décadas (2).

(2) Ver, por ejemplo, los capítulos dedicados al tubo de choque en la obra de JAUMOTTE y en la de ZELDOVICH y RAIZER, citadas. Ver también A. G. GAYALON: *The use of Shock Tubes for Studying Fundamental Combustion Processes*. «Eleventh Symposium on Combustion». The Comb. Inst., Pittsburgh, 1967, páginas 1-10, así como el trabajo del puesto al día de R. L. BELFORD y R. A. STRELOW: *Shock Tube Technique in Chemical Kinetics*. «An. Rev. Phys. Chem.», vol. 20, 1969, págs. 247-72. Ver también R. I. SOLOUKHIN: Mno Book Corp. Baltimore, 1966, y Ye V. STUPOCHENKO, S. A. LOSEV y A. I. OSIFOV: *Relaxation in Shock Waves*. Springer-Verlag, Berlín, Nueva York, 1967, así como la obra de GREENE y TOENNIES, reiteradamente citada.

Por todo lo cual el estudio de la estructura interna de las ondas de choque ha sido objeto de numerosas investigaciones teóricas y experimentales, las cuales se inician a comienzo de nuestro siglo (3) con los trabajos de Prandtl (4) y Taylor (5), si bien el trabajo fundamental al que hay que referir todos los desarrollos posteriores data de 1922 y se debe a Becker (6).

2) ONDAS DE CHOQUE DE INTENSIDAD MODERADA

En el supuesto de que sean aplicables las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que presumiblemente ocurrirá en los choques débiles, en cuyo caso tampoco se producirán detrás del choque efectos de relajación, disociación, reacción química, etc., que alteren la composición de la mezcla, las únicas variables del proceso serán la densidad, presión, temperatura y velocidad, cuyos valores estarán determinados por las tres ecuaciones del movimiento [1], [2] y [3] del capítulo III, donde además desaparece el término q correspondiente a la energía química liberada, puesto que la composición de la mezcla es constante, y por la ecuación de estado [8], las cuales escribimos aquí nuevamente, para facilitar la exposición, en la forma:

$$\rho v = m; \quad [1]$$

$$-\frac{4}{3} \mu \frac{dv}{dx} + p + \rho v^2 = p_0; \quad [2]$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} + m \left(C_p T + \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{4}{3} \mu v \frac{dv}{dx} = m h_0 \quad [3]$$

(3) Ya en 1870 Rankine reconoció la necesidad de tomar en consideración los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica para esclarecer el problema suscitado por Stockes en 1848, al señalar la aparición de una discontinuidad en la propagación de una onda en un gas, como consecuencia de la deformación introducida en su perfil por los efectos no lineales de la compresibilidad.

(4) L. PRANDTL: *Zur Theory der Verdichtungsstosses*. «Zeitschrift für der geramte Turbinen-Wesana», 1906, págs. 241 y sigts.

(5) G. I. TAYLOR: *The Conditions necessary for Discontinuos Motion in Gases*. «Proc Roy. Soc. London», 1910, págs. 371-7.

(6) R. BECKER: *Stossuelle und Detonation*. «Z. Phys.», vol. 8, 1922, páginas 321-62.

y

$$\frac{p}{\rho} = R T. \quad [4]$$

En ellas p_0 y h_0 son, respectivamente, la presión y la entalpía de remanso del proceso (7), las cuales, en virtud de las condiciones en los límites [11] y [12] del capítulo III, se expresan en la forma:

$$p_0 = p_1 + m v_1 = p_2 + m v_2 \quad [5]$$

y

$$h_0 = C_p T_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = C_p T_2 + \frac{1}{2} v_2^2. \quad [6]$$

Se recuerda que los subíndices 1 y 2 corresponden, respectivamente, a los límites $-\infty$ y $+\infty$ de entrada y salida de la onda, donde se anulan los gradientes de todas las variables.

Como se ha indicado al final del capítulo precedente, el análisis matemático de las posibles soluciones de este problema debe empezar por el de la naturaleza de los puntos límites $-\infty$ y $+\infty$.

Ahora bien, según hizo observar Becker en su famoso trabajo de 1922, existe un caso particular que facilita grandemente la resolución del problema, el cual ocurre cuando el número de Prandtl (8) del movimiento es constante e igual a tres cuartos:

$$Pr \equiv \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{3}{4}. \quad [7]$$

Efectivamente; en tal caso se comprueba fácilmente que la expresión (9)

$$C_p T + \frac{1}{2} v^2 = h_0 \quad [8]$$

(7) Es decir, los valores de la presión y de la entalpía a que se llegaría si se desacelerase isentrópicamente el gas hasta la velocidad nula, a partir de las condiciones en uno cualquiera de los dos extremos de la onda.

(8) Ver el epígrafe 2 del capítulo I.

(9) V. M. MORDUCHOW y P. A. LIBBY: *On a Complete Solution of the One-Dimensional Flow Equations of a Viscous, Heat-Conducting, Compressible Gas*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1949, págs. 674-704.

es una integral primera del sistema [2], [3], con lo que el problema se reduce en este caso a la integración de una única ecuación diferencial para el cálculo de T o v , mediante la eliminación de la otra variable, así como de ρ y p , merced a las condiciones [1], [4] y [8] (10).

Por ejemplo; si se retiene la velocidad, resulta la siguiente ecuación diferencial para su cálculo:

$$\frac{3}{4} \frac{\mu}{m} v \frac{dv}{dx} - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} v^2 + \frac{p_0}{m} v = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_0, \quad [9]$$

en donde γ es la relación entre los calores específicos del gas, que se supone constante.

Si, además, se supone que μ es también constante (11), entonces se obtiene una solución analítica explícita para la distribución de la velocidad, cuyo perfil está dado por la siguiente expresión:

$$\frac{1 - \eta}{(\eta - \eta_2)^{\eta_1}} = \alpha e^{\beta \xi}, \quad [10]$$

como se comprueba fácilmente.

En ella, se han introducido las siguientes variables adimensionales, para la velocidad y la distancia:

$$\eta = \frac{v}{v_1}; \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad [11]$$

(10) La interpretación física de la condición [8] es clara, puesto que al compararla con [3] se ve que en cualquier punto de la onda la conductividad térmica elimina todo el calor generado por la viscosidad, por lo que la onda es de entalpía total constante. Una situación análoga se da en la teoría de la capa límite de un fluido compresible, pero allí el caso de entalpía constante corresponde al valor unidad del número de Prandtl, como se vio en el epígrafe 10 del capítulo I.

(11) La teoría cinética de gases enseña que μ se aumenta con la temperatura según una ley que depende de la de interacción en los choques moleculares. Por ejemplo, en el caso de «esféricas rígidas», $\mu \sim T^{1/2}$.

Ver, por ejemplo, J. O. HIRSCHFELDER, CH. F. CURTISS y R. B. BIRD: *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1954, págs. 523 y sigts.

siendo

$$l = \frac{\mu}{\rho_1 a_1} \quad [12]$$

el camino libre medio molecular de la mezcla en el extremo $-\infty$ de entrada de la onda y

$$a_1 = \sqrt{\gamma \frac{p_1}{\rho_1}} \quad [13]$$

la velocidad de propagación del sonido en él.

En cuanto a α y β , son dos parámetros, de los cuales el primero depende del valor que se elija para η en el origen de coordenadas, es decir, de la posición arbitraria de éste, mientras que el segundo está dado por la expresión:

$$\beta = K \cdot M_1 \left(1 - \frac{1}{M_1^2} \right), \quad [14]$$

donde

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1} \quad [15]$$

es el número de Mach del movimiento en el extremo de entrada de la onda y K es un coeficiente cuyo valor proporciona la Teoría Cinética de Gases (12).

En cuanto al valor η_2 de la velocidad adimensional en el extremo de salida de la onda, las condiciones de Rankine-Hugoniot permiten expresarlo en función del número de Mach de entrada M_1 , en la forma:

$$\eta_2 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \cdot \frac{1}{M_1^2}. \quad [16]$$

(12) Por ejemplo, en el aire, en condiciones normales $K \simeq 1.13$. Para más detalles, ver el trabajo de MORDECHOW previamente citado.

Asimismo, el número de Mach de salida M_2 se expresa mediante M_1 en la forma:

$$M_2^2 \equiv \frac{v_2^2}{a_2^2} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}} \quad [17]$$

La ecuación [10] muestra que si el parámetro β es negativo, entonces la velocidad adimensional η no puede tender a la unidad en el extremo de entrada de la onda, $\xi \rightarrow -\infty$.

Por tanto, la solución es solamente válida en el caso

$$\beta > 0, \quad [18]$$

en que, además, se ve en [10] que la velocidad adimensional tiende al valor límite η_2 en el extremo de salida $x \rightarrow +\infty$.

Pero la expresión [14] muestra que la condición [18] equivale a la condición bien conocida

$$M_1 > 1, \quad [19]$$

es decir, a que las ondas de choque sólo puedan formarse en corrientes supersónicas.

Ocorre, además, que el número de Mach de salida M_2 es subsónico, como se comprueba fácilmente en la expresión [17].

Conocida la distribución de velocidades en el seno de la onda, la ecuación [1] proporciona la de la densidad, la ecuación [8] la de la temperatura y al introducir estas dos en la ecuación [4] de estado, se obtiene la distribución de la presión.

Por ejemplo, la figura IV-1 muestra tales perfiles para un caso típico de onda de choque en el aire, en condiciones normales, correspondiente a un número de Mach M_1 de la corriente incidente igual a dos, en cuyo caso los valores característicos del salto aparecen reflejados en el cuadro siguiente:

$$\begin{array}{ll} M_1 = 2; \quad v_1 = 700 \text{ m/s}; & p_1 = 1 \text{ atm.}; \quad T_1 = 298^\circ\text{K}; \\ M_2 = 0,577; \quad v_2 = 450 \text{ m/s}; & p_2 = 4,5 \text{ atm.}; \quad T_2 = 504^\circ\text{K}; \\ \rho_1 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ gr/cm}^3; & l_1 = 6 \times 10^{-6} \text{ cm}; \\ \rho_2 = 3,2 \cdot 10^{-3} \text{ gr/cm}^3; & l_2 = 2,3 \times 10^{-6} \text{ cm}. \end{array}$$

Entre los perfiles trazados se ha incluido el que da la variación de la entropía $\frac{S-S_1}{C_v}$, la cual aumenta al pasar de un extremo a otro de la onda, puesto que el salto entre ambos es adiabático e irreversible. Por el contrario, en el seno de la onda, donde el proceso es irreversible pero no adiabático, la entropía presenta un máximo local en el punto $\xi = 0$.

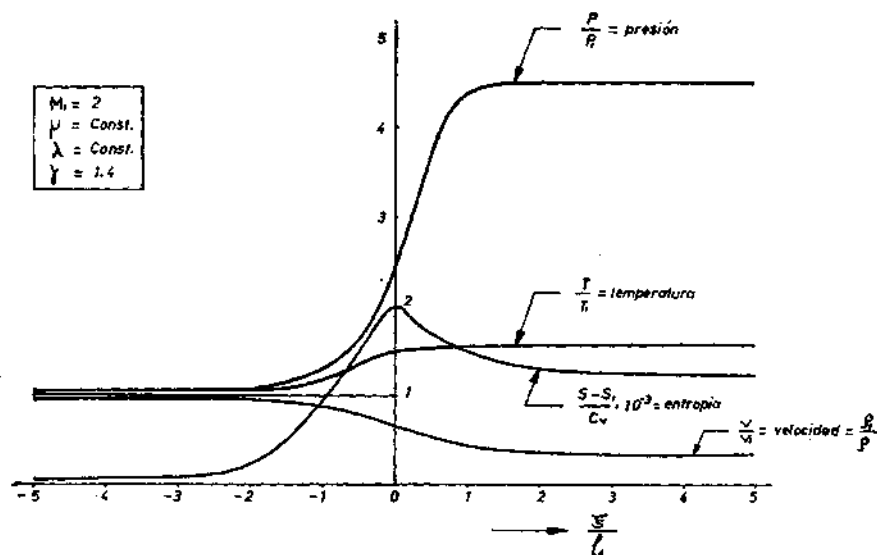


Fig. IV-1.—Estructura de una onda de choque en un gas perfecto.

Puesto que los perfiles de la velocidad, etc., tienden asintóticamente a sus valores en los extremos, es necesario adoptar una definición convencional del espesor de la onda. Se suele emplear la fórmula propuesta por Prandtl, el cual define el espesor mediante la tangente al perfil de velocidades en el punto de máxima pendiente, con lo que se obtiene para el mismo la expresión:

$$\delta = \frac{v_1 - v_2}{\left(\frac{dv}{dx} \right)_{\text{máx.}}}, \quad [20]$$

cuyo valor puede calcularse fácilmente en función, por ejemplo, del

número de Mach M_1 de la corriente incidente, merced a las ecuaciones anteriores (13).

La figura IV-2 muestra la relación existente entre el espesor adimensional $\frac{\delta}{l_1}$ y el número de Mach de la corriente incidente.

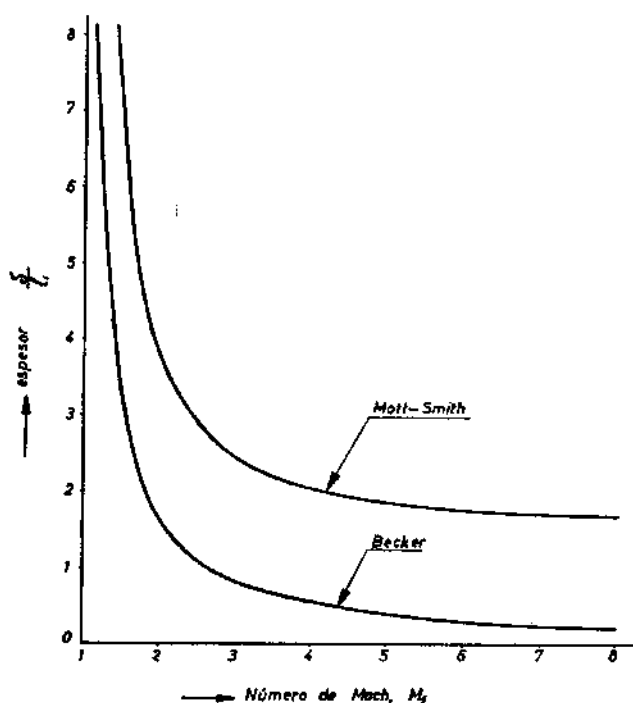


Fig. IV-2.—Espesor de la onda de choque.

En ella puede verse que, a partir de un número de Mach igual a 2,5, aproximadamente, el espesor es inferior al camino libre medio l_1 del gas, en el extremo de entrada de la onda.

Es claro que esto hace muy dudosa, como se ha anticipado, la aplicabilidad de las ecuaciones de Navies-Stokes a la descripción del proceso, puesto que tales ecuaciones se deducen de la Mecánica

(13) G. I. Taylor y J. W. Maccoll definen el espesor como la zona en torno al punto de velocidad media $\frac{1}{2} \cdot (v_1 + v_2)$ en que se produce el 90 % del salto de la velocidad. Ver, por ejemplo, *The Mechanics of Compressible Fluids*. Volumen III. Durand's Aerod. Theory. J. Springer, Berlin, 1934.

Estadística por el método de Enskog-Chapman (14) bajo la hipótesis de que las variables termodinámicas cambian muy poco en distancias equivalentes al camino libre medio molecular.

Hay que advertir, sin embargo, que el espesor se ha referido al camino libre medio en la cara de entrada de la onda y que éste crece a través de ella, a causa del calentamiento del gas, como ilustra el cuadro de la página 351, aparte de que el espesor de la onda respecto de l_1 aumenta también al tomar en consideración la variación de los coeficientes de viscosidad y de conductividad con la temperatura, como puede verse en el trabajo de Morduchow y Libby previamente citado.

Volviendo al caso de ondas de choque débiles, en que los resultados anteriores confirman la aplicabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, es necesario explorar, en primer lugar, el verdadero alcance de la hipótesis [7] sobre el valor especial del número de Prandtl que ha facilitado grandemente la integración del sistema diferencial.

La conclusión es que el valor de $3/4$ se aproxima mucho al valor real en gran número de casos de interés. Por ejemplo, en el aire, en condiciones normales, es $P_r = 0,715$, mientras que en un gas monoatómico es $P_r = 0,67$.

Por otra parte, diversos autores han analizado la influencia de la variación del número de Prandtl en la estructura interna de la onda, llegándose a la conclusión de que dicha influencia es de escasa significación para variaciones de aquel número comprendidas entre límites razonables (15).

Ocorre, en cambio, que la complejidad del problema aumenta de modo sensible cuando el número de Prandtl toma valores distintos de $3/4$, porque entonces en lugar de operar con la única ecuación [9], es necesario hacerlo con el sistema diferencial [2] y [3], el cual escribiremos para ello en la forma:

$$\frac{4}{3} \frac{\mu}{m} \frac{dv}{dx} = R \left(\frac{T}{v} - \frac{T_i}{v_i} \right) + (v - v_i); \quad [21]$$

(14) Ver, por ejemplo, S. CHAPMAN y T. G. COWLING: *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge Univ. Press., 1960.

(15) Ver, por ejemplo, el interesante trabajo de LIEPMANN et al., que se cita en la página 364, especialmente la figura 2 del mismo.

$$\frac{\lambda}{m} \cdot \frac{dT}{dx} = C_p (T - T_l) + \frac{1}{2} (v^2 - v_l^2) - v \left[R \left(\frac{T}{v} - \frac{T_l}{v_l} \right) + (v - v_l) \right], \quad [22]$$

en donde el subíndice l designa los valores de las variables en uno cualquiera de los dos extremos $-\infty$ o $+\infty$ y, además, se ha hecho uso de las condiciones [1] y [4] para eliminar la densidad y la presión, de las ecuaciones anteriores.

El escribir las ecuaciones en la forma [21] y [22] es ventajoso para el análisis del comportamiento en los dos puntos singulares (v_1, T_1) y (v_2, T_2) , puesto que todos los términos de las mismas expresan diferencias respecto de sus valores en uno de ellos.

Efectivamente, el procedimiento para el análisis de aquel comportamiento consiste, como es sabido (16), en linealizar el sistema [21] y [22] en el entorno del punto singular y estudiar las raíces de la ecuación característica resultante.

Si se efectúa dicha linealización y se pasa al plano de fase (v, T) , por eliminación de x puesto que el sistema es autónomo, se obtiene la siguiente ecuación, válida en el entorno de cada uno de los dos puntos singulares:

$$\frac{3}{4} \frac{\lambda}{\mu} \frac{dT}{dv} \approx \frac{C_p (T - T_l) + \frac{R T_l}{v_l} (v - v_l)}{\frac{R}{v_l} (T - T_l) + \left(1 - \frac{R T_l}{v_l^2} \right) (v - v_l)}. \quad [23]$$

la cual, con la notación $\theta = \frac{T}{T_l}$ y $\eta = \frac{v}{v_l}$, adopta la siguiente forma adimensional:

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{4}{3} \frac{P_r}{\gamma} \cdot \frac{(\theta - 1) + (\gamma - 1)(\eta - 1)}{\frac{1}{\gamma M_l^2} (\theta - 1) + \left(1 - \frac{1}{\gamma M_l^2} \right) (\eta - 1)}, \quad [24]$$

(16) Ver, por ejemplo, la obra de FENYO y FREI citada en la página 338 del capítulo III.

en donde

$$M_i^2 = \frac{v_i^2}{a_i^2} \quad [25]$$

es el valor del número de Mach en el punto singular.

La ecuación característica correspondiente a [24] es:

$$\left| \begin{array}{cc} \left(1 - \frac{1}{\gamma M_i^2}\right) - \alpha & \frac{4}{3} P_r \frac{\gamma - 1}{\gamma} \\ \frac{1}{\gamma M_i^2} & \frac{4}{3} \frac{P_r}{\gamma} - \alpha \end{array} \right| = 0, \quad [26]$$

o bien:

$$\alpha^2 - \left(\frac{4}{3} \frac{P_r}{\gamma} + 1 - \frac{1}{\gamma M_i^2} \right) \alpha + \frac{4}{3} \frac{P_r}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{M_i^2} \right) = 0. \quad [27]$$

El producto de las dos raíces de esta ecuación es:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \frac{4}{3} \frac{P_r}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{M_i^2} \right). \quad [28]$$

Por consiguiente, si el movimiento en el punto 1 es supersónico, es decir, si $M_i^2 > 1$, las dos raíces son del mismo signo y, por tanto, el punto singular es un *nodo*, el cual resulta además divergente, puesto que la suma de las raíces es positiva:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{4}{3} \frac{P_r}{\gamma} + 1 - \frac{1}{\gamma M_i^2} > 0. \quad [29]$$

Ello significa que es punto de arranque de las soluciones y que para un valor dado de $M_i > 1$, existe una infinidad de soluciones de [24] que pasan por 1, todas las cuales, menos una, tienen, además, una tangente común, como es propio de tales singularidades.

Con ello se confirma nuevamente que las ondas de choque sólo pueden formarse en corrientes supersónicas.

Si, por el contrario, el punto singular es subsónico $M_i^2 < 1$, en-

tonces el producto [28] de las raíces es negativo y la singularidad resulta ser un punto de *silla* o *puerto*, con dos únicas soluciones posibles, de las que una es convergente, es decir, de llegada, mientras que la otra es divergente, con lo que también se confirma el carácter necesariamente subsónico del movimiento detrás de la onda.

En cuanto a la solución buscada, es evidentemente una solución singular del problema, es decir, la única, entre las infinitas que parten del punto 1, que pasa también por el punto 2.

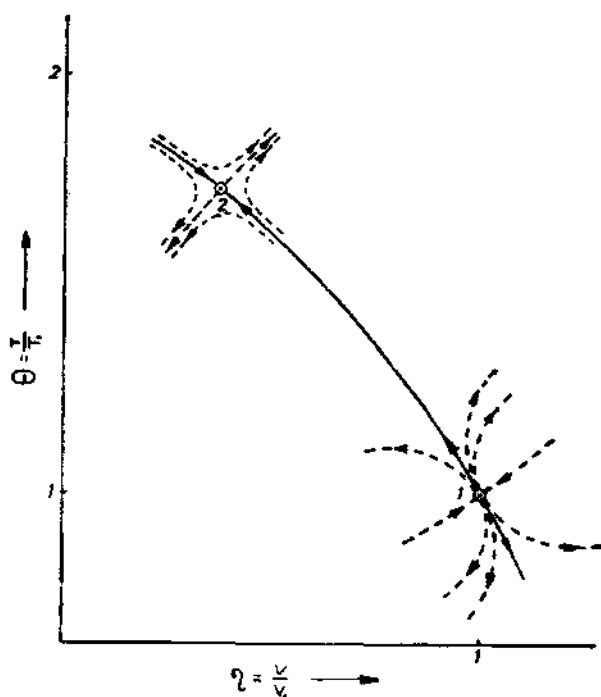


Fig. IV-3.—Estructura de la onda de choque. Plano de fase

El esquema de posibles soluciones del sistema [21] y [22] aparece reflejado en el plano de fases de la figura IV-3, donde se ha representado de trazo grueso la solución singular que corresponde a la onda de choque.

El análisis detallado y la clasificación de todos los tipos de corrientes posibles en un movimiento unidimensional estacionario, con inclusión de los efectos de la compresibilidad, viscosidad y conducti-

vidad térmica del gas, así como de la dependencia de estas magnitudes de la temperatura, es decir, el estudio de las posibles soluciones del sistema [2], [3], para diversos casos de condiciones en los límites fue, a comienzos de los años cincuenta, objeto de interesantes trabajos que esclarecieron completamente la cuestión, por parte, entre otros, de von Mises (17), Meyerhoff (18), Ludford (19) y Gilbarg y Paulucci (20), donde se encontrarán, además, otras referencias de interés.

Con esto damos por terminada la exposición relativa a las ondas de choque de intensidad moderada, cuya estructura puede describirse mediante las ecuaciones de Navier-Stokes, pero antes de parar a considerar la de las ondas exotérmicas características de los fenómenos de combustión, vamos a referirnos brevemente, todavía, a varios aspectos importantes de las ondas de choque, con objeto de poner de manifiesto la naturaleza de los problemas matemáticos que plantea cada uno de ellos y la forma en que se trata de resolverlos.

3. ONDAS DE CHOQUE FUERTES

Por lo que respecta al primero de tales problemas, es claro que cuando no pueden aplicarse las ecuaciones de Navier-Stokes, a causa de la intensidad de los gradientes de las magnitudes fluidas a que da lugar el fenómeno del choque fuerte (21), la solución del problema está contenida en la ecuación integrodiferencial de Boltzmann que determina la ley estadística de distribución de velocidades de las moléculas en cada punto del seno de la onda (22).

(17) R. VON MISES: *On the Thickness of a Steady Shock Wave*. «*Journl Aer. Sci.*», 1950, págs. 561 y sigts.

(18) L. MEYERHOFF: *An Extension of the Theory of the One-Dimensional Shock Wave Structure*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1950, págs. 775 y sigts.

(19) G. S. S. LUDFORD: *The Classification of One-Dimensional Flows and General Shock Problem of a Compressible, Viscous, Heat-Conducting Fluid*. «*Jour. Aer. Sci.*», 1951, págs. 830 y sigts.

(20) D. GILBARG y D. PAOLUCCI: *The Structure of Shock Waves in the Continuum Theory of Fluids*. «*Jour. Rat. Mech. An.*», 1953, págs. 617-42.

(21) Para una discusión más detallada de las condiciones de aplicabilidad de las ecuaciones de Navier-Stokes ver, por ejemplo, el trabajo de LIEPMA, et al, ya citado, págs. 1316-17, o la obra de JAUMOTTE, pág. 16.

(22) Ver, por ejemplo, Chapman y Cowling, ya citado, o bien A. R. HOCHSTIM: *Kinetic Processes in Gases and Plasmas*. Acad. Press, New York, 1960, así como la obra de JAUMOTTE, págs. 175 y sigts.

En nuestro caso, al tratarse de un movimiento unidimensional estacionario, la ecuación integrodiferencial de Boltzmann se reduce a la siguiente:

$$v_x \frac{df}{dx} = G(f) - f \cdot L(f), \quad [30]$$

en donde $f(x, v_x, v_y, v_z)$ es la función de distribución que mide el número de moléculas que en el entorno de cada punto x tienen velocidades contenidas en el entorno de v_x, v_y, v_z , mientras que G y L son dos operadores integrales no lineales f , cuya forma depende de la ley de interacción molecular y cuya presencia en la ecuación [30] da lugar, como es bien sabido, a una dificultad básica para la integración de esta ecuación.

Las condiciones de contorno del problema son, evidentemente, que en cada uno de los extremos $x \rightarrow \pm \infty$, la función incógnita tienda a una distribución maxwelliana de la forma:

$$f(v_x, v_y, v_z) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m \frac{(v_x - v)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2kT}}, \quad [31]$$

correspondiente a las condiciones de equilibrio termodinámico delante y detrás de la onda, respectivamente, las cuales se relacionan entre sí mediante las condiciones de Rankine-Hugoniot. En esta expresión, n es el número de moléculas por unidad de volumen, relacionado con la densidad del gas por la expresión:

$$\rho = n \cdot m, \quad [32]$$

donde m es la masa de cada una de las moléculas (23) y k la constante de Boltzmann. Con esta notación es claro que n, v y T son las variables que delante y detrás de la onda deben tomar respectivamente los valores n_1, v_1, T_1 y n_2, v_2, T_2 .

La bien conocida dificultad de integración de la ecuación [30], incluso en un caso tan sencillo como el presente (24) obliga a recurrir

(23) Por sencillez de notación se emplea en esta sección para designar la masa de la molécula la misma letra m que en [1] se ha utilizado para designar el flujo de masa por unidad de sección

(24) Ver, por ejemplo, E. P. GROSS: *Recent Investigation of the Boltzmann Equation*. «Rarefied Gas Dynamics». Pergamon Press., 1960, págs. 139 y sigts.

a la búsqueda de soluciones aproximadas, bien sea mediante aproximaciones a la solución de la ecuación exacta, bien mediante la obtención de soluciones exactas de ecuaciones que constituyan aproximaciones satisfactorias de la de Boltzmann y que sean susceptibles de integración.

Una primera posibilidad, para tratar de resolver la cuestión que surge inmediatamente, consiste en utilizar aproximaciones de orden superior al primero (25), en el desarrollo de Enskog-Chapman para la solución de la ecuación de Boltzmann (26). Por ejemplo, aplicando la aproximación de segundo orden de Burnett, se obtienen ecuaciones similares a las de Navier-Stokes, pero con términos de viscosidad y de conductividad complementarios y muy complicados, que sólo permiten un laborioso tratamiento numérico del sistema diferencial de la onda (27).

Sin embargo, no tiene interés seguir adelante con este tipo de aproximaciones, ni siquiera al pasar a la de tercer orden como lo ha hecho Wang-Chang para esclarecer la cuestión de su aplicabilidad (28), porque, como se ha dicho todo el método de Enskog-Chapman está basado en la hipótesis de que la variación de las magnitudes termodinámicas es muy pequeña en distancias del orden de magnitud del camino libre medio, lo cual sólo es cierto para ondas muy débiles, que están satisfactoriamente representadas por la teoría de Becker cuyo desarrollo hemos visto.

Por ello, Mott-Smith (29) propuso una aproximación distinta a la ecuación de Boltzmann, consistente en postular que la función de distribución de velocidades es suma de dos distribuciones maxwellianas:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad [33]$$

(25) El cual conduce, como es sabido, a las ecuaciones de Navier-Stokes, cuya aplicabilidad está en entredicho.

(26) Ver Chapman y Cowling, antes citado.

(27) Ver K. ZOLLER: *Zur Struktur des Verdichtungsstosses*. «Z. Physik», 1951, págs. 1-38, y F. S. SHERMAN y L. TALBOT: *Experiment versus Kinetic Theory for Rarefied Gases*. «Rev. Gas Dyn.», 1960, ya citado, págs. 161 y sigts.

(28) C. S. WANG-CHANG: *On the Theory of Thickness of Weak Shock Waves*, Univ. de Michigan, 1948.

(29) H. M. MOTT-SMITH: *The Solution of the Boltzmann Equation for a Shock Wave*. «Phys. Rev.», junio 1951, págs. 885-92. Ver también CH. MUCKENFUSS: *Some Aspects of Shock Structure According to the Bimodal Model*. «Phys. Fluids», 1962, págs. 1325-36.

de la forma dada en [31], cuyas leyes de distribución son las correspondientes a los estados de equilibrio en ambos extremos de la onda, pero donde las densidades moleculares $n_1(x)$ y $n_2(x)$ correspondientes a cada una de ellas varían según una ley que está determinada por la forma en que las distribuciones de ambos extremos se mezclan progresivamente, al pasar de uno a otro, a través de la onda.

Es decir, como en el caso de Enskog-Chapman, se trata de buscar una solución aproximada de la ecuación de Boltzmann que sea de la forma:

$$f(x) = n_1(x) \left(\frac{m}{2\pi k T_1} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m \frac{(v_x - v_1)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2 k T_1}} + \left\{ \right. \\ \left. + n_2(x) \left(\frac{m}{2\pi k T_2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-m \frac{(v_x - v_2)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2 k T_2}} \right.$$

donde las incógnitas son $n_1(x)$ y $n_2(x)$, las cuales deben cumplir las condiciones de contorno:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow -\infty, n_1(x) \rightarrow n_1 = \frac{\rho_1}{m}; n_2(x) \rightarrow 0. \\ x \rightarrow +\infty, n_1(x) \rightarrow 0; n_2(x) \rightarrow n_2 = \frac{\rho_2}{m} \end{aligned} \right\} \quad [35]$$

El conocimiento de $n_1(x)$ y $n_2(x)$ determina, evidentemente, la estructura de la onda, puesto que todas las propiedades termodinámicas y del movimiento del gas en cada punto x pueden calcularse a partir de la función de distribución, según enseña la Teoría Cinética.

En particular, la densidad $\rho(x)$ y la velocidad $v(x)$ en cada punto de la onda, están determinadas por las expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x) &= m [n_1(x) + n_2(x)], \\ v(x) &= \frac{\rho_1 v_1}{\rho(x)} \end{aligned} \right\} \quad [36]$$

Para determinar $n_1(x)$ y $n_2(x)$ es necesario introducir la expre-

sión [34] en la ecuación [30] de Boltzmann y efectuar el cálculo del transporte de alguna propiedad molecular que no anule idénticamente su segundo miembro como ocurre con los invariantes clásicos del choque (masa, cantidad de movimiento y energía).

Ello introduce una arbitrariedad en las soluciones, que Mott-Smith resuelve utilizando como funciones moleculares v_x^2 y v_x^3 y comprobando que los resultados difieren poco en ambos casos.

El cálculo es muy laborioso y hay que postular una ley de interacción molecular que Mott-Smith supone ser la de Sutherland (30). Con ello llega, para la determinación de $n_1(x)$, a una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d v_1}{d \xi} + A v_1 (1 - v_1) = 0, \quad [37]$$

siendo

$$v_1 = \frac{n_1(x)}{n_1} \quad [38]$$

y

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad [39]$$

donde l es el camino libre medio molecular delante de la onda, y A un parámetro que depende del estado del gas a su entrada y del número de Mach de su propagación.

La solución de [37], con las condiciones de contorno $v_1 \rightarrow 1$ para $\xi \rightarrow -\infty$ y $v_1 \rightarrow 0$ para $\xi \rightarrow +\infty$ que resultan de [35], es:

$$v_1(\xi) = (1 + e^{A\xi})^{-1}, \quad [40]$$

donde el origen de coordenadas $\xi = 0$ se ha elegido en el punto

$$v_1 = \frac{1}{2}.$$

(30) Ver, por ejemplo, la obra de HIRSCHFELDER et al., citada en la página 349.

Análogamente,

$$v_2 = \frac{n_2(x)}{n_2} \quad [41]$$

está dado por la expresión:

$$v_2(\xi) = \frac{v_1}{v_2} (1 + e^{-\Lambda \xi})^{-1}. \quad [42]$$

Por último, si se utiliza para el espesor δ de la onda la misma definición empleada anteriormente en [20], aquél está dado por la expresión

$$\frac{\delta}{r} = \frac{4}{A}. \quad [43]$$

Por ejemplo, en el aire y a la temperatura ambiente, se obtiene para δ en función del número de Mach M_1 de la onda, la ley de variación dada por la curva representada en la figura IV-2, la cual se compara en ella con la que resulta de la teoría de Becker, descrita anteriormente. El gráfico muestra que el espesor dado por la solución de Mott-Smith para ondas fuertes es considerablemente mayor que el de Becker y que alcanza un valor límite mayor que cero cuando el número de Mach de la onda tiende a infinito.

Aun cuando la medición experimental del espesor y de los perfiles de las diversas magnitudes de una onda de choque fuerte es muy difícil de realizar, como puede imaginarse a la vista de los datos anteriores, durante los últimos años se han puesto a punto técnicas muy delicadas y precisas, basadas en métodos ópticos, anemométricos y electrónicos (31) cuyos resultados soportan satisfactoriamente las

(31) Sherman y Talbot, ya citados. También K. HANSEN et al.: *Thickness of Shock and Detonation Fronts and Rotational Relaxation at High Temperatures*. «*Rar. Gas Dyn.*», Acad. Press, Nueva York, 1961, págs. 593 y sigts., así como K. HANSEN et al.: *Thickness of Shock Fronts in Argon*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1960, págs. 913-16; D. A. RUSSEL: *Electrom-Beam Measurements of Shock-Wave Thickness*. «*Rar. Gas Dyn.*», 1965, Acad. Press, Nueva York, págs. 265-76;

conclusiones de la teoría de Mott-Smith, la cual ha sido extendida por Muckenfuss (32) al caso de otras leyes de interacción molecular, cuyos resultados se comparan satisfactoriamente con los de mediciones experimentales de helio y argón. Sus cálculos demuestran que el espesor de la onda crece indefinidamente al aumentar el número de Mach, después de pasar por un mínimo para un valor determinado de aquél.

Finalmente, Glansdorf (33) ha propuesto un método más laborioso que el de Mott-Smith pero que parece muy interesante.

Se trata del método llamado de los dos fluidos, el cual parte de una función de distribución análoga a la de Mott-Smith, pero emplea un tratamiento diferente en la integral de colisiones de la ecuación de Boltzmann, basado en la hipótesis de que el primer fluido $f_1(x)$ penetra en el segundo, pero no recíprocamente.

La principal ventaja del método estriba en que, además de proporcionar una buena representación del fenómeno para números de Mach elevados, extiende su validez a la zona de ondas débiles ($M_1 < 2$), donde el método de Mott-Smith no resulta aplicable.

Un tipo de aproximación distinta consiste, como se ha indicado, en sustituir la ecuación de Boltzmann por un modelo simplificado de la misma, que puede integrarse.

Esto ha sido llevado a la práctica en el Instituto Tecnológico de California por Liepmann, Narasimha y Chahine (34), empleando el modelo llamado de «relajación» de la ecuación de Boltzmann propuesto por Bhatnagar, Gross y Krook (35), el cual suele llamarse método BGK y consiste en sustituir los términos de colisión del se-

M. CARNAC: *Argon Shock Structure*. Idem id., págs. 240-49; H. W. LIEPMANN: *The Internal Structure of Shock Waves*, «Journey's in Science Univ.», New Mexico Press, 1967, págs. 185 y sigts.

(32) Ver la referencia de la página 360.

(33) P. GLANSDORFF: *Solution of the Boltzmann Equation for Strong Shock Waves by the two fluid model*, «Phys. Fluids», 1962, págs. 371-79. También S. ZIERING, F. EK. y P. KOCH: *Two-Fluid Model for the Structure of Neutral Shock Waves*, «Phys. Fluids», 1961, págs. 975-87.

(34) H. W. LIEPMANN, R. NARASIMHA y M. T. CHAHINE: *Structure of a Plane Shock Layer*, «Phys. Fluids, Nov.», 1962, págs. 1313-24. Ver también M. T. CHAHINE: *The Structure of Strong Shock Waves in the Krook Collision Model*, «Rar. Gas Dyn.», Acad. Press, 1963, págs. 260-73.

(35) P. L. BHATNAGAR, E. P. GROSS y M. KROOK: *Model for Collision Processes in Gases*, «Phys. Rev.», 1954, pág. 514.

gundo miembro de aquélla por una expresión de relajación hacia una distribución localmente maxwelliana, con lo cual se obtiene una ecuación de la forma:

$$v_x \frac{df}{dx} = A \cdot n \cdot (F - f), \quad [44]$$

donde n es el número local de moléculas por unidad de volumen, F es una distribución de la forma [31] y A un parámetro que puede depender del estado del gas.

Pero la expresión [44], si bien representa una importante simplificación respecto de [30], sigue siendo una ecuación integro-diferencial no lineal, puesto que n , como v y T que están implícitas en F , dependen de la función de distribución f .

Por ello, su integración directa, por métodos analíticos o numéricos, resulta prácticamente inabordable, de modo que para obtener la solución hay que proceder por iteración. Esto se logra integrando formalmente la ecuación [44], con lo que se obtiene:

$$f(x, v_x, v_y, v_z) = \int_{-\infty}^x \frac{A \cdot n \cdot F}{v_x} \left[\exp \left(- \int_{x'}^x \frac{A \cdot n}{v_x} dx'' \right) \right] dx'. \quad [45]$$

Postulando una distribución inicial de $n(x)$, $v(x)$ y $T(x)$, por ejemplo, la que proporciona la solución de Navier-Stokes, se obtiene de [45] una primera aproximación para f , la cual permite calcular, a su vez, una segunda aproximación de n , v y T , que llevada al segundo miembro de [45] da una segunda aproximación para f y así sucesivamente.

En el trabajo citado, los autores dan el resultado de los cálculos efectuados mediante un ordenador IBM 7090, para varios casos típicos, así como su comparación con el resultado correspondiente a la solución de Navier-Stokes.

Esta comparación muestra que la coincidencia entre ambas soluciones es muy satisfactoria en la zona de compresión, hasta el punto

de máxima pendiente, mientras que en la región próxima al estado inicial, salvo para números de Mach inferiores a 2, la discrepancia es muy considerable, porque la solución de Liepmann, Narasimha y Chahine da perfiles de distribución de las velocidades, densidades y temperaturas mucho más tendidos que la de Navier-Stokes; es decir, que el espesor de la onda es mucho mayor en aquella solución que en ésta.

Los autores justifican esta diferencia de comportamiento de la solución de Navier-Stokes en ambos extremos porque, del lado de la compresión, la relación $\mu \cdot \frac{dv}{dx} / p$ es pequeña y siendo éste el parámetro del desarrollo de Enskog-Chapman que sirve de base para deducir las ecuaciones de Navier-Stokes, se concluye la aplicabilidad de tales ecuaciones en la zona de compresión. Por el contrario, en el otro extremo de la onda, dicho parámetro puede llegar a ser incluso mayor que la unidad, por lo que falla aquella aproximación.

Dichos autores han perfeccionado posteriormente el método de iteración, reduciendo el tiempo de cálculo en términos que les permite efectuar un gran número de pasos, lo que hacen para numerosos casos de interés, con objeto de comprobar, además, la convergencia del proceso. El trabajo (36) donde publican estos resultados, ilustra muy bien el tipo de dificultades que se encuentran en esta clase de procedimientos.

Por último; un sistema diferente de resolución aproximada de la ecuación de Boltzmann, ensayado previamente en el estudio de otros problemas sencillos de la Dinámica de Gases (37), consiste en la aplicación hecha por Haviland (38) del método de Monte Carlo, cuyo empleo tiende a extenderse, al caso de la estructura de la onda de choque.

La limitada experiencia que se posee de esta aplicación parece mostrar una coincidencia satisfactoria con los resultados previamente citados de Ziering para números de Mach no superiores a 2 y con los de Mott-Smith para valores más elevados.

(36) M. T. CHAHINE y R. NARASIMHA: *Exact Numerical Solution of the Complete BGK Equation for Strong Shock Waves*. «*Rar. Gas Dyn.*», Acad. Press., 1965, págs. 140-60.

(37) J. K. HAVILAND y M. L. LAVIN: *Application of the Monte Carlo Method to Heat Transfer in a Rarefied Gas*. «*Phys. Fluids*», 1962, págs. 1399-1405.

(38) J. K. HAVILAND: *Determination of Shock-Wave Thicknesses by the Monte Carlo Method*. «*Rar. Gas Dyn.*», Acad. Press, Nueva York, 1962, págs. 274-96.

Como resumen de todo esto, la figura IV-4, tomada de un trabajo de Toba y Melnick (39) muestra los valores obtenidos para el recíproco del espesor de la onda, forma en que suele expresarse esta magnitud para evitar la asíntota en el origen, en función del número de Mach del choque, según los resultados de las diversas teorías expuestas y de varias mediciones experimentales en argón.

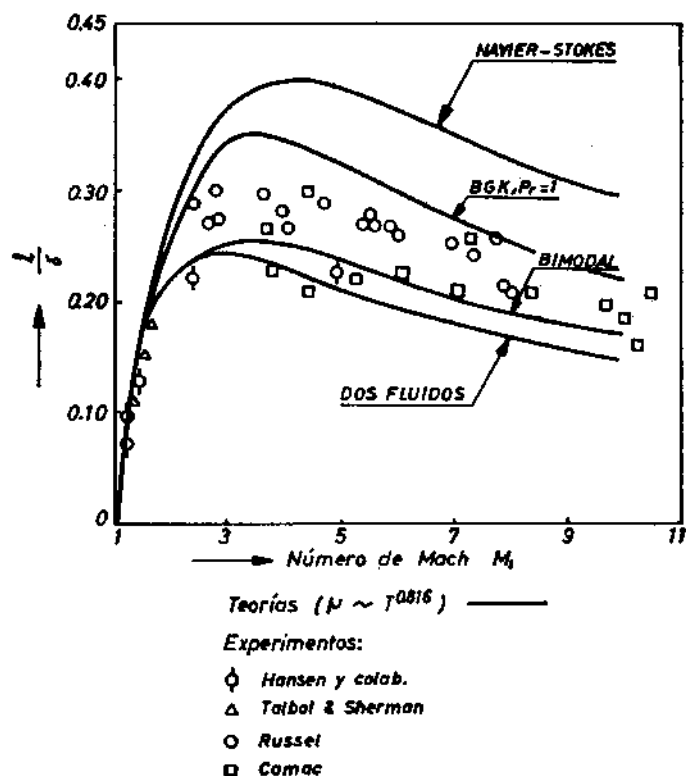


Fig. IV-4.—Espesor de la onda de choque. Comparación entre resultados teóricos y experimentales.

Para terminar este aspecto de la cuestión, diremos que un interesante trabajo de revisión hasta 1962, con abundante bibliografía y en

(39) K. TOBA y J. D. MELNICK: *Two-Fluid Model for Shock Wave Structure*. «Phys. Fluids», 1965, págs. 2158-57.

el que se comentan todos estos puntos, es el publicado por el profesor Talbot de la Universidad de California (40).

Bibliografía técnica y experimental más reciente se encontrará en los Proceedings del V Simposio Internacional sobre Dinámica de Gases Enrarecidos, celebrado en la Universidad de Oxford, en 1965 (41) y en las obras de Zeldovich-Raizer y de Jaumotte previamente mencionadas.

Hasta aquí se ha considerado solamente el caso de un gas puro. Cuando se trata de una mezcla de gases, a los efectos de la viscosidad y de la conductividad es necesario añadir el de la difusión entre las diferentes especies que forman la mezcla, particularmente si los pesos moleculares difieren considerablemente entre sí.

Efectivamente; si bien es claro que, en la hipótesis de que no se produzcan reacciones químicas, las concentraciones de los diversos componentes a la salida de la onda deben ser las mismas que había en la entrada, sin embargo, en el interior de aquélla deben originarse diferencias de concentración, puesto que los elevados gradientes que allí se producen favorecen los efectos de la difusión.

Por ejemplo; en el caso de una mezcla binaria, la concentración de la especie más ligera aumenta en el seno de la onda, respecto de la que tiene en las zonas de equilibrio delante y detrás de ella (42).

Por otra parte, la difusión, al igual que la velocidad o la conductividad, tiende a aumentar el espesor del choque.

El problema, cuyo planteamiento se complica sensiblemente, a causa de la necesidad de tomar en consideración una ecuación complementaria para la difusión en el caso más simple de una mezcla binaria, ha sido analizado aplicándole algunos de los métodos anteriormente descritos.

En particular, Sherman (43) lo ha resuelto aplicando las ecuaciones de Navier-Stokes, lo que lleva a resultados paradójicos en el caso de pesos moleculares muy diferentes. Tales resultados confirman la

(40) L. TALBOT: *Survey of the Shock Structure Problem*. «ARS Jour.», julio 1962, págs. 1009-16.

(41) «Rar. Gas Dyn.», Ed. por L. Brunchin, vols. I y II. Acad. Press., 1967.

(42) Ver ZELDOVICH-RAIZER, ya citado, págs. 485 y sigts.

(43) F. S. SHERMAN: *Shock Wave Structure in Binary Mixtures of Chemically Inert Perfect Gases*. «J. Fluid Mech.», 1960, págs. 465-80.

no aplicabilidad de aquellas ecuaciones, como ha puesto de manifiesto Sinclair (44).

Por ello, el tratamiento concreto, en este caso, consiste en recurrir a la Teoría Cinética, incluso para números de Mach débiles, como lo han hecho, en particular, con resultados satisfactorios, Oberay (45), Fujimoto (46) y Oguchi (47), a cuyos trabajos remitimos al lector, que encontrará en ellos referencias complementarias.

4. ONDAS DE CHOQUE CON EFECTOS DE RELAJACIÓN

Los estudios que se han realizado hasta aquí no toman en consideración los efectos de relajación debidos a los grados de libertad internos de las moléculas: rotación, vibración, disociación, reacciones químicas entre diversas especies del gas, ionización y excitación de los niveles electrónicos.

Sin embargo, tales efectos pueden llegar a ser muy importantes a las elevadas temperaturas que se alcanzan detrás de las ondas de choque fuertes y alterar de modo considerable las condiciones del estado del gas del lado de la compresión, así como el espesor y la estructura interna del choque.

Por ejemplo; en el aire, a temperaturas del orden de los 3.000° K, que corresponden a un número de Mach de 7 con los grados de libertad internos «congelados», empiezan a ser importantes los efectos de la disociación, a los que siguen los de oxidación del nitrógeno, mientras que los efectos de la ionización sólo adquieren importancia a partir de los 15.000 a 20.000° K.

El estudio de los efectos de la relajación tiene gran importancia tecnológica en relación con los modernos problemas de la Aerodinámica hipersónica, como, por ejemplo, en el retorno de los vehículos

(44) S. R. M. SINCLAIR: UTIAS REPORT núm. 130, 1968, Ints. Aerospace Sciences, Toronto, Canadá.

(45) M. M. OBERAY: *Kinetic-Theory Approach to the Problem of Shock-Wave Structure in a Binary Mixture*. «Phys. Fluids.», 1965, págs. 826-33, así como B. S. TANENBAUM y M. D. SCOTT: *Comments on Oberay's Paper*, y la respuesta de éste en la misma publicación, 1966, págs. 1048-49.

(46) T. FUJIMOTO: *Shock-Wave Structure in Binary Gas Mixture with no Chemical Reaction*. «Rar. Gas Dyn.», Acad. Press., Nueva York, 1965, páginas 223-39.

(47) H. OGUCHI: *A Kinetic Model for a Binary Mixture and Its Application to a Shock Structure*. «Rev. Gas Dyn.», 1967, vol. I, págs. 745 y sigts.

espaciales a la atmósfera, así como mucho interés científico, porque, como ya se ha indicado al comienzo de este Capítulo, la onda de choque fuerte es un instrumento ideal para el estudio de los mecanismos y de la cinética de los diversos procesos de relajación, tanto desde el punto de vista teórico como en los ensayos experimentales mediante el empleo de tubos de choque (48).

El cálculo de las condiciones del gas detrás de la onda se efectúa, evidentemente, mediante la aplicación de las condiciones de Rankine-Hugoniot, pero introduciendo en la ecuación de estado del gas los efectos de los grados de libertad internos, en la forma que se explicó en el capítulo II.

A título de ejemplo de las alteraciones que pueden producir los efectos de la relajación en el estado del gas detrás de la onda, la figura IV-5 (49) muestra la relación entre los valores de las diversas

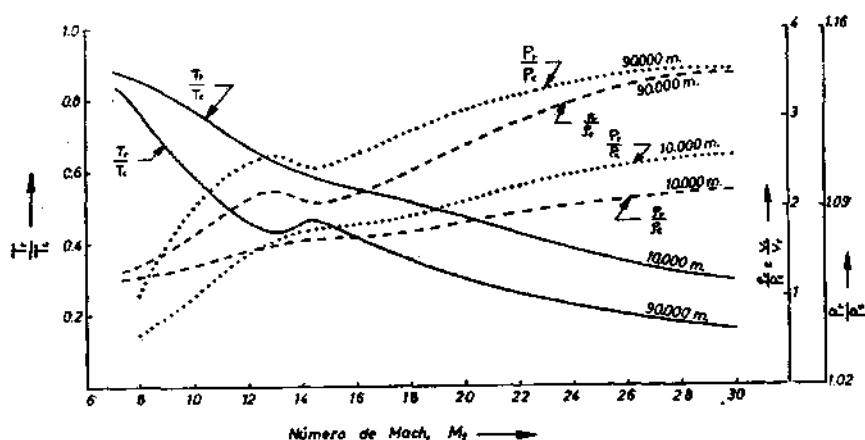


Fig. IV-5.—Influencia de la relajación en las características del salto a través de una onda de choque en el aire.

magnitudes y los teóricos que se alcanzarían en un gas «congelado», para alturas de 10.000 y 90.000 metros, respectivamente, en la atmós-

(48) Para bibliografía sobre la materia, ver las obras de Zeldovich-Raize, de Jaumotte, de Greene-Toennies y de Stupochenko-Losev-Osipov, ya citadas, así como el trabajo de E. Becker sobre los efectos de la relajación en la dinámica de gases que se menciona en el epígrafe 22 del capítulo I.

(49) Valores extraídos de la obra de R. B. MORRISON y M. J. INGLE: *Design Data for Aeronautics and Astronautics*. J. Wiley, Nueva York, 1962.

fera normal, a las que corresponden las presiones de 198 y $1,36 \cdot 10^{-3}$ milímetros de mercurio.

En particular, esta figura muestra que la temperatura puede disminuir mucho con respecto al valor ideal en un gas perfecto. Por ejemplo; a la presión más baja, dicha temperatura es inferior a la mitad del valor ideal a partir de un número de Mach de 11 aproximadamente.

Análogamente, la densidad aumenta mucho respecto del valor ideal y, consiguientemente, en virtud de la ecuación [1], la velocidad del gas respecto de la onda se reduce en la misma proporción, mientras que, por el contrario, las variaciones de la presión son mucho más pequeñas, circunstancia esta que facilita el cálculo de las condiciones de equilibrio terminodinámico detrás de la onda.

Por lo que respecta a la alteración en la estructura interna de ésta, hay que hacer notar, en primer lugar, que la excitación de los grados internos requiere, para alcanzar el equilibrio termodinámico, un número de choques moleculares muy superior, generalmente varios órdenes de magnitud mayor, que el de los pocos choques que, como hemos visto, se produce en el seno de una onda fuerte con los grados internos congelados.

La primera consecuencia de esto es que el espesor de una onda de choque con efectos de relajación es, en general, mucho mayor que el de una onda sin ellos, al punto de que, en muchos casos, pueden separarse en aquélla una zona de compresión congelada, cuya estructura se estudia por los procedimientos descritos en el epígrafe precedente, seguida de una zona de relajación mucho más extensa.

Ocurriendo, además, que, puesto que el espesor de ésta es muy grande con respecto al de la primera, su estructura puede analizarse mediante aplicación de las ecuaciones de Navier-Stokes, sin necesidad de hacer apelación, como allí, a la Mecánica Estadística.

Es más, como se puso de manifiesto en el capítulo III para las ondas de detonación, en la zona de relajación los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica son, en general, despreciables a los de la relajación, puesto que los gradientes de la velocidad y de la temperatura son, evidentemente, mucho menores que en el seno de la primera zona.

Con ello sucede que las tres condiciones de Rankine-Hugoniot son aplicables no solamente a los extremos de esta zona, sino en cada uno de sus puntos, al desaparecer los términos de conductividad térmica

y de viscosidad de las ecuaciones [2] y [3], con lo cual aquel sistema se sustituye por el siguiente :

$$\rho v = m; \quad [46]$$

$$p + m v = p_1 + m v_1; \quad [47]$$

$$h + \frac{1}{2} v^2 = h_1 + \frac{1}{2} v_1^2, \quad [48]$$

en donde la expresión h sustituye al término $C_p T$, porque en este caso hay que utilizar, evidentemente, la forma general de la entalpía del gas.

Análogamente, la ecuación [4] de los gases perfectos deberá sustituirse aquí por una de forma más general, que tome en cuenta la influencia de los efectos de la relajación en el estado del gas.

Antes de desarrollar este aspecto, veamos que la eliminación de la velocidad v entre las ecuaciones [46] y [47], proporciona la siguiente relación entre p y $\frac{1}{\rho}$, válida en cualquier punto de la zona de relajación :

$$\frac{p}{p_1} - 1 = \gamma M_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right), \quad [49]$$

lo que muestra que, en el diagrama de Rankine-Hugoniot de la figura IV-6, la solución en la zona de relajación está representada por la recta de Rayleigh que une el punto 1' correspondiente al estado del gas en la cara de compresión de una onda de choque con grados internos «congelados», con el punto 2 situado sobre la curva de Rankine-Hugoniot correspondiente a los estados del gas en equilibrio termodinámico.

En cuanto al perfil de la onda, aparecerá, en general, como el que se muestra esquemáticamente en la figura IV-7, por ejemplo, para la distribución de temperaturas.

Constituye una excepción a este esquema simplificado, en el que se separan completamente los efectos de la viscosidad y conductividad de los de relajación, el caso de la excitación de los grados de rotación, los cuales alcanzan el equilibrio muy rápidamente y los de vibra-

ción molecular a temperaturas suficientemente elevadas (50). En este caso hay que tener en cuenta los efectos del acoplamiento entre ambas zonas, como lo han hecho Talbot y Scala (51), empleando las ecuaciones de Navier-Stokes y, más recientemente, Brau, Simons y Ma-

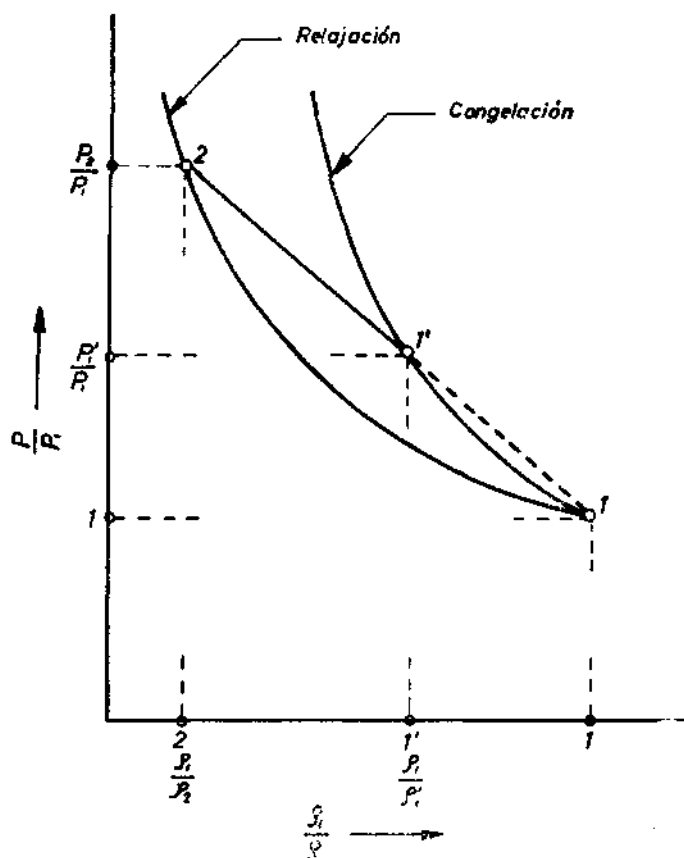


Fig. IV-6.—Trayectoria de la zona de relajación en el plano de Rankine-Hugoniot.

(50) Para un trabajo de revisión sobre los efectos de relajación de vibración molecular en la dinámica de gases en general, ver el reciente artículo de J. W. RICH y CH. E. TREANOR: *Vibrational Relaxation in Gas Dynamic Flows*, «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1970, págs. 355-96, con abundante bibliografía.

(51) L. TALBOT y S. M. SCALA: *Shock Wave Structure in a Relaxing Diatomic Gas*, «Rev. Gas Dyn.», 1961, págs. 603-22, y *Shock Wave Structure with Rotational and Vibrational Relaxation*, Idem id., 1963, págs. 297-314.

comber, así como Venkataraman y Morse (52), mediante la extensión del modelo bimodal de Mott-Smith anteriormente descrito; y Turgotte (53) mediante una generalización del modelo de los fluidos, también mencionados antes.

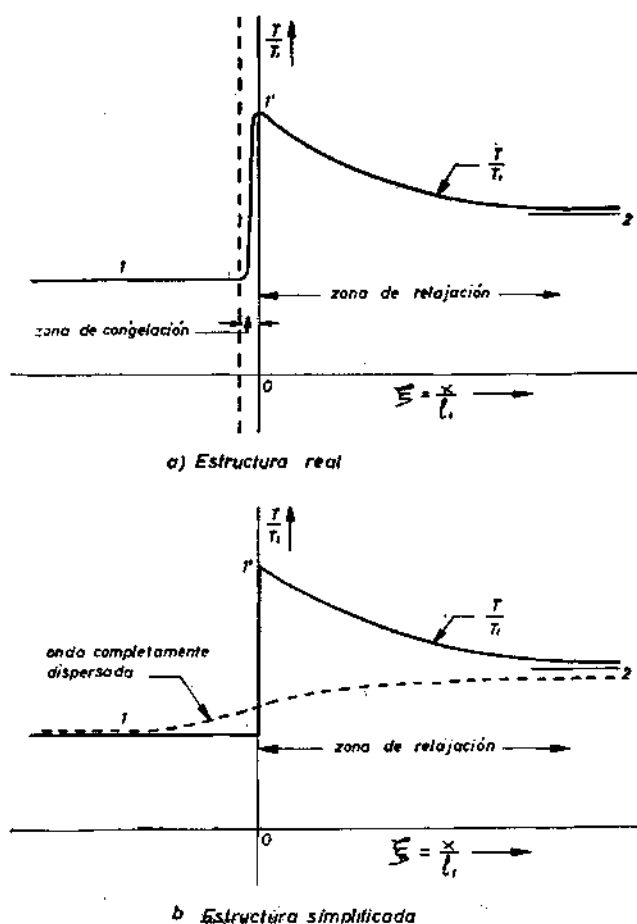


Fig. IV.7.—Estructura de una onda de choque con relajación.

(52) C. A. BRAU, G. A. SIMONS y H. K. MACOMBER: *Structure of Shock Waves in Diatomic Gases*; R. VENKATARAMAN y T. E. MORSE: *Kinetic Theory of Shock Structure in a Gas with Internal Degrees of Freedom*. «Rev. Gas Dyn.», supl. 5, vol. I, 1969, págs. 343-51 y 353-65, respectivamente.

(53) D. L. TURGOTTE: *Structure of Strong Waves in Diatomic Gases*. Idem id., págs. 331-41.

Volviendo ahora al sistema [46] a [48], consideremos el caso más sencillo de una única variable de relajación, que puede ser, por ejemplo, la energía interna de vibración molecular, la fracción de disociación o de ionización del gas, etc., y cuyo valor designaremos por α .

Como, por hipótesis, hay efectos de relajación, ello quiere decir que para valores dados de la presión p y de la densidad ρ del gas, α tiene un valor distinto del α_e que correspondería al estado de equilibrio termodinámico del mismo.

En cuyo caso, la entalpía h del gas será una función no sólo de la presión p y de la densidad ρ , sino también de α :

$$h = h(p, \rho, \alpha), \quad [50]$$

expresión que debe sustituir en este caso a la ecuación de estado de los gases perfectos y falta una ecuación adicional para que el sistema sea determinado.

Esta es precisamente la «ecuación de relajación»:

$$\frac{d\alpha}{dt} = f(p, \rho, \alpha) \quad [51]$$

que da la cinética de la variación α en función del estado del gas.

En particular, es claro que el valor de equilibrio debe cumplir, por definición, la condición:

$$f(p, \rho, \alpha_e) = 0. \quad [52]$$

Entonces, el problema se reduce a la integración de la ecuación diferencial ordinaria que se obtiene, por ejemplo, para el cálculo de la velocidad v en función de la distancia x , al eliminar p , ρ y α del sistema [46], [47], [48] y [51].

Una vez obtenido v , el cálculo de las demás variables resulta inmediato.

Por lo que respecta a las condiciones en los límites, es claro que son las siguientes:

$$x \rightarrow -\infty : p, \rho, v \rightarrow p_1, \rho_1, v_1; \alpha \rightarrow \alpha_{e1}; \quad [53]$$

$$x \rightarrow +\infty : p, \rho, v \rightarrow p_2, \rho_2, v_2; \alpha \rightarrow \alpha_{e2}. \quad [54]$$

magnitudes que se encuentran relacionadas entre sí por las condiciones de Rankine-Hugoniot, incluida la condición de equilibrio termodinámico en ambos extremos de la onda.

Por lo demás, la generalización al caso de varios grados de libertad de relajación, en lugar de uno, resulta conceptualmente sencilla, si bien la complejidad operativa aumenta de modo considerable.

Las dos cuestiones que se plantean en relación con el problema de las ondas de relajación son, a la vista de todo lo anterior, las siguientes:

En primer lugar, saber cuál es la forma de la ecuación de relajación [51] para cada proceso y cómo se determina ésta.

Por lo que respecta a este punto, es evidente que dicha forma depende del mecanismo fisicoquímico que dé lugar al proceso en estudio. En tal sentido, durante los últimos años se han llevado a cabo un gran número de estudios teóricos y experimentales para determinar la índole de aquellos mecanismos y la forma que de ello resulta para las ecuaciones de relajación correspondiente a los procesos de vibración molecular, disociación, ionización y reacción química entre las diversas especies que se forman, así como los valores de los diversos parámetros que intervienen en aquéllas, especialmente por lo que respecta a gases como el oxígeno; el nitrógeno, el anhídrido carbónico, el aire y otros de interés tecnológico especial.

Resulta imposible ofrecer aquí una bibliografía suficientemente representativa sobre la materia, por lo que remitimos al lector a las obras citadas al comienzo de este epígrafe, donde podrá hallar referencias de interés (54).

En especial, en el caso de pequeñas desviaciones del estado de equilibrio, suele adaptarse para la ecuación de relajación una expresión de la forma:

$$\frac{d\alpha}{dt} \equiv v \frac{d\alpha}{dx} = \frac{\alpha_\infty - \alpha}{\tau_r}, \quad [55]$$

cuya validez acredita la Termodinámica de los Procesos Irreversibles. En ella, τ_r es un «tiempo de relajación» que depende del estado

(54) Ver también, por ejemplo, el trabajo ruso de T. V. BAZHENOVA et al.: *Shock Waves in Real Gases*. Traduc. NASA TT F-585, año 1969.

del gas (55) y cuya determinación en cada caso es uno de los objetivos principales de los estudios mencionados.

La segunda cuestión fundamental es la referente a la existencia, unicidad y propiedades de las soluciones del sistema de ecuaciones de las ondas con relajación.

El desarrollo completo de estas cuestiones obligaría a tratar el problema con una extensión muy superior a la que corresponde al propósito del presente trabajo.

Por ello, nos limitaremos aquí a enunciar las conclusiones más importantes que resultan del análisis matemático del problema, remitiendo a la extensa bibliografía que existe sobre la materia, para un estudio más pormenorizado (56).

En primer lugar, en los procesos de relajación hay que distinguir dos velocidades de propagación del sonido distintas: una, que llamaremos a_s , con los grados de relajación «congelados» y otra, que llamaremos a_e , correspondiente a la hipótesis de que el estado de equilibrio termodinámico en cada punto se alcanza instantáneamente, demostrándose (57) que la primera es siempre mayor que la segunda:

$$a_e > a_s. \quad [56]$$

Resulta entonces que, al comparar la velocidad v_1 del gas delante de la onda con la del sonido, para determinar el régimen del movimiento, es necesario tomar en consideración los tres casos siguientes:

(55) Para el desarrollo más completo de la cuestión, ver los trabajos de R. E. DUFF que se mencionan más adelante.

(56) Ver en particular, además de las obras de GREENE y TOENNIES y de STUSO-CHENHO et al. ya citadas, los siguientes trabajos, que proporcionan una información bastante completa sobre el tema, así como la bibliografía que se cita en el último de ellos. N. H. JOHANNESSEN: *Analysis of Vibrational Relaxation Regions by Means of the Rayleigh-Line Method*. «J. Fluid Mech.», 1961, págs. 25-32; P. A. BLYTHE: *Comparison of Exact and Approximate Methods for Analysing Vibrational Relaxation Regions*. Idem id., 1961, págs. 33-47; J. F. CLARK y J. B. RODGERS: *Shock Wave in a Gas with Several Relaxing Internal Energy Modes*. Idem id., 1965, págs. 591-610. Finalmente, E. BECKER y G. BÖHME: *Non-equilibrium Flows*, cap. 2, págs. 71-117, serie de *Gasdynamics*. Vol. I, Marcel Dekker, Nueva York, 1969.

(57) Ver, por ejemplo, L. J. F. BROER: *Non-equilibrium Flows*. Cap. I, páginas 1-31, de la serie de *Gasdynamics*, parte II, Marcel Dekker, Nueva York, 1970.

tes, en lugar de los dos únicos posibles (supersónico y subsónico) en la Dinámica de Gases clásica:

1.º	$v_1 > a_e$,	Régimen supersónico;
2.º	$a_e > v_1 > a_e$,	Régimen intermedio;
3.º	$a_e > v_1$,	Régimen subsónico.

Además, se demuestra que si se cumple la condición 1.ª, es decir, en régimen supersónico respecto del estado del gas delante de la onda con los grados de libertad internos congelados, la solución no trivial del sistema [46], [47], [48] y [51], que satisface las condiciones en los límites [53] y [54], consiste, como ilustra la figura IV-7, b) para el perfil de la temperatura, en un salto inicial del estado a un estado 1', equivalente a una onda de choque sin relajación, seguida de una zona de relajación en donde se produce la transición continua del estado 1' al estado final 2 de equilibrio termodinámico.

Por el contrario, en el segundo caso, es decir, si la velocidad del gas delante de la onda está comprendida entre las dos velocidades del sonido [56] para el régimen congelado y en equilibrio termodinámico, respectivamente, el sistema anterior admite una solución continua entre $x = -\infty$, $x = +\infty$, como ilustra esquemáticamente la línea de trazos de la figura IV-7, b).

Esta solución constituye lo que Lighthill llamó, en un notable trabajo altamente esclarecedor (58), una onda «completamente dispersada», por oposición a la onda con discontinuidad inicial, a la que llamó «parcialmente dispersada».

Finalmente, en el tercer caso, en que la velocidad inicial sea subsónica respecto del estado de equilibrio termodinámico inicial, se comprueba que no existe solución no trivial del sistema, lo que se confirma además independientemente por el hecho de que tal solución violaría el segundo principio de la Termodinámica.

Debe advertirse, por otra parte, que las dos soluciones esquemáticas expuestas pueden presentar diversas variantes según los casos, entre las que se incluye, por ejemplo, la existencia de máximos de la temperatura, mayores que T'_1 , en la zona de relajación, como puede comprobarse en la bibliografía citada.

En cuanto a la aplicación a casos prácticos de todo ello, aparte de

(58) M. J. LIGHTHILL: *Viscosity Effects in Sound Waves of Finite Amplitude*. «Survey in Mechanics», Cambridge Univ. Press, 1956, págs. 250-351.

las referencias previamente citadas, en las que se trata específicamente el caso de la energía de vibración molecular, se han efectuado numerosos estudios teóricos y experimentales de los efectos de la disociación y de la ionización, tanto sobre modelos esquemáticos como sobre gases reales.

El punto de partida para los efectos de la disociación lo constituye otro célebre trabajo de Lighthill (59), sobre un modelo de gas ideal disociado, del que Böhme ha hecho recientes aplicaciones, obteniendo soluciones de ondas total o parcialmente dispersadas, para un conjunto de casos típicos (60).

Otros trabajos de interés sobre la disociación son el de Heller (61), que analiza el mecanismo de la disociación de un gas biatómico, y los de Duff, para un gas ideal (62) y para el aire, donde se incluyen, en este caso, los efectos de las reacciones de oxidación del nitrógeno (63). En particular, estos trabajos incluyen un modelo de cálculo numérico con ordenador, aplicable a otros muchos casos.

En cuanto a la ionización, problema bastante más complicado que el de la disociación, constituyen referencias de interés los trabajos de Lin et al. (64), así como los de Jaffrin (65), Morgan y Morrison (66) y Taussing (67).

(59) M. J. LIGHTHILL: *Dynamics of a Dissociating Gas. Part I. Equilibrium Flow*. «*Jour. Fluid. Mech.*», 1957, págs. 1-23.

(60) G. BÖHME: *Verdichtungstöße in einem idealen dissoziierenden Gas*. «*Ing. Arch.*», 1967, págs. 371-81.

(61) L. HELLER: *Equilibrium Statistical Mechanics of Dissociating Diatomic Gases*. «*Phys. Fluids*», 1959, págs. 147-52.

(62) R. E. DUFF: *Relaxation Time for Reactions Behind Shock Wave Profiles*. «*Phys. Fluids*», 1958, págs. 242-45.

(63) R. E. DUFF y N. DAVIDSON: *Calculation of Reaction Profiles behind Steady State Shock Waves. II. The Dissociation of Air*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1959, págs. 1018-27.

(64) SH. CH. LIN et al.: *Rate of Ionization behind Shock Waves in Air. I. Experimental Results. II. Theoretical Interpretations*. «*Phys. Fluids*», 1962, páginas 1633-48, y 1963, págs. 355-75, respectivamente.

(65) M. Y. JAFFRIN: *Shock Structure in a Partially Ionized Gas*. «*Phys. Fluids*», 1965, págs. 606-25.

(66) E. J. MORGAN y R. D. MORRISON: *Ionization Rates behind Shock Waves in Argon*. «*Phys. Fluids*», 1965, págs. 1608-15.

(67) R. T. TAUSSING: *Normal Ionizing Shock Waves*. «*Phys. Fluids*», 1965, págs. 1616-27.

5. ONDAS DE CHOQUE CON EFECTOS DE RADIACIÓN

En ondas de choque muy intensas, como las que se producen, por ejemplo, en las explosiones nucleares (68), en los movimientos hipersónicos durante la penetración de cápsulas especiales en la atmósfera de la tierra o de otros planetas (69), o en la entrada de meteoritos en la atmósfera de la tierra o de otros planetas (69), o en la entrada de meteoritos en la atmósfera (70), se alcanzan temperaturas de decenas de miles de grados, que dan lugar a que los efectos de la radiación del gas caliente, en las características de la onda, lleguen a ser importantes.

Lo mismo ocurre en ondas de menor intensidad, cuando se producen en masas de gas muy calientes como, por ejemplo, en los gases de combustión de los cohetes.

En tales condiciones, el espesor de la masa de gas en que se pone de manifiesto el efecto de la radiación es considerablemente mayor que el correspondiente al salto de la presión, temperatura, etc., incluida la zona de relajación, porque el camino libre medio de los fotones es mucho mayor que el de las moléculas, lo cual permite considerar el choque propiamente dicho como una discontinuidad, reduciendo a cero el espesor de la zona de salto.

Lo que diferencia esencialmente este caso de todos los que hemos considerado hasta aquí, es el hecho de que la radiación se propaga en forma prácticamente instantánea con respecto a la velocidad propia del movimiento del gas, por lo que su efecto se anticipa a las masas no alcanzadas aún por el choque, perturbando el estado de las mismas antes de que les alcance el salto de la onda.

Con ello, la estructura de la onda aparece como la que muestra:

(68) H. L. BRODE: *Gas Dynamic Motion with Radiation: A General Numerical Method*. «Astronautica Acta», 1969, págs. 433-44.

(69) Ver. por ejemplo, J. D. ANDERSON: *An Engineering Survey of Radiating Shock Layers*. «AIAA Jr.», 1969, págs. 1665-75; S. I. RASOOL: *Structure of Planetary Atmospheres*. «AIAA Jr.», 1963, págs. 6-10; G. M. THOMAS y W. A. MENARD: *Experimental Measurements of Non-equilibrium and Equilibrium Radiation from Planetary Atmospheres*. «AIAA Jr.», 1966, págs. 227-37.

(70) M. F. ROMIG: *Physics of Meteor Entry*. «AIAA Jr.», 1965, págs. 385-94. También V. P. KOROBENNIKOV, P. I. CHUSKEIN y L. V. SHURSHALOV: *Gas Dynamics of the Flight and Explosion of Meteorites*. «Astronautica Acta», 1972, págs. 339-48.

esquemáticamente la figura IV-8 (71). En ella puede verse que, como se ha dicho, la radiación lo que hace es calentar la masa de gas situada delante del choque hasta la temperatura T'_1 , con lo que la temperatura T'_2 detrás del salto, también se eleva por encima de la T_2 que correspondería al choque sin radiación para el mismo número de Mach y para la misma temperatura inicial.

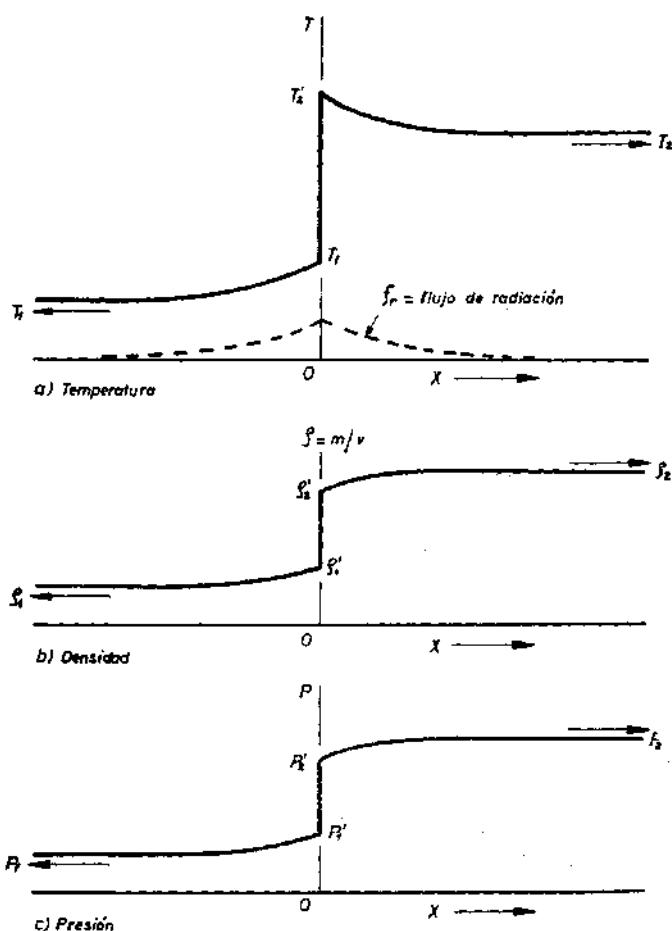


Fig. IV-8.—Efecto esquemático de la radiación en la estructura de la onda de choque.

(71) YA. B. ZELDOVICH y YU. P. RAIZER: *Shock Waves and Radiation*. «An. Rev. Fluid. Dyn.», 1970, págs. 385-412.

Por lo que respecta a las demás variables, al calentarse el gas delante de la onda, aumenta su presión, aquél se frena y, consiguientemente, aumenta la densidad, como se ilustra en la citada figura.

El análisis matemático del caso no ofrece dificultad conceptual de consideración, pero su tratamiento se complica sustancialmente, a causa de la naturaleza peculiar de los fenómenos de radiación, cuyo efecto en un punto depende de lo que ocurra en un amplio espacio en torno al mismo, lo que conduce, en general, a problemas en ecuaciones íntegro diferenciales (72).

En cuanto a la formulación del mismo, al haberse excluido, como hemos dicho, los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica, es claro que subsiste el sistema [46], [47] y [48], sin más que incorporar en él los términos que corresponden a los efectos de radiación, los cuales, para la índole de los problemas que aquí interesa analizar y que mencionamos al comienzo, se reducen al flujo de energía radiante f_r en la ecuación de la energía (73), con lo cual aquel sistema se sustituye por el siguiente:

$$\rho v = m \equiv \rho_1 v_1 = \rho_2 v_2; \quad [56]$$

$$p + m v = p_0 \equiv p_1 + m v_1 = p_2 + m v_2; \quad [57]$$

$$h + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{m} f_r = h_0 \equiv h_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = h_2 + \frac{1}{2} v_2^2, \quad [58]$$

puesto que el flujo de energía radiante f_r debe ser nulo en los límites $x \rightarrow \pm \infty$ en que el gas se encuentra en equilibrio termodinámico completo y en donde h , ρ , v y p tienden, respectivamente, a los valores h_1 , ρ_1 , v_1 , p_1 y h_2 , ρ_2 , v_2 , p_2 , los cuales están relaciona-

(72) Para una introducción general sobre la dinámica de gases con efectos de radiación ver, por ejemplo, W. SCHNEIDER: *Grundlagen der Strahlungsgasdynamik*. «Acta Mechanica», 1968, págs. 7-117, donde se encontrarán numerosas aplicaciones y abundante bibliografía, así como la obra de S. S. PENNER y D. B. OLFE: *Radiations and Reentry*. Acad. Press, 1968.

(73) Para los problemas que aquí interesan no es preciso, efectivamente, tener en cuenta la influencia de la presión de radiación en la ecuación [47] de la cantidad de movimiento, ni la de ésta y la densidad de energía radiante en la ecuación [48] de la energía, términos que solamente adquieren importancia en problemas de Astrofísica, como se puede comprobar en las referencias citadas en la nota anterior.

dos entre sí, como es natural, por las condiciones de Rankine-Hugoniot (74).

El sistema anterior debe completarse con la ecuación de estado, que supondremos es la de los gases perfectos:

$$\frac{p}{\rho} = R T \quad [59]$$

y con una expresión para la entalpía, que supondremos de la forma:

$$h = C_p T, \quad [60]$$

con $C_p = \text{const.}$, puesto que, por hipótesis, los grados de libertad internos de las moléculas se excitan instantáneamente en el choque, por lo que habrá de atribuirse a la relación de calores específicos γ el valor que corresponda en cada caso a esta situación, en lugar del que se utiliza en condiciones normales. En general, en el aire, $\gamma = 1,25$ proporciona una aproximación satisfactoria.

Al igual de lo que ocurría con α en el estudio de los fenómenos de relajación, es necesario aquí expresar el flujo de radiación f_r en función de las variables de estado del gas, mediante una ecuación de radiación cuya forma está determinada por la naturaleza propia de este fenómeno.

Para ello hay que tener presente, en primer lugar, que el flujo f_r es el que resulta de la contribución al mismo de los flujos parciales $f_{r\nu}$ correspondientes a las diversas frecuencias ν de radiación:

$$f_r = \int_0^\infty f_{r\nu} d\nu, \quad [61]$$

y que $f_{r\nu}$ se expresa en función de la intensidad de radiación $I_r(\theta, x)$ de esa frecuencia en la dirección que forma el ángulo θ con el eje x , mediante la expresión

$$f_{r\nu}(x) = 2\pi \int_0^\pi I_r(\theta, x) \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot d\theta, \quad [62]$$

(74) Para una deducción de las condiciones de Rankine-Hugoniot con inclusión de la presión y de la energía de radiación, ver el trabajo de R. G. SACHS: *Some Properties of Very Intense Shock Waves*. «Phys. Rev.», 1946, págs. 514-22.

donde se ha hecho uso de la propiedad evidente de que el campo de radiación tiene simetría de revolución con respecto al eje x .

Por otra parte, enseña la Teoría de la Radiación (75) que la ley de variación lineal de la intensidad de radiación en la dirección θ , está dada por una ecuación de la forma:

$$\cos \theta \frac{\partial I_v(\theta, x)}{\partial x} = K_v [I_{v,e}(x) - I_v(\theta, x)], \quad [63]$$

donde K_v es un coeficiente de absorción del medio, cuyo valor depende tan sólo de las características del gas y de su estado termodinámico e $I_{v,e}$ es la intensidad de radiación correspondiente al equilibrio termodinámico del gas en el punto, la cual es una función universal de la temperatura, dada por la expresión de Planck:

$$I_{v,e} = \frac{2 \hbar \nu^3}{c^2} \cdot \left[\exp\left(\frac{\hbar \nu}{k T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad [64]$$

en la que h y k son, respectivamente las constantes de Planck y de Boltzmann y c es la velocidad de la luz.

Es claro que la ecuación [63] tiene la forma de una ecuación de relajación del tipo [55], cuyo primer término $K_v I_{v,e}$ mide la intensidad de la radiación espontáneamente emitida por el gas, en las condiciones de presión y temperatura a que se encuentra en el punto x , la cual es, además, isotrópica, es decir, independiente de la dirección θ , mientras que $K_v I_v$ mide la fracción de la intensidad I_v de la radiación que lleva al punto en la dirección θ , que es absorbida por el gas en él (76).

Por otra parte, la ecuación [63] muestra que el coeficiente de absorción K_v tiene las dimensiones del inverso de una longitud

$\lambda_v = \frac{1}{K_v}$ la cual se llama, por razones claras, «camino libre medio

de la radiación de frecuencia ν », de Planck.

Así pues, las ecuaciones [61], [62], [63] y [64], unidas a las condiciones en los límites, proporcionan la información necesaria para el cálculo del flujo de radiación f , en cada punto, en función de las variables termodinámicas, lo que hace determinado el sistema para

(75) Ver, por ejemplo, la obra de PENNER y OLFE citada. págs. 135 y sigts.

(76) En este planteamiento se prescinde de la radiación dispersada, por ser pequeña frente a los efectos de emisión y absorción citados.

el cálculo de la estructura de las ondas de choque con efectos de radiación.

Ahora bien; la resolución del problema así planteado presenta dos dificultades de consideración, la primera de las cuales deriva del hecho de que el conocimiento del flujo de radiación en cada punto exige la integración de la ecuación de radiación [63], es decir, que requiere el conocimiento de la intensidad de radiación en todo el espacio.

La segunda dificultad procede del carácter altamente selectivo de un gas para absorber determinadas frecuencias, lo que, en rigor, obligaría a tomar en consideración la influencia de aquéllas en el coeficiente de absorción, como se ha hecho en el planteamiento precedente (77).

Sin embargo, como ello complica demasiado la resolución del problema, acostumbra a menudo a adoptarse la hipótesis de un «gas gris», caracterizado por un coeficiente medio κ de absorción independiente de la frecuencia, con lo cual, al integrar la ecuación [63] para el conjunto de las diversas frecuencias $0 < \nu < \infty$ y teniendo en cuenta la expresión [64] de I_{ν} , se obtiene la siguiente ecuación diferencial de radiación, en sustitución de [63]:

$$\cos \theta \frac{\partial I(\theta, x)}{\partial x} = K [I_s(x) - I(\theta, x)] = K \left(\frac{\sigma T^4}{\pi} - I, \right) \quad [65]$$

en donde

$$I(\theta, x) = \int_0^\infty I_\nu(\theta, x) d\nu \quad [66]$$

en la intensidad total de radiación en la dirección θ , $I_s = \frac{\sigma T^4}{\pi}$ es

la intensidad isotrópica de radiación en equilibrio termodinámico

y $\sigma = \frac{2 \pi^5 k^4}{15 \hbar^3 c^2}$ es la constante de Stefan-Boltzmann.

(77) Para un estudio de las características del coeficiente de absorción en los gases ver, por ejemplo, la obra de PENNER y OLFE, ya citada, capítulo I.

En cuanto a la ecuación [61] del flujo de radiación, teniendo en cuenta [62] y [66], resulta:

$$f_r(x) = 2\pi \int_0^\pi I(\theta, x) \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot d\theta. \quad [67]$$

Finalmente, al hacer aplicación de todo ello al caso de la onda de choque, teniendo en cuenta que, como se ha dicho, el estado de radiación es de equilibrio termodinámico en los dos extremos $x \rightarrow \pm \infty$, la ecuación [65] se integra fácilmente y se obtiene la siguiente expresión para el flujo de la radiación en el punto x (78):

$$f_r(\eta) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma T^4(\eta') \operatorname{sgn} \eta (\eta - \eta') E_2(|\eta - \eta'|) d\eta'. \quad [68]$$

En esta expresión,

$$\eta = \int_0^x \frac{dx'}{l_r} \quad [69]$$

es una distancia adimensional, llamada espesor óptico del gas, la cual se obtiene al referir la distancia x al camino libre medio de radiación $l_r = \frac{1}{K_r}$ que es, evidentemente, la longitud característica del problema; la función $\operatorname{sgn}(\eta - \eta')$ es igual a ± 1 respectivamente, según que el signo de la diferencia $(\eta - \eta')$ sea positivo o negativo y

$$E_2(|\eta - \eta'|) = \int_0^1 \exp\left(-\frac{|\eta - \eta'|}{z}\right) dz \quad [70]$$

es la función exponencial integral de orden 2.

(78) Ver, por ejemplo, el trabajo de HEASLET y BALDWIN, que se cita más adelante, página 390.

Un caso límite, que simplifica grandemente la resolución del problema, es el correspondiente al llamado gas «ópticamente espeso» en el que el camino libre medio de radiación es muy pequeño con respecto a una dimensión característica del proceso (79).

Entonces ocurre que todo fotón es prácticamente reabsorbido inmediatamente después de su emisión, con lo que el flujo de radiación en cada punto queda determinado por las condiciones estrictamente locales, en lugar de depender, como ocurre en [67], de lo que sucede en todo el espacio. En tal caso, la intensidad de radiación en cada punto coincide prácticamente con el valor de equilibrio termodinámico en él y se demuestra que, entonces, el flujo de radiación está dado por la expresión de Rosseland:

$$f_r = - \frac{16 \sigma T^3}{3 K_r} \frac{dT}{dr}, \quad [71]$$

en donde K_r es un coeficiente medio de absorción, llamado de Rosseland (80).

Es claro que, al llevar esta expresión a [58], el problema es formalmente idéntico al de la estructura de una onda de choque en un gas sin radiación ni viscosidad, y cuyo coeficiente λ_r de conductividad térmica está dado por la expresión:

$$\lambda_r = \frac{16}{3} \cdot \frac{\sigma T^3}{K_r}, \quad [72]$$

con lo que se obtiene para el sistema de las ecuaciones del choque una solución continua, de tipo similar a las que proporcionaban las ecuaciones de Navier-Stokes en aquel caso.

Se demuestra, no obstante, que una solución continua de esta naturaleza solamente puede existir en el caso de ondas débiles y con transporte energético de radiación elevado (81) porque, en caso con-

(79) H. K. SEN y A. W. GUESS: *Radiation Effects in Shock-Wave Structure*. «Phys. Rev.», 1957, págs. 560-64. Ver también R. E. MARSHAK: *Effect of Radiation on Shock Wave Behavior*. «Phys. Fluids», 1958, págs. 24-29.

(80) Para un expresión del mismo, ver la obra de JAUMOTTE, ya citada, volumen II, pág. 326.

(81) Ver ZELDOVICH y RAIZER, págs. 477 y sigts., así como HEASLET y BALDWIN, ya citados.

trario, si bien la temperatura puede ser continua, lo que da lugar a una onda de las llamadas «isotermas», las restantes variables experimentan un salto.

Una formulación aproximada del problema, más satisfactoria que esta solución y que elimina las dificultades inherentes al sistema [58], [67], la cual resulta, además, aplicable a choques fuertes, es la desarrollada por Raizer en 1957 (82), en la hipótesis de que la anisotropía del campo $I(\theta, x)$ de energía radiante es pequeña, lo que permite expresar el flujo de radiación en forma diferencial, eliminando con ello las dificultades que resultan del carácter integro-diferencial del problema.

El planteamiento, en la hipótesis de un gas gris, es el siguiente:

Al derivar con respecto a x la expresión [67] del flujo $f_r(x)$ y sustituir en el integrando la expresión $\frac{\partial I(\theta, x)}{\partial x}$ por el valor que proporciona para esta derivada la ecuación [65], se obtiene:

$$\frac{d f_r}{d x} = 2 \pi K \int_0^{\pi} (I_* - I) \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot d \theta. \quad [73]$$

Ahora bien, se llama densidad $U(x)$ de radiación en el punto x a la expresión:

$$U(x) = \frac{2 \pi}{c} \int_0^{\pi} I(x, \theta) \cdot \operatorname{sen} \theta \cdot d \theta, \quad [74]$$

que mide el número de fotones contenido en la unidad de volumen, en el entorno del punto x . Por tanto, la expresión [73] se reduce a la siguiente:

$$\frac{d f_r}{d x} = K c (U_* - U), \quad [75]$$

(82) *Idem* *id.*, págs. 531 y sigts.

que permite expresar la variación de flujo en función de la diferencia entre la densidad de radiación

$$U_e(x) = \frac{4\sigma}{c} T^4 \quad [76]$$

correspondiente al equilibrio termodinámico en el punto y la que realmente existe en él.

Con ello se ha conseguido expresar la variación de flujo en forma diferencial, pero se ha introducido una nueva función $U(x)$, que es preciso relacionar con las restantes variables a través de una ecuación.

Esto se consigue, en forma aproximada, al introducir el valor de la intensidad de radiación $I(\theta, x)$ que resulta del segundo miembro de [65] en la expresión [67] del flujo y llevar a cabo la integración, con lo cual se obtiene para $f_r(x)$ la expresión:

$$f_r(x) = -2\pi K \int_0^x \sin \theta \cdot \cos^2 \theta \cdot \frac{\partial I(\theta, x)}{\partial x} \cdot d\theta. \quad [77]$$

La hipótesis de simplificación que utiliza Raizer y que en la terminología rusa acostumbra a llamarse «aproximación de difusión», consiste en suponer que la $\frac{\partial I(\theta, x)}{\partial x}$ es independiente de la orientación θ , es decir, que se puede prescindir de la anisotropía del campo de radiación, como se dijo al comienzo, con lo cual, al tener en cuenta [74], se obtiene la segunda ecuación buscada

$$f_r(x) = -\frac{c}{3K} \frac{dU(x)}{dx}. \quad [78]$$

Alternativamente, la eliminación de la densidad U de radiación entre [75] y [78], teniendo en cuenta la expresión [76] para la densidad de equilibrio, proporciona la siguiente ecuación diferencial de segundo orden para el flujo de radiación f_r , previa sustitución de x por η , en virtud de [69]:

$$\frac{d^2 f_r}{d\eta^2} - 3f_r - 16\sigma T^3 \frac{dT}{d\eta} = 0, \quad [79]$$

expresión que sustituye a [77] en esta «aproximación diferencial», con la ventaja de eliminar los inconvenientes de una ecuación integral singular.

Con ello y puesto que las condiciones en los límites para la nueva función $U(x)$ son, evidentemente, $U \rightarrow U_\infty(T)$ para $x \rightarrow \pm \infty$, las siete ecuaciones [56], [57], [58], [59], [60], [75] y [77] permiten calcular las siete incógnitas p , ρ , v , T , h , f , y U como funciones de x , lo que resuelve el problema.

Las soluciones de este sistema confirman la forma de la figura IV-8 para el perfil de la onda y Raizer obtiene expresiones analíticas aproximadas para las diversas variables, cuyos límites de validez analizaron Penner y Olfe en la obra previamente citada.

Recientemente, Olfe y Cavallieri (83) han mejorado la aproximación del modelo de Raizer, extendiendo, además, el estudio a los casos de radiación en una y dos bandas grises. Sus resultados confirman, sin embargo, la excelente aproximación de Raizer.

Un caso especial se plantea cuando el calentamiento del gas delante del choque produce temperaturas T_1 que se aproximan a la T_2 de los gases en equilibrio detrás de aquél, la cual se demuestra que no puede sobrepasar T_1 en ningún caso.

Entonces se comprueba que el perfil de temperaturas adopta la forma que muestra la figura IV-9, es decir, que en el entorno del salto se produce una elevación muy fuerte de temperatura, la cual cae al valor T_2 en una zona de espesor muy pequeño con respecto al de la onda.

Por consiguiente, en tales casos, que se llaman supercríticos, salvo en la zona en torno del pico T_2 , la temperatura se comporta como en una onda «isotérmica» del tipo estudiado por Sen y Guess.

Soluciones aproximadas del sistema de ecuaciones de la onda de radiación han sido obtenidas por Clark (84) para el caso de ondas débiles con radiación fuerte, en que no existe salto sino transición continua de las variables y por Heaslet y Baldwin (85) para todos los casos de ondas fuertes y débiles.

(83) D. B. OLFE y R. J. CAVALLIERI: *Shock Structure with Non Gray Radiative Transfer*. «Proc. Heat Transfer Fluid Mech. Inst. Stanford Univ. Press», 1967, págs. 88-114. Ver también PENNER y OLFE, ya citado, págs. 318 y sigts.

(84) J. F. CLARK: *Radiation-Resisted Shock Waves*. «Phys. Fluids», 1962, págs. 1347-91.

(85) M. A. HEASLET y B. S. BALDWIN: *Prediction of the Structure of Radiation-Resisted Shock Waves*. «Phys. of Fluids», 1963, págs. 781-91.

El planteamiento de estos autores es el siguiente:

Al eliminar p , ρ , h y f , del sistema [56], [57], [58] y [68], teniendo en cuenta [59] y [60], se obtiene una ecuación integral de la forma:

$$v^2 - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \frac{p_0}{m} v + \frac{2(\gamma - 1)}{\gamma + 1} h_0 = \\ = \frac{1}{m(\gamma + 1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma T^4(\eta') \operatorname{sgn} n(\eta - \eta') E_2(|\eta - \eta'|) d\eta' \quad [80]$$

para el cálculo del perfil de velocidades v en función de η , puesto que la temperatura T del integrando se puede expresar en función de la velocidad v en la forma:

$$T = \frac{1}{R} \left(\frac{p_0}{m} v - v^2 \right), \quad [81]$$

en virtud de [56], [57] y [59].

Obtenida la solución de [80], las ecuaciones del sistema permiten expresar todas las demás variables del problema en función de η , con lo que la estructura de la onda queda determinada.

La ecuación integral [80] presenta, para su tratamiento matemático, la triple dificultad de no ser lineal; de tener un intervalo de integración infinito, lo que la hace singular y, finalmente, de que la temperatura T (o la velocidad v) puede presentar discontinuidades en el intervalo de integración, que corresponden al salto del choque mecánico inmerso en el de radiación, como muestra la figura IV-8.

Por ello, para hacer analíticamente tratable el problema, Heaslet y Baldwin transforman la citada ecuación integral en una ecuación diferencial aproximada, empezando por sustituir las variables v y T , que pueden ser discontinuas, como hemos visto, por una nueva variable ζ , definida por la expresión:

$$\zeta = \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} - \frac{v}{v_0} \right]^2, \quad [82]$$

en donde v_0 es una velocidad de referencia definida por la expresión

$$v_0 = \frac{p_0}{m} = \frac{1 + \gamma M_1^2}{\gamma M_1^2} v_1. \quad [83]$$

La variable ζ que, como se demuestra más adelante en [91], es una medida adimensional del flujo de radiación, es continua como éste en todo el intervalo de integración, como se comprueba, además, fácilmente, en virtud de las condiciones de Rankine-Hugoniot que tiene que satisfacer en todo caso el salto de velocidades (86).

Hecho esto, en la ecuación integral que resulta de expresar en [79] v y T en función de ζ , los autores sustituyen la función exponencial integral $E_2(\eta)$ por una aproximación exponencial de la forma.

$$E_2(\eta) \simeq x e^{-\beta \eta}, \quad [84].$$

siguiendo para ello un procedimiento introducido por Chandrasekhar en el estudio de problemas de radiación en Astrofísica y que Vincenti y Baldwin (87) habían aplicado poco antes con éxito, al tratamiento de otro problema de radiación de la Dinámica de Gases.

Puede comprobarse (88) que esta sustitución identifica básicamente el tratamiento de Heaslet y Baldwin con el de la aproximación diferencial que sirvió de fundamento al método de Raizer anteriormente descrito.

Dicha sustitución tiene la ventaja de que la derivación paramétrica de E_0 en el integrando de la ecuación integral, se sustituye por la de $e^{-\beta \eta}$, lo que les permite, mediante dos derivaciones consecuti-

(86) Efectivamente;

$$\begin{aligned} \zeta_1 - \zeta_2 &= \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} - \frac{v_1}{v_0} \right]^2 - \left[\frac{\gamma}{\gamma + 1} - \frac{v_2}{v_0} \right]^2 = \\ &= \frac{v_1 - v_2}{v_0} \left[\frac{v_1 + v_2}{v_0} - \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \right] \end{aligned}$$

y las citadas condiciones enseñan que

$$\frac{v_1 + v_2}{v_0} = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}$$

, con lo que resulta $\zeta_1 = \zeta_2$.

(87) W. G. VINCENTI y B. S. BALDWIN: *Effect of Thermal Radiation on the Propagation of Plane Aconoustic Waves*. «J. Fluid Mech.», 1962, págs. 449-77.

(88) Ver, por ejemplo, PENNER y OLFE, ya citado, pág. 328.

vas de la misma respecto de η , efectuar la mencionada sustitución de la ecuación integral por una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{d^2 \zeta}{d \xi^2} - (\zeta - \zeta_\infty) = \frac{dF}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{d\xi}, \quad [85]$$

que resuelve el problema planteado.

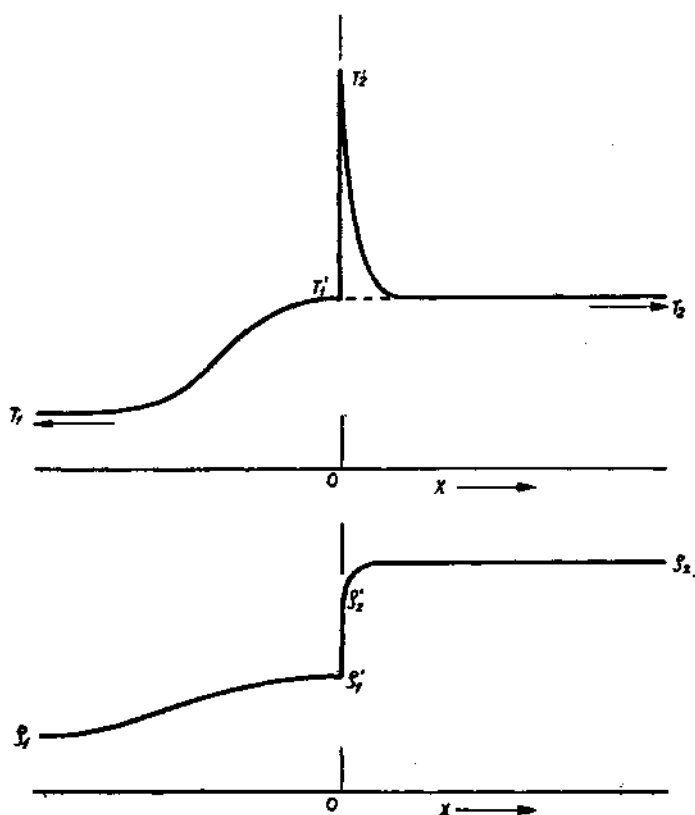


Fig. IV-9. — Perfil esquemático de una onda de choque supercrítica.

En ella, ζ_∞ está dado por la expresión:

$$\zeta_\infty = \frac{1}{4} \left(\frac{v_1 - v_2}{v_0} \right)^2; \quad [86]$$

la nueva variable independiente ξ se expresa en función de η en la forma:

$$\xi = \beta \cdot \eta \quad [87]$$

y $F(\zeta)$ es una función continuada de ζ , de la forma:

$$F(\zeta) = A \left[\frac{\gamma}{(\gamma + 1)^2} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (\operatorname{sgn} \xi) \cdot \zeta^{1/2} - \zeta \right] \quad [88]$$

donde A es un parámetro dado por la expresión:

$$A = \frac{8 \alpha (\gamma - 1) \sigma v_0^6}{\beta m (\gamma + 1) K^4}, \quad [89]$$

y el origen de coordenadas $\xi = 0$ se ha hecho coincidir con el punto $\zeta = 0$ donde la velocidad del gas está dada por la expresión:

$$v(0) = \frac{\gamma}{\gamma + 1} v_0 \equiv \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad [90]$$

La función $F(\zeta)$ consta de dos ramas que se unen en el punto $\zeta = 0$.

En cuanto a las condiciones en los límites para ζ , resultan de [81] y de las que tiene que satisfacer la velocidad v , comprobándose que las singularidades en los extremos del intervalo de integración son ambas del tipo de puerto, en lugar de ser un nodo y un puerto como ocurría, según se ha visto, en la estructura de los choques de viscosidad y conductividad térmica.

Por otra parte, como hemos anticipado, se comprueba fácilmente que la variable ζ se relaciona con el flujo de radiación f_r mediante la siguiente expresión, que permite definir un flujo adimensional de radiación φ_r ,

$$\varphi_r \equiv \frac{\zeta - \zeta_\infty}{\zeta_\infty} = \frac{8(\gamma - 1)}{\gamma + 1} \frac{f_r}{m(v_1 - v_2)^2}. \quad [91]$$

Heaslet y Baldwin integran numéricamente la ecuación (85) en un conjunto de casos típicos, para choques fuertes y débiles y con niveles

de radiación altos y bajos, lo que les permite obtener una colección de soluciones correspondientes a ondas total y parcialmente dispersadas y, en este último caso, para condiciones sub y supercríticas.

Asimismo, efectúan un estudio analítico de las características de las soluciones, determinando los valores de los parámetros que dan lugar a la aparición de discontinuidades, es decir, al punto de tránsito de las ondas totalmente dispersadas la que los son parcialmente y poner de manifiesto el error de cálculo de Clark que le impidió detectar la existencia de estas últimas.

Un tratamiento interesante desde el punto de vista matemático y que proporciona expresiones analíticas aproximadas para la solución, es el llevado a cabo por Ryhming (89) para el caso de radiación débil, mediante un método de perturbaciones en torno a la función de salto que constituye obviamente la solución al problema de la onda en ausencia tanto de radiación como de efectos de conductividad térmica y de viscosidad.

Por otra parte, Pearson (90) ha desarrollado un método directo de resolución de la ecuación integral singular [80], por un procedimiento de iteración, lo que permite comparar sus resultados con los que obtienen Heaslet y Baldwin por el procedimiento de aproximación de $E_2(\eta)$ dado en [84], comprobando que el error de esta aproximación es inferior al 1 por 100 para varios casos típicos de ondas fuertes y débiles.

Se ha visto que la onda puede ser continua o discontinua, es decir, total o parcialmente dispersada, en función de la relación que existe entre la intensidad del choque, la cual depende del número de Mach de la corriente incidente, y la intensidad de radiación, la cual depende, a su vez, del estado termodinámico del gas.

Por consiguiente, se plantea la cuestión de determinar la frontera entre uno y otro caso, en función de la relación entre una parámetro característico de la radiación y el número de Mach del choque.

El problema ha sido investigado y resuelto por Mitchener y Vinokur (91), en un interesante trabajo analítico en el que, partiendo

(89) I. L. RYHMING: *Weak Radiation from a Hypersonic Shock*. «AIAA. Jour.», 1965, págs. 1178-80.

(90) W. E. PEARSON: *On the Direct Solution of the Governing Equation for Radiation Resisted Shock Waves*. NASA Tech. Note TN D-2128, año 1964.

(91) M. MITCHENER y M. VINOKUR: *Radiation Smoothing of Shocks with and without a Magnetic Field*. «Phys. Fluids», 1963, págs. 1682-92.

de la aproximación diferencial que sirvió de origen para el método de Raizer y cuya identificación con la de Heaslet y Baldwin ponen de manifiesto, analizan el comportamiento de las soluciones en el plano de fase entre U y f_r correspondiente al sistema diferencial [75], [78], lo que les permite establecer la condición necesaria y suficiente para que la solución sea continua, es decir, para que la onda sea completamente dispersada por la radiación.

Las soluciones consideradas hasta aquí suponen que el gas es ideal, es decir, que los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica pueden despreciarse y que la única causa del choque es el efecto de la radiación.

La consecuencia de esta hipótesis es, como se ha visto, que en el caso de ondas parcialmente dispersadas existe una discontinuidad de la velocidad, densidad, presión y temperatura en el seno de las mismas, cuya estructura interna obliga a tener en cuenta los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica en el entorno del salto, es decir, a explorar la estructura del choque mecánico inmerso en el seno del de radiación, así como la posible influencia de la estructura del primero en el segundo y recíprocamente.

Este análisis ha sido llevado a cabo por Traugott (92), en un trabajo que ofrece gran interés porque resulta muy esclarecedor desde el punto de vista del análisis matemático del problema general de las ondas d choque con efectos de radiación y, poco después, por Cohen y Clarke (93), con algo más de generalidad.

Es claro que para estudiar esta cuestión hay que incorporar a las ecuaciones [56], [57] y [58] los términos correspondientes a los efectos de la viscosidad y de la conductividad térmica, tal como aparecen en las ecuaciones [2] y [3], lo que complica sustancialmente el problema, tanto respecto del caso de las ondas sin radiación, como se vio al comienzo, como respecto del de ondas de radiación sin efectos de viscosidad y de conductividad térmica considerado hasta aquí (94).

Por ejemplo, si se utiliza la aproximación diferencial [87] para el

(92) S. C. TRAUGOTT: *Shock Structure in a Radiating, Heat Conducting, and Viscous Gas*. «Phys. Fluids», 1965, págs. 884-89.

(93) I. M. COHEN y J. H. CLARKE: *Influence of Viscosity on Shock Waves Structured by Radiation*. «Phys. Fluids», 1965, págs. 1278-82.

(94) Por ejemplo, la ecuación cuadrática cuyos valores propios determinan la naturaleza de las singularidades en los choques de viscosidad y de radiación, se convierte aquí en una ecuación de cuarto grado, como se comprueba en el sistema [100], [101] y [102] siguiente.

flujo de radiación, como hace Traugott en su investigación, entonces el sistema diferencial resultante para el cálculo de la estructura de la onda es el siguiente:

$$-\frac{4}{3} \mu \frac{dv}{dx} + p + m v = p_0; \quad [92]$$

$$-\lambda \frac{dT}{dx} + m \left(C_v T + \frac{1}{2} v^2 \right) - \frac{4}{3} \mu v \frac{dv}{dx} + f_r = m h_0; \quad [93]$$

$$\frac{d^2 f_r}{d\eta^2} - 3 f_r - 16 \sigma T^3 \frac{dT}{d\eta} = 0, \quad [94]$$

en donde η es el espesor óptico definido en [69].

Entonces, al introducir η en lugar de x en las derivadas de las ecuaciones [92] y [93], aparece una relación adimensional característica del acoplamiento entre los efectos de viscosidad y radiación:

$$\frac{\mu}{m l_r} \sim \frac{1}{M} \cdot \frac{l}{l_r}, \quad [95]$$

que mide la relación entre el camino libre medio molecular del gas l y el de radiación l_r , definido en [69], en donde M es el número de Mach $M = \frac{v}{a}$ del movimiento en el punto donde se miden l y l_r .

Es claro que la relación [95] ha de tener una significación muy especial en el análisis de este problema.

Efectivamente, Traugott, calcula el valor de ese parámetro en un conjunto de casos típicos, demostrando que es, en general, muy pequeño respecto de la unidad, lo que permite tratar el problema mediante el procedimiento de perturbaciones pequeñas en torno a las soluciones obtenidas por Heaslet y Baldwin et al. para el caso de un gas ideal.

Ese es precisamente el método que siguen Cohen y Clarke en el trabajo citado, desarrollando la solución en serie de potencias del parámetro [95], lo que les permite operar con la expresión exacta [68] del flujo de radiación, en lugar de tener que hacerlo con su aproximación diferencial.

Además, con ello ponen de manifiesto que, en primera aproximación, la estructura del choque de viscosidad interior al de radiación está dada por el sistema diferencial [1], [2] y [3], sin más que considerar como condiciones en los límites T'_1 y T'_2 , en lugar de T_1 y T_2 , para la temperatura y los valores correspondientes para las restantes variables, además de introducir una modificación en el valor de h_0 , el cual hay que disminuir en el del flujo de radiación $f_*(0)$ en el origen.

Por lo demás, estos autores calculan también la influencia de las perturbaciones de orden superior, tanto en la estructura interna del choque de viscosidad, como en la exterior del de radiación.

La interacción entre los efectos de radiación y de relajación, especialmente para el caso de la energía de vibración molecular, ha sido examinada por Emanuel (95), en un trabajo que tiene interés matemático por el estudio que en él se hace de la naturaleza de las singularidades de la solución en los extremos $x \rightarrow \pm \infty$ del campo de integración.

En este caso, el parámetro significativo para el comportamiento de la interacción es, naturalmente, la relación entre las longitudes características de los procesos de radiación y de relajación, respectivamente.

Utilizando la aproximación de Heaslet y Baldwin para el flujo de radiación, Emanuel muestra que en el espacio de fase el problema se reduce a la integración de un sistema de dos ecuaciones diferenciales correspondientes a los efectos acoplados de radiación y de relajación, con puntos singulares en los extremos de integración, cuyo análisis le permite concretar la existencia y naturaleza de las soluciones correspondientes a las diversas situaciones que pueden imaginarse.

Obtenida la solución en el espacio de fase, el paso al espacio físico que proporciona la estructura de la onda se resuelve mediante una cuadratura.

Recientemente, Niederdrenk (96) ha estudiado la influencia de los fenómenos de disociación e ionización en los efectos de la radiación en una onda de choque fuerte, utilizando para el flujo de radiación

(95) G. EMANUEL: *Structure of Radiation-Resisted Shock Waves with Vibrational Nonequilibrium*. «Phys. Fluids», 1965, págs. 626-35.

(96) P. NIEDERDRENK: *Starker Verdichtungsstoss eines Strahlenden Gases bei thermischen Zerfallsreaktionen*. «Zeitschrift für Flugwissenschaften», 1971, páginas 406-12.

la aproximación diferencial [75] y [78]. En el caso de radiación débil, obtiene expresiones analíticas para la solución mientras que para radiaciones más fuertes es necesario proceder a la integración numérica del sistema.

Por último, Clarke y Ferrari (97) han estudiado el acoplamiento entre los efectos de radiación e ionización, tomando en consideración la fotoionización que se produce delante del choque a causa del flujo de radiación, en un trabajo de formulación muy genérica, que puede tener aplicación a numerosos problemas de Dinámica de Gases con radiación, en el que, además, desarrollan la teoría de la cinética del proceso de ionización y el carácter selectivo de la absorción y emisión de la radiación por el gas, en función de la frecuencia de aquélla.

El trabajo aplica la teoría al caso de la onda de choque, ilustrando la considerable influencia que puede tener en la estructura de la «cola» o zona posterior del choque un pequeño efecto de fotoionización en la zona «precursora» o anterior al mismo y muestra ejemplos de estructura completa en varios casos típicos.

(97) J. H. CLARKE y C. FERRARI: *Gas Dynamics with Nonequilibrium Radiative and Collisional Ionisation*. «Phys. Fluids», 1965, págs. 2121-39.

CAPÍTULO V

ONDAS DE DETONACION

Pasemos ahora a considerar la estructura de las ondas de detonación, cuyo estudio teórico y experimental ha dado lugar a una abundante bibliografía, principalmente rusa y norteamericana, sobre todo a partir de los años siguientes a la Segunda Guerra Mundial.

En ella, junto a trabajos muy especializados sobre cuestiones específicas, hay otros de carácter general y un cierto número de publicaciones de revisión sobre el estado de conocimientos en cada momento, de gran utilidad para el estudio del problema (1).

La primera cuestión a considerar aquí es la que se refiere a la estructura interna de las ondas de detonación.

Para finalizar la estructura de este tipo de ondas empezaremos por considerar el caso más sencillo de una única ecuación de reacción quí-

(1) Véanse, por ejemplo, los libros siguientes: Y. B. ZELDOVICH y A. S. KOMPANEETS: *The Theory of Detonation*. Traducción del ruso. Academic Press., 1960; R. I. SOLOUKHEIN: *Shock Waves and Detonations in Gases*. Traducción del ruso. Mono Book Corp. Baltimore, 1966; K. I. SCHELKIN y YA. K. TROSHIN: *Gas-dynamic of Combustion*. Traducción del ruso. Mono Book Corp. Baltimore, 1965; B. P. MULLINS y S. S. PENNER: *Explosions, Detonations, Flammability and Ignition*. Pergamon Press., 1959; R. A. STREHLLOW: *Fundamentals of Combustion*. International Texbook Comp. Scranton, Pen, 1968, así como el libro de GRUSCHKA y WECKEN, citado en la página 323 del capítulo II. Idem los trabajos de revisión siguientes: M. W. EVANS y C. M. ABLOW: *Theories of Detonation*. «Chem. Rev.», 1961, págs. 129-78; A. K. OPPENHEIM y R. A. STERN: *Development and Structure of Plane Detonation Waves*. AGARD, 1960; A. K. OPPENHEIM: *Novel Insight into the Structure and Development of Detonation*. «Astronautica Acta», 1965, páginas 391-400; *Gas Phase Detonation*. Twelfth Symposium on Combustion, páginas 795 y sigts. The Combustion Institute, USA; R. A. STREHLLOW: *Gas Phase Detonations: Recent Developments*. «Comb. and Flame», 1968, págs. 81-101.

mica en una mezcla de gases perfectos, que sirvió de base para el estudio del capítulo III.

Con ello, como allí se vio, el sistema diferencial de las ondas de detonación se reduce al siguiente:

$$\rho v = m \quad [1]$$

$$p + \rho v^2 = p_0 \quad [2]$$

$$C_p T + \frac{1}{2} v^2 - q \epsilon = h_0 \quad [3]$$

$$m \cdot \frac{d \epsilon}{d x} = \omega. \quad [4]$$

Recordemos, por otra parte, que el sistema [1] a [4] para que sea determinado ha de completarse, en primer lugar, con una expresión para la velocidad w de la reacción química, la cual, de acuerdo con la expresión [5] y con la condición [28] del capítulo III, supondremos de la forma:

$$w = K \rho (1 - \epsilon) e^{-\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \quad [5]$$

En segundo lugar, hay que conocer también la forma de la ecuación de estado del gas, la cual, en el caso aquí supuesto de un gas perfecto, está dada por la expresión:

$$\frac{p}{\rho} = R T. \quad [6]$$

Asimismo hay que recordar que, en el sistema anterior, los valores de los parámetros m , p_0 , h_0 quedan determinados por las condiciones en uno de los extremos, por ejemplo, en el extremo frío $x \rightarrow -\infty$. Es decir, que tales parámetros quedan determinados por el estado del gas en la cara anterior de la onda y por la velocidad de propagación de la misma.

Supuestos conocidos por valores de estos parámetros, las tres primeras ecuaciones del sistema anterior, unidas a la ecuación de estado [6], determinan la evolución de la densidad, presión, temperatura y velocidad en el interior de la onda, en función del grado de avance de la combustión, medido por el valor de ϵ .

Y obtenida esta solución, los valores correspondientes de ρ y T pueden introducirse en la expresión de w dada en [5], con lo que la cuarta ecuación del sistema puede integrarse directamente y su solución sirve para situar los perfiles de aquellas variables y de κ a lo largo de la onda. Es decir, que el problema de la estructura de la onda queda resuelto.

Pero, para llegar a este resultado ha sido necesario suponer conocidos, como hemos visto, los valores de las variables de estado termodinámico de la mezcla delante de la onda, cuestión que no ofrece dificultad, naturalmente, puesto que pueden prefijarse arbitrariamente, así como el flujo unitario m de la corriente a través de la onda o sea su velocidad de propagación, la cual no puede elegirse arbitrariamente, en cambio, porque la observación experimental demuestra, como se anticipó en el capítulo II, que m toma un valor bien determinado para cada composición y estado iniciales del gas.

En vista de lo cual, para que el problema quede resuelto, hay que esclarecer cómo se llega a la condición adicional que sirve para determinar la velocidad de propagación de la detonación en cada caso, así como cuáles son los tipos de detonaciones que pueden existir realmente.

1. MODELO NDZ

Estas cuestiones fueron objeto de intensos estudios durante los años de la Segunda Guerra Mundial, los cuales condujeron a resultados análogos, simultáneos e independientes por parte de los investigadores rusos (2), alemanes (3) y norteamericanos (4).

Tales resultados sirvieron para establecer el modelo de estructura que acabamos de describir y que se designa habitualmente como modelo de von Newmann-Döring-Zeldovich o, abreviadamente, modelo NDZ. Modelo que constituye, indudablemente, la más importante contribución a la teoría de la detonación, hasta las recientes aportaciones sobre la inestabilidad de estas ondas, que comentaremos más adelante.

(2) Y. B. ZELDOVICH: *On the Theory of Propagation of Detonation in Gaseous Systems*, 1940. Trad. al inglés por NASA. «Tech. Mech.», núm. 1.261, 1950.

(3) W. DÖRING: *The Detonation Process in Gases*. «Ann. Phys.», 1934.

(4) J. VON NEWMANN: *Theory of Detonation Waves*. Office of Scientific Research and Development. Report núm. 549, 1942.

En lo que sigue, con objeto de esclacer el doble problema de la existencia y de la velocidad de propagación que hemos señalado, utilizaremos básicamente el razonamiento gráfico desarrollado por von Newmann en el informe citado.

Para ello hay que señalar, en primer lugar, que el sistema [1] a [3] muestra que las condiciones del salto de Rankine-Hugoniot que se estudiaron en el capítulo II se cumplen, no sólo en el estado final de la onda, sino en cada uno de los estados intermedios del proceso, el cual queda determinado por el valor correspondiente del grado de avance ϵ de la combustión.

Ello permite trazar una familia de curvas como las de la figura V-1, de las que la primera, que pasa por un punto inicial O, es la correspondiente a $\epsilon = 0$, es decir, a una onda sin reacción, o sea, a una onda de choque, mientras que la última, para $\epsilon = 1$, corresponde al estado final representado por el punto 2.

En cuanto a los estados intermedios, la ecuación [14] del capítulo II, que es aquí también evidentemente válida en todos los puntos de la onda, muestra que todos ellos tienen que estar situados sobre la recta de Rayleigh 0 — 1, por lo que el estado que se alcanza para cada valor de ϵ se encuentra situado en la intersección de esa recta con la curva de Rankine-Hugoniot correspondiente a ese valor de ϵ .

En la figura V-1, se muestran la solución para una detonación de Chapman Jouget, correspondiente a la recta 0 — 1 que es tangente a la adiabática $\epsilon = 1$ de los gases quemados, así como las soluciones para una detonación fuerte en el punto 2 y para una débil, en el 2'.

Ahora bien, para que el proceso descrito pueda tener lugar hace falta un elemento capaz de desencadenar la reacción química que pueda sostenerlo.

Y este elemento, en el sistema de ecuaciones que regula el fenómeno, no puede ser otro que el fuerte calentamiento producido por una onda de choque.

Así, pues, en el modelo NDZ, la detonación se inicia por una onda de choque, la cual lleva los gases desde el punto 0 al 1, llamado «pico» de von Newmann, donde los elevados valores de la presión y temperatura producidos por el choque inician la reacción química, que se completa a lo largo de la línea 1-2.

Por tanto, en el modelo NDZ, la onda de detonación presenta la

estructura que se representa esquemáticamente en la figura V-2 para la presión y la temperatura.

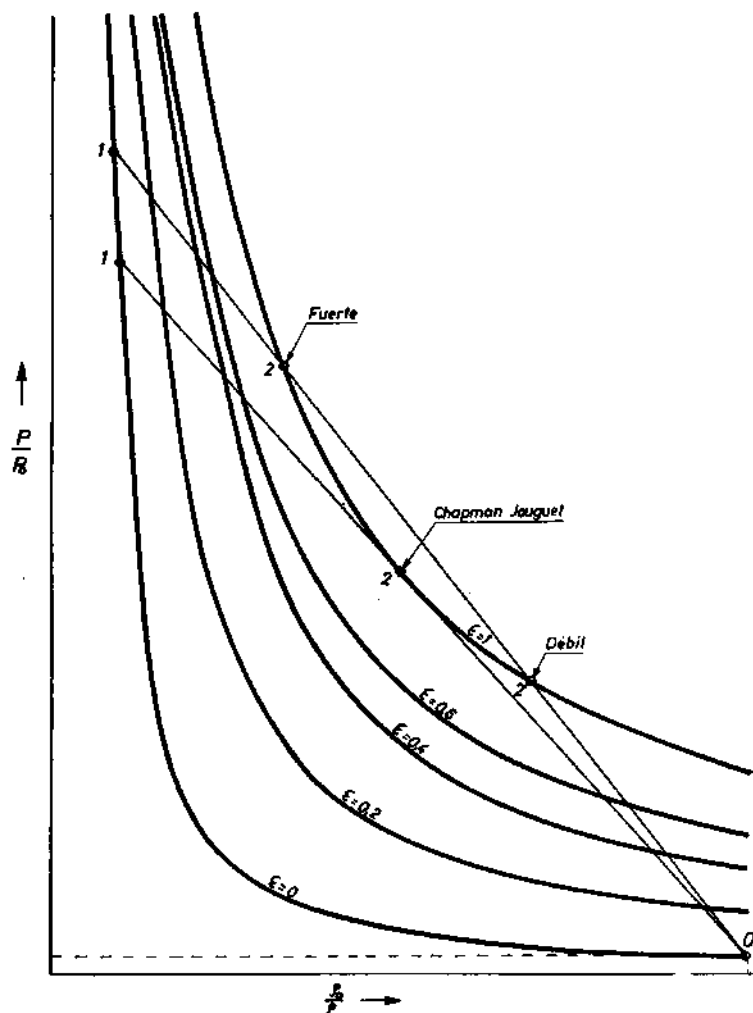
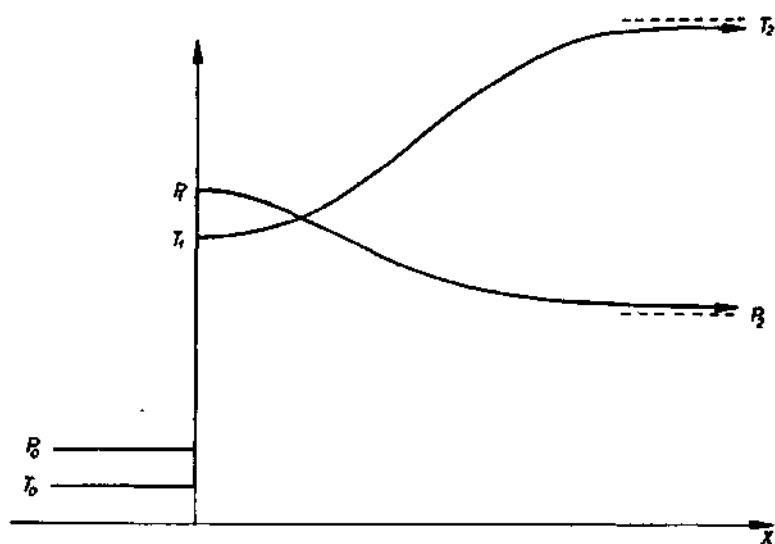


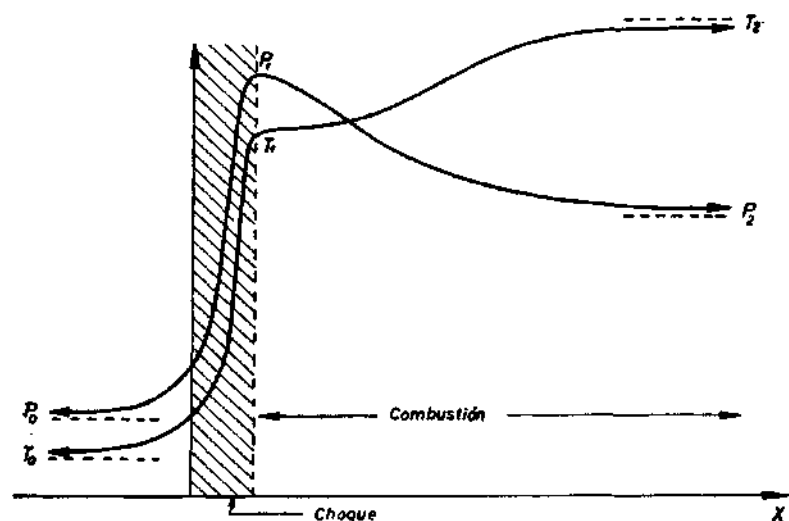
Fig. V-1.—Onda de detonación. Modelo NDZ.

Dicha estructura corresponde, como se ve, a una solución discontinua del sistema diferencial de la onda, con un salto concentrado en el origen, análogamente a lo que ocurría en el caso de las ondas de choque con efectos de relajación que se vio en el epígrafe número 4

del capítulo IV y por idénticas razones que allí, es decir, por la anulación de los procesos de disipación, que son los que dan espesor no nulo al choque mecánico y que, en realidad, modificarán la estructura



a) Modelo NDZ



b) Estructura real

Fig. V-2.—Esquema de estructura de una onda detonación.

discontinua de la onda, como se muestra de trazos en el esquema de la figura V-2.

Sin embargo, hay que tener presente que, en la realidad, la relación entre los espesores de las zonas de choque y combustión es del orden de 10^{-3} a 10^{-5} .

2. TIPOS DE DETONACIONES POSIBLES

El gráfico de la figura V-1 muestra, además, que no pueden existir detonaciones débiles, puesto que para alcanzar el punto 2' desde 1 habría de producirse, después de la combustión, el salto 2 — 2', el cual es una onda adiabática de expansión, cuya existencia es imposible por ser contraria al segundo principio de la Termodinámica.

De no producirse en el punto final de la combustión, dicho salto, tendría que producirse, como muestra von Newmann, en alguna de las curvas de Rankine-Hugoniot intermedias, posibilidad que queda también excluida por la misma razón.

Por el contrario, el mismo razonamiento evidencia que nada se opone, en principio, a la existencia de ondas de detonación fuertes.

Pero las detonaciones fuertes estacionarias, a través de tubos en el extremo inicial cerrado o abierto, es decir, las llamadas detonaciones fuertes «autosostenidas», son también imposibles, como vamos a ver a continuación.

Contrariamente a los argumentos de estabilidad que se han empleado antes de von Newmann para excluir la existencia de detonaciones fuertes, los cuales sólo precisan que se tome en consideración el estado final del gas quemado correspondiente a $\epsilon = 1$, von Newmann excluye la posibilidad de detonaciones fuertes estacionarias mediante el siguiente argumento cinemático:

En la figura V-3, sean, O el punto en que se inicia la detonación mediante una onda de choque de espesor nulo y P el punto en que termina la combustión. Puesto que se supone que existe una propagación estacionaria, la zona OP es constante y, además, como muestra la figura V-3 y puede comprobarse fácilmente, con ayuda de la figura V-1, en toda ella la densidad del gas es mayor que en la región de los gases frescos, situados a la izquierda de O.

Sea, por otra parte, Q el punto en que se inició la detonación, el cual suponemos cerrado por un diafragma fijo.

La zona PQ es, por tanto, la de los gases quemados y ocurre que en algún punto de ella los gases deben tener una densidad inferior a la de los gases frescos, puesto que entre O y Q hay ahora la misma cantidad total de gas que había al iniciarse la detonación y en toda la zona OP aquella es mayor, como se ha visto.

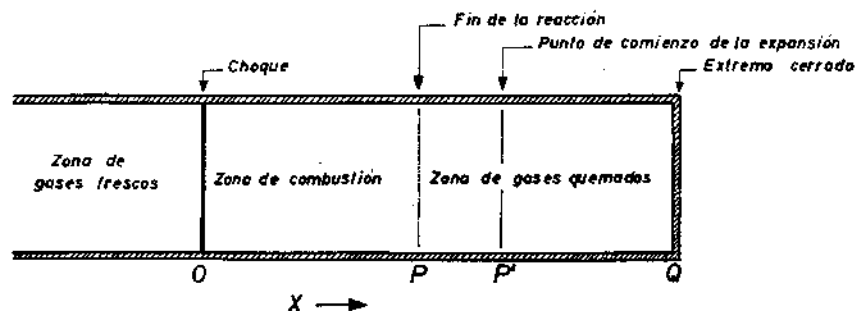


Fig. V.3.—Imposibilidad de detonaciones fuertes autosostenidas.

Sea P' el punto más próximo a P en que la densidad empieza a disminuir con respecto a su valor en P. El estado del gas entre P y P' es constante y el punto P' es el origen de una onda de expansión, la cual, como enseña la Dinámica de Gases, debe propagarse con respecto al gas quemado a la velocidad del sonido.

Por otra parte, como se vio en el capítulo II, en las detonaciones fuertes la velocidad de los gases quemados con respecto al frente es subsónica.

Por tanto, si la velocidad del gas en P' con respecto a O, o, lo que es lo mismo, con respecto a P, es subsónica, P' se aproximará necesariamente a P y el tramo OP dejará de ser estacionario cuando la expansión alcance dicho punto, lo que excluye la posibilidad de detonaciones fuertes autosostenidas en el caso de extremo cerrado.

Pero es claro que si el extremo Q está abierto, en lugar de cerrado, el razonamiento anterior subsiste aún con mayor justificación, lo que excluye también en este caso dicho tipo de detonaciones.

Antes de terminar este punto debe señalarse que las consideraciones cualitativas que acabamos de exponer han sido desarrolladas analíticamente por Taylor (5), quien ha calculado el campo del movi-

(5) G. I. TAYLOR: *The Dynamics of the Combustion Products behind Plane and Spherical Detonation Fronts in Explosives*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1950, págs. 235-47.

miento detrás de la detonación, demostrando que éste se compone de una onda de expansión, que ocupa aproximadamente la mitad del espacio comprendido entre la onda de detonación y el extremo cerrado del tubo, seguida de una zona donde el gas quemado está en reposo, la cual se extiende desde el límite de la onda de expansión hasta el mencionado extremo.

Sin embargo, existen casos prácticos en que las condiciones detrás de la onda son distintas de las que corresponden al experimento del tubo con el extremo abierto o cerrado y permiten mantener ondas de detonación fuertes. Tal sería, por ejemplo, el caso de una detonación producida por la onda de choque que originaría un émbolo que se moviese hacia los gases quemados con suficiente rapidez.

Por otra parte, hay que señalar que el razonamiento anterior de von Newmann presupone que las curvas adiabáticas intermedias de la figura V-1 no se cortan. El propio von Newmann propone un ejemplo, llamado «patológico», en que tales curvas se cortan, el cual pudiera corresponder a un proceso endotérmico en las etapas finales de la reacción, debido, por ejemplo, a la disociación de los productos de la combustión, si bien se carece de evidencia experimental suficiente sobre la existencia de tales casos.

En el caso «patológico», von Newmann muestra que la velocidad de propagación es superior a la de Chapman-Jouguet.

El elegante análisis geométrico de von Newmann que acabamos de resumir ha sido desarrollado analíticamente por Brinkley y Richardson (6), de la Oficina de Minas de Pittsburg, así como por Kirkwood y Wood (7), del Laboratorio de Los Alamos de la Universidad de California (8).

En el epígrafe 21 de capítulo I se vio que la velocidad de propagación de las características de un gas de composición variable es, precisamente, la del sonido a , correspondiente a la composición «congelada» en el punto.

Ello sugiere que dicha velocidad es la que debe emplearse para la

(6) S. R. BRINKLEY y J. M. RICHARDSON: *On the Structure of Plane Detonation Waves with Finite Reaction Velocity*. Fourth Symposium on Combustion. The Williams and Wilkins Co., Baltimore, 1954, págs. 450-457.

(7) J. G. KIRKWOOD y W. W. WOOD: *Structure of a Steady-State Plane Detonation Wave with Finite Reaction Rate*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1954, págs. 1915-19.

(8) Para una exposición de los diversos planteamientos que ha tenido esta cuestión, véase R. CHÉRET: *L'onde de Détonation Idéale et la Condition de Chapman-Jouguet*. «*Annales de Physique*». París, 1966, págs. 169-79.

determinación de la condición de Chapman-Jouguet que define la velocidad de propagación estacionaria de la detonación y así fue propuesto por Brinkley y Richardson y por Kirkwood y Wood, como resultado de los trabajos anteriormente citados (9).

Pero esta conclusión ha dado lugar a una indeterminación de la velocidad de propagación, en el caso de reacciones químicas reversibles, el cual ha sido analizado por Wood y Kirkwood (10), cuyas conclusiones básicas resumimos seguidamente.

Comenzando por señalar que el caso ideal considerado por von Newmann corresponde, en la formulación anterior, al de una sola ecuación de reacción química, la cual es además irreversible, puesto que la adiabática de Rankine-Hugoniot en la figura V-1 es la $\epsilon = 1$, punto en que también es $w (\epsilon = 1) = 0$.

En cuyo caso, la conclusión de Wood y Kirkwood no introduce ninguna dificultad, puesto que sobre dicha adiabática la velocidad del sonido es precisamente la congelada, como se ve fácilmente.

Pero en el caso más general y realista en que la reacción química sea reversible, la curva de Rankine-Hugoniot ya no es la anterior de composición constante $\epsilon = 1$, sino la ϵ , que, para cada par de valores p y ρ corresponda al estado de equilibrio químico, definido por la condición

$$w(p, \rho, \epsilon) = 0. \quad [7]$$

La condición de Chapman-Jouguet aplicada a esta curva de equilibrio, como muestra la figura V-4, está determinada por la tangente 0 — 2 en el punto 2, a la que corresponde una velocidad de los gases quemados que, precisamente por tratarse de la tangente, es la velocidad a_e de sonido correspondiente a la mezcla en equilibrio químico y no la que correspondería al estado congelado.

Ahora bien, como se puso de manifiesto en el epígrafe 21 del capítulo I y en la ecuación [56] del capítulo IV, las condiciones de estabilidad termodinámica enseñan que la velocidad de equilibrio a_e

(9) Estos últimos autores consideran también en su trabajo el caso de las detonaciones «patológicas» de von Newmann.

(10) W. W. WOOD y J. G. KIRKWOOD: *On the Existence of Steady-State Detonations Supported by a Single Chemical Reaction*, «*Jour. Chem. Phys.*», diciembre 1956, pág. 1270. También *Characteristic Equations for Reactive Flow*, Idem id., 1957, pág. 596, así como *Present Status of Detonation Theory*. Idem id., 1958, pág. 957.

es siempre menor que la congelada α_c , por lo que el punto de la curva de equilibrio en que la recta $0-2'$ de la citada figura es tangente a la línea de congelación está situado en $2'$, es decir, por debajo de 2.

Esto equivale a decir que dicho punto corresponde a la rama de detonaciones débiles de la curva de equilibrio de Rankine-Hugoniot, rama que, como se ha puesto de manifiesto anteriormente, es inaccesible.

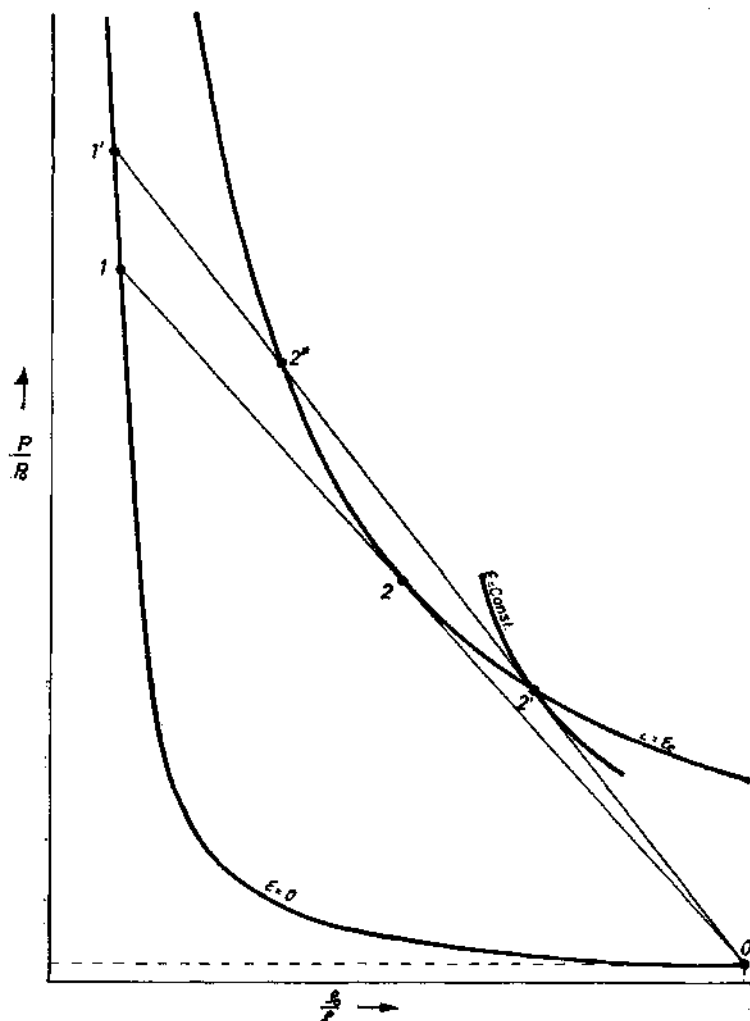


Fig. V-4.—Condición de Chapman-jouguet para una reacción química reversible.

Por consiguiente, la hipótesis de que la condición de Chapman-Jouguet es la correspondiente a la velocidad del sonido en la mezcla congelada, en el punto de equilibrio, no vale, al menos en el caso de una reacción reversible.

De este análisis, Wood y Kirkwood concluyen que el estado estacionario de la onda, al menos para los casos investigados, sólo puede alcanzarse asintóticamente y que en el régimen transitorio la solución correcta es una detonación fuerte que tiende a una detonación de Chapman-Jouguet correspondiente a la velocidad del sonido para el estado de equilibrio, es decir, a la del punto 2 de la figura V-4.

Para esclarecer analíticamente este punto, Wood y Kirkwood sugieren el estudio del problema en régimen transitorio con una definición completa de la condición en el límite caliente, es decir, en el extremo del tubo donde se inicia la detonación; además, recomiendan la realización de observaciones experimentales precisas.

Pero las mediciones llevadas a cabo (11) carecen del poder de resolución necesario para dilucidar esta cuestión.

Por otra parte, cálculos muy precisos, a los que aludiremos después, llevados a cabo por Duff (12) mediante integración numérica efectuada con ayuda de un ordenador IBM 704 a partir del estado del gas situado inmediatamente detrás de la onda de choque, es decir, antes de que se inicie la reacción, para mezclas de hidrógeno, oxígeno y un gas inerte, confirman que la solución corresponde a una detonación fuerte, de acuerdo con lo que habían supuesto Wood y Kirkwood.

3. CASO GENERAL DE VARIAS ESPECIES QUÍMICAS

Así las cosas, el estudio matemático completo de las soluciones estacionarias del sistema diferencial de una onda de detonación ha sido llevado a cabo por Wood y Salzburg en un trabajo fundamental publicado en 1960 (13).

(11) Ver, por ejemplo, G. B. KISTIAKOWSKY y P. H. KYDD: *Gaseous Detonations*. IX. *Study of the Reaction Zone by Gas Density Measurements*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1956, págs. 824-35. También J. P. CHESICK y G. B. KISTIAKOWSKY: *Gaseous Detonations*. X. *Study of Reaction Zones*. Idem id., 1958, págs. 956-61.

(12) R. S. DUFF: *Calculation of Reaction Profiles behind Steady-State Shock Waves*. I. *Application to Detonation Waves*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1958, páginas 1193-97.

(13) W. W. WOOD y Z. W. SALZBURG: *Analysis of Steady-State Supported One-Dimensional Detonations and Shocks*. «*Phys. Fluids*», 1960, págs. 549-66.

Puesto que su análisis se circunscribe al estudio del régimen estacionario, el sistema de ecuaciones es el constituido por las tres condiciones de Rankine-Hugoniot [1], [2] y [3], las cuales, mediante transformaciones sencillas, pueden expresarse en la forma:

$$e - e_1 = \frac{1}{2} (p + p_1) \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho} \right) \quad [8]$$

$$V = \frac{1}{\rho_1^2} \frac{p - p_1}{\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho}} \quad [9]$$

$$\rho (V - v) = \rho_1 V, \quad [10]$$

a las que hay que agregar el conjunto de j ecuaciones de reacción (14)

$$\frac{d \epsilon_i}{d t} = \frac{w_i}{\rho}, \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad [11]$$

suponiendo que existan j especies químicas independientes.

En [8], e es la energía interna de la unidad de mezcla, la cual está determinada por la presión p , la densidad ρ y la composición ϵ_i , $i = 1, 2, \dots, j$, mediante una función de la forma

$$e = f(p, \rho; \epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_j) \quad [12]$$

proporcionada por la Termodinámica.

El problema consiste entonces, en investigar qué soluciones puede tener el sistema diferencial [11] de j ecuaciones, a partir del estado del gas inmediatamente detrás de la onda de choque, el cual se designa en las ecuaciones [8], [9] y [10] con el subíndice 1.

Es decir, se trata de analizar el comportamiento de las soluciones del sistema diferencial, correspondientes al modelo NDZ de la onda de detonación, suponiendo, para ella, que las funciones w_i satisfacen la condición de Lipschitz, que asegura la existencia y unicidad de la solución de [11] en el entorno de cada punto de la región investigada.

(14) Para identificar [11] con [4] recuérdese que $m = \rho v$ y que $\frac{d}{d t} = v \frac{d}{d x}$

Debiendo agregarse que las soluciones buscadas han de cumplir, además, las tres condiciones de conservación [8], [9] y [10], las cuales hacen que el sistema de $3 + j$ ecuaciones que resulta, sea determinado para las $3 + j$ incógnitas ϵ_i , p , ρ , v , puesto que cualquier otra función de estado, como ocurre con e , queda determinada en función de ellas mediante la correspondiente función termodinámica.

Evidentemente, en el sistema anterior, la velocidad V de propagación de la detonación hay que considerarla como un parámetro del problema.

Como se ha visto antes, las soluciones que se buscan se inician, en el modelo NDZ aquí considerado, mediante una onda de choque formada a partir del estado de los gases frescos.

En el diagrama de Rankine-Hugoniot, de la figura V-5, el conjunto de posibles estados iniciales 1 se encuentra, por tanto, sobre la adiabática C_1 de las ondas de choque, la cual pasa por el punto O correspondiente al estado de los gases frescos.

En cuanto al estado final para los gases quemados, está determinado por las condiciones de Rankine-Hugoniot [1] y [2] y por la condición de equilibrio químico de los productos de la combustión, la cual se expresa, en este caso, en la forma:

$$w_i(p, \rho, \epsilon_1', \epsilon_2', \dots, \epsilon_j') = 0, \quad i = 1, 2, \dots, j. \quad [13]$$

Por consiguiente, en el diagrama de la figura V-5, el conjunto de posibles estados finales está situado sobre la curva C_2 de Rankine-Hugoniot correspondiente a la mezcla de productos de la combustión en equilibrio químico.

Finalmente, como se ha visto, el conjunto de estados intermedios deben estar situados por la recta de Rayleigh O-1.

Por ejemplo, en la figura V-5, 2 y 2' son dos puntos correspondientes a estados finales de una detonación fuerte y débil, respectivamente. En particular, cuando 2 y 2' coinciden, la recta de Rayleigh es tangente a C_2 y el punto de contacto CJ, es el de Chapman-Jouguet de equilibrio químico.

Además, puesto que cada punto C_2 tiene una composición determinada por el equilibrio químico en él, por cada punto de C_2 pasa una curva de Rankine-Hugoniot, C_2 correspondiente al estado químico congelado en esa condición de equilibrio, análogamente a lo que ocurría en el caso de una única reacción reversible.

Y aquí también existe, por tanto, una de tales curvas a la que es tangente la recta de Rayleigh que pasa por ese punto, la cual determina, consiguientemente, el punto CJ_e de Champton-Jouguet «congelado», que también aquí y por las mismas razones que entonces, está situado por debajo del CJ_e de equilibrio.

Lo que ocurre en este caso, a diferencia del de una sola reacción química considerado anteriormente, es que, al existir ahora varias

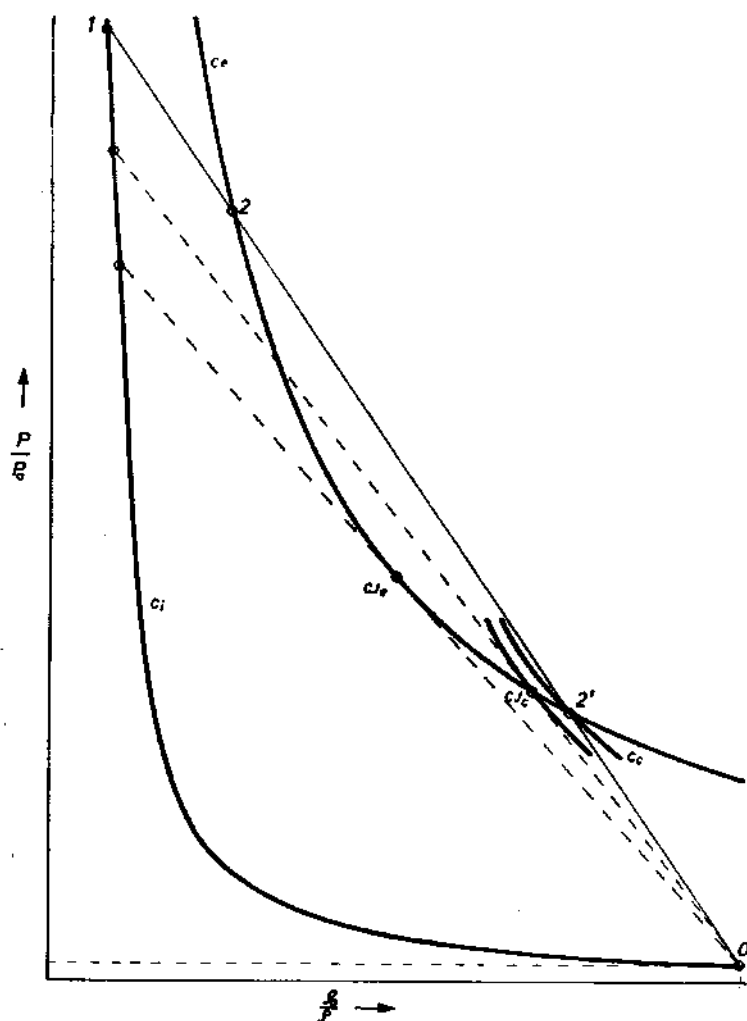


Fig. V-5.—Detonación con varias reacciones químicas simultáneas.

«especies químicas independientes en lugar de una sola, no puede trazarse el haz de curvas de Rankine-Hugoniot correspondientes a los diversos grados de avance de la combustión, puesto que tales curvas dependen aquí de los valores que tomen los j parámetros ϵ_i distintos.

Así pues, el problema consiste en ver qué soluciones admite el sistema [11] que, partiendo del punto 1, como condición inicial, se mueven sobre la recta 01 y terminan en el punto 2 o en el 2'.

Por lo que respecta a la condición inicial, no existe dificultad, puesto que en el punto 1 están determinados los valores ϵ_i^1 de todas las ϵ_i , que son iguales a los ϵ_i^0 de los gases frescos, así como los de la presión p_1 y de la densidad ρ_1 , todos los cuales determinan a su vez los valores de las velocidades de reacción $w_i(p_1, \rho_1, \epsilon_1^0, \epsilon_2^0, \dots, \epsilon_j^0)$, las cuales no son, además, simultáneamente nulas, puesto que el punto 1 no es, por hipótesis, de equilibrio químico. Por tanto, el punto 1 es un punto «regular» para el sistema investigado, por el que pasa una única solución en la dirección 1-2.

Por el contrario, el punto final 2 ó 2' es un punto crítico del sistema [11], en virtud de la condición de equilibrio [13], la cual implica la anulación de todas las derivadas $\frac{d\epsilon_i}{dt}$ en él.

Por consiguiente, la curva final de Rankine-Hugoniot es un lugar geométrico de puntos críticos del sistema diferencial [11] y, además, de alcanzarse dicho estado final, tiene que ser asintóticamente para $t \rightarrow \infty$, o lo que es lo mismo, para $x \rightarrow \infty$, puesto que w_i no depende explícitamente de t , lo que significa que dicho sistema diferencial es «autónomo» (15).

La primera cuestión, en el estudio de las posibles soluciones de este sistema es, por consiguiente, la de analizar la naturaleza de los puntos críticos situados sobre la curva C_2 .

Para ello, como es sabido, hay que linealizar el sistema en el entorno de cada punto crítico ϵ_i^* , $i = 1, 2, \dots, j$, lo que se puede hacer mediante la ley lineal de la Termodinámica de los procesos

(15) Para el análisis de las propiedades de tales sistemas se recomienda la excelente obra de S. LEFSCHETZ: *Differential Equations: Geometric Theory*. Interscience Publ. Inc., Nueva York, 1957, a la que reiteradamente remiten Wood y Salzburg en el trabajo que estamos comentando. Asimismo puede verse la obra de L. CESARE: *Asymptotic Behaviour and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. Springer. Berlín, 1971.

irreversibles (16) la cual proporciona en el entorno del punto crítico una aproximación del sistema, de la forma:

$$\frac{d(\epsilon_i - \epsilon_i^e)}{dt} = \sum_{i=1}^j A_i^t (\epsilon_i - \epsilon_i^e), \quad i = 1, 2, \dots, j, \quad [14]$$

cuyos coeficientes A_i^t dependen solamente del estado termodinámico y de la composición de la mezcla en el punto crítico cuyo carácter se está investigando.

Como es sabido, dicho carácter depende de los «valores propios» de la matriz

$$\| A_i^t \| \quad [15]$$

del sistema [14].

El análisis de los mismos conduce a la clasificación que se muestra en la figura V-6.

Es decir, la rama de detonaciones fuertes, situada por encima del punto de Chapman-Jouguet de equilibrio, así como la de detonaciones débiles, situada debajo del punto de Chapman-Jouguet de congelación, son *nodos estables* hacia los que convergen, por tanto, todas las soluciones de [11] situadas en su entorno.

En cambio, la zona situada entre los dos puntos de Chapman-Jouguet es de puntos de silla inestables.

Debiendo advertirse que la estabilidad que aquí se considera es la estabilidad estructural del sistema diferencial [11] y se refiere, por consiguiente, a la continuidad de las soluciones con respecto a pequeñas variaciones en los valores de los parámetros del mismo, en los términos que precisan Wood y Salzburg en su trabajo (17).

El análisis que acabamos de resumir, sobre la naturaleza de los puntos críticos, permite excluir de los puntos de terminación de las soluciones buscadas del sistema [11], el tramo de C_c comprendido entre los dos puntos de Chapman-Jouguet, dada la inestabilidad estructural de sus puntos para el citado sistema.

Por consiguiente, las soluciones investigadas o terminan en la zona de detonaciones fuerte situada por encima de CJ_c o en la de detonaciones débiles situada por debajo de CJ_c .

(16) Ver, por ejemplo, *The Thermodynamics of Irreversible Process*, del volumen primero de la Enciclopedia de Princeton.

(17) Ver LEFSCHETZ, citado, págs. 239 y sigts.

Para comprobar la accesibilidad de estas zonas es necesario estudiar el comportamiento de las soluciones en el espacio comprendido entre las dos curvas C_i y C_e .

Pero antes hay que analizar la naturaleza de los dos puntos de Chapman-Jouguet CJ_i y CJ_e , los cuales se comprueba que corresponden a un valor propio de la matriz [15] nulo e infinito respectivamente, por lo que su carácter no puede establecerse mediante el sistema lineal [14], debiendo pasarse a desarrollos de orden superior.

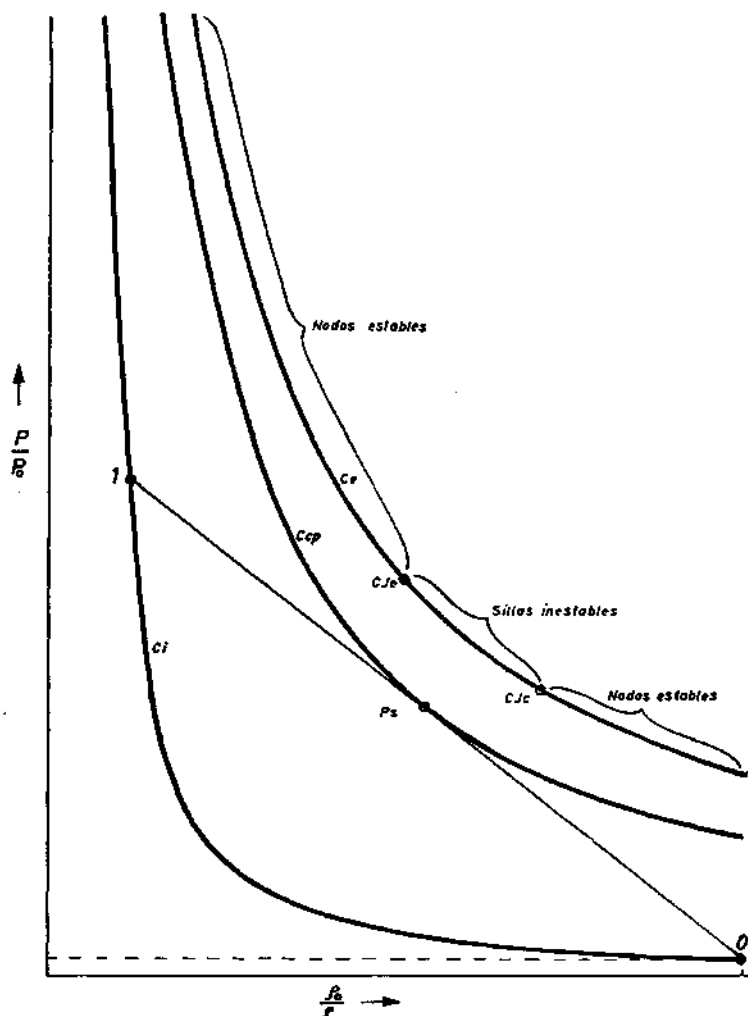


Fig V-6.—Puntos críticos y combustión parcial.

Desarrollo que no puede hacerse, en general, puesto que implica un conocimiento más definido de la cinética de las ecuaciones de reacción, es decir, de w_1 , contrariamente a lo que ocurre en los restantes puntos críticos, donde la determinación de la índole de las raíces de la matriz [15], que es la que define el carácter de aquéllos, no exige tal conocimiento, como muestran Wood y Salzburg en su trabajo.

Por ello, la accesibilidad de C_{J_2} y C_{J_2} han de razonarla mediante consideraciones complementarias, las cuales les llevan a excluir el punto de congelación C_{J_2} , pero no el C_{J_2} , que identifican, no como un nodo estable, sino como un punto de «abanico» (18) por paso al límite para $V \rightarrow V_*$ desde la solución de la rama de detonaciones fuertes.

Es precisamente esta peculiaridad de los puntos de Chapman-Jouguet la que dificulta tanto el estudio de las detonaciones correspondientes a dicho régimen, como comprobaremos más adelante, al considerar algunas soluciones concretas.

Ahora hay que proceder al análisis topológico del comportamiento de las soluciones entre C_0 y C_* , es decir, a partir del estado inicial señalado por el punto 1 y situadas sobre la recta 1-O, para ver si alcanzan el punto 2 o el 2' o si se interrumpen antes o permanecen indefinidamente en una región intermedia, en cuyo caso no alcanzarán ningún punto sobre C_* para $t \rightarrow \infty$.

Este último caso lo excluyen Wood y Salzburg, ya que la solución no puede ser periódica y si permaneciese indefinidamente en el interior, la entropía crecería entonces hasta infinito, lo que resulta termodinámicamente imposible.

Por consiguiente, se concluye que al crecer t la solución o tiende hacia un punto de C_* o se interrumpe antes de llegar a él.

En este último caso, Wood y Salzburg demuestran que dicha interrupción tiene que producirse en un punto sónico para una combustión parcial; es decir, tiene que ocurrir que la recta de Rayleigh, como muestra la figura V-6, sea tangente en P_* a la curva de Rankine-Hugoniot C_* , que corresponde a la congelación de la combustión parcial alcanzada en ese punto.

En cuyo caso, el análisis del comportamiento del sistema diferencial [11] muestra que la solución tampoco puede prolongarse en ré-

(18) Ver LEFSCHETZ, antes citado, pág. 230.

gimen no estacionario, por incompatibilidad de las condiciones iniciales y en los límites del problema (19).

Claro es que tales combustiones parciales se dan para valores del parámetro V menores que el V_c correspondiente a la detonación de Chapman-Jouguet de equilibrio químico.

Así, pues, si la detonación debe acabar necesariamente sobre una zona de C_c de nodos estables, se trata de saber si son asequibles los dos tramos de los mismos o solamente uno de ellos.

Demostrándose que el inferior resulta inaccesible, porque las soluciones que conducirían a él desde 1 deberían atravesar un punto sónico, donde quedarían interrumpidas, como se ha dicho.

Por lo que se concluye que las únicas detonaciones estacionarias posibles resultan ser las «fuertes», con la de Chapman-Jouguet de equilibrio como caso límite de ellas.

Como hemos indicado, el trabajo de Wood y Salzburg se completa con un análisis de las detonaciones patológicas, en el que no entraremos aquí, porque corresponde a un caso de menor interés práctico.

Un ejemplo muy ilustrativo de aplicación práctica de la teoría de Wood y Salzburg, que acabamos de exponer, ha sido desarrollado por Erpenbeck (20) para el caso de un gas ideal formado por una mezcla de tres especies químicas diferentes, cuya composición varía a causa de dos reacciones químicas reversibles.

El interés de la aplicación de Erpenbeck estriba, de un lado, en la facilidad del tratamiento analítico del problema, al ser posible en este caso una formulación explícita, tanto de las funciones termodinámicas como de las condiciones de Rankine-Hugoniot y de las velocidades de reacción.

Por otra parte, al existir tres únicas especies químicas, la composición de la mezcla queda determinada por las fracciones másicas ϵ_1 y ϵ_2 de dos de ellas, puesto que las tres fracciones han de cumplir, evidentemente, la condición

$$\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 = 1. \quad [16]$$

(19) Constituye una excepción el caso de una detonación «patológica» de von Newmann, que Wood y Salzburg analizan también en su trabajo.

(20) J. J. ERPENBECK: *Two-Reaction Steady Detonations*. «Phys. Fluid.», 1961, págs. 481-92.

Con ello, el sistema diferencial [11] se reduce a uno de dos únicas ecuaciones con las dos incógnitas anteriores:

$$\frac{d \varepsilon_1}{d t} = \frac{w_1(p, \rho, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\rho}; \quad \frac{d \varepsilon_2}{d t} = \frac{w_2(p, \rho, \varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\rho}. \quad [17]$$

Como se ha dicho, en estas dos ecuaciones p y ρ se expresan explícitamente en función de ε_1 y ε_2 merced a las condiciones de Rankine-Hugoniot (21) y w_1 y w_2 son también funciones conocidas de ellas, a través de la ley de acción de masas y de la de Arrhenius.

Por tanto, el comportamiento de las soluciones buscadas puede analizarse con toda comodidad en el «plano de fase» de [17] (22).

En su interesante trabajo, Erpenbeck efectúa el análisis de las posibles soluciones, tanto para detonaciones normales como para las de tipo patológico, así como la integración numérica del problema en varios casos típicos.

Como resultado de este análisis, Erpenbeck concluye que si bien existen soluciones que corresponden a una detonación del tipo Chapman-Jouguet de equilibrio para algunos de los casos investigados, en otros la solución se interrumpe en un punto sónico, antes de alcanzar la condición de equilibrio correspondiente a la combustión completa, dependiendo el que se dé una u otra de tales situaciones de los valores que asignen a los parámetros termodinámicos y cinéticos del proceso.

Asimismo, al suponer que una de las dos reacciones es exotérmica y la otra endotérmica, muestra que resulta posible obtener soluciones matemáticas correspondientes a detonaciones patológicas estables, mediante una adecuada selección de los citados parámetros.

4. SOLUCIONES DEL SISTEMA PARA EL MODELO NDZ

El modelo NDZ, cuya teoría acabamos de exponer, ha servido de base para el cálculo numérico de un gran número de casos de interés práctico, correspondientes a modelos con cinética química y funciones termodinámicas idealizadas, como el de Erpenbeck antes citado, o a

(21) En las expresiones que resultan, y para las que remitimos al trabajo citado, aparece como parámetro la velocidad de propagación de la detonación o, lo que es lo mismo, su número de Mach.

(22) Ver, por ejemplo, LEFSCHETZ, antes citado, págs. 170 y sigts.

casos reales como el de Düff, también mencionado, los cuales han sido publicados en la literatura especializada, a la que remitimos al lector (23).

Entre tales trabajos es conveniente mencionar, por la sencillez de su formulación, el ejemplo desarrollado por el profesor Erpenbeck en relación con sus estudios de estabilidad para el caso de una única reacción química irreversible (24), es decir, para el caso de una reacción química de la forma [4].

En este caso, si es M_0 el número de Mach de la propagación de la detonación

$$M_0 \equiv \frac{V}{a_0}, \quad [18]$$

donde $V = -v_0$ es la velocidad de propagación de la onda de choque a través de los gases frescos y

$$a_0 \equiv \sqrt{\gamma_0 \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad [19]$$

es la velocidad de propagación del sonido en ellos (25) la solución del sistema [1] a [4] está dada por las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{p_1} &= \frac{1 + \gamma \omega \eta}{1 + \gamma \omega} \\ \frac{\rho}{\rho_1} &= \frac{1 - \omega}{1 - \omega \eta} = \frac{v_1}{v} \\ \frac{T}{T_1} &= \frac{1 + (\gamma - 1) \omega \eta - \gamma \omega^2 \eta^2}{(1 - \omega)(1 + \gamma \omega)} \\ 1 - M^2 &= \frac{(\gamma + 1) \omega \eta}{1 + \gamma \omega \eta} \end{aligned} \right\} \quad [20]$$

(23) Ver, por ejemplo, el trabajo de BRINKLEY y RICHARDSON y los de KIRKWOOD y WOOD antes citados.

(24) J. J. ERPENBECK: *Stability of Idealized One-Reaction Detonations*. «Phys. Fluids», 1964, págs. 684-96.

(25) Para la relación de calores específicos en los gases frescos se utiliza el símbolo γ_0 , porque la relación y detrás de la onda, es decir, en la zona de reacción será, en general, distinta de γ_0 y menor que ella, como ya se ha indicado en otros casos.

donde ω es un parámetro relacionado con el número de Mach M_0 de la propagación de la detonación por la expresión:

$$\omega = \frac{M_0^2 - 1}{\gamma_0 M_0^2 + 1} \quad [21]$$

y η es una variable auxiliar que se expresa en función ϵ en la forma:

$$\eta = \left[1 - \frac{2(\gamma^2 - 1) M_0^2}{\gamma (M_0^2 - 1)^2} Q \epsilon \right]^{1/2}, \quad [22]$$

siendo

$$Q = \frac{q}{R T_0} \quad [23]$$

el calor adimensional de la reacción.

El sistema [20] permite expresar las distribuciones de las variables termodinámicas y de la velocidad en función de la variable de composición z . Para trasladar los resultados al espacio geométrico x basta con integral la ecuación [4], como se dijo al comienzo, haciendo para ello uso de [5], lo que da

$$\xi = \int_0^\epsilon \frac{\rho_1}{\rho} (1 - \epsilon')^{-1} \cdot \exp \left[- \frac{E}{R T_1} \left(1 - \frac{T_1}{T} \right) \right] d\epsilon', \quad [24]$$

siendo

$$\xi \equiv \frac{x}{\delta} \quad [25]$$

la distancia adimensional de la ondad de choque y

$$\delta \equiv \frac{m}{w_1} = \frac{v_1}{k} e^{\frac{R}{R T_1}} \quad [26]$$

una longitud característica del proceso.

A título de ejemplo, la figura VI7 muestra, en a) la variación de

las diversas funciones con el grado de avance ϵ de la reacción, y en b) los perfiles de aquéllas a lo largo de la onda, para un caso típico, definido por los valores de los parámetros que se indican en la figura.

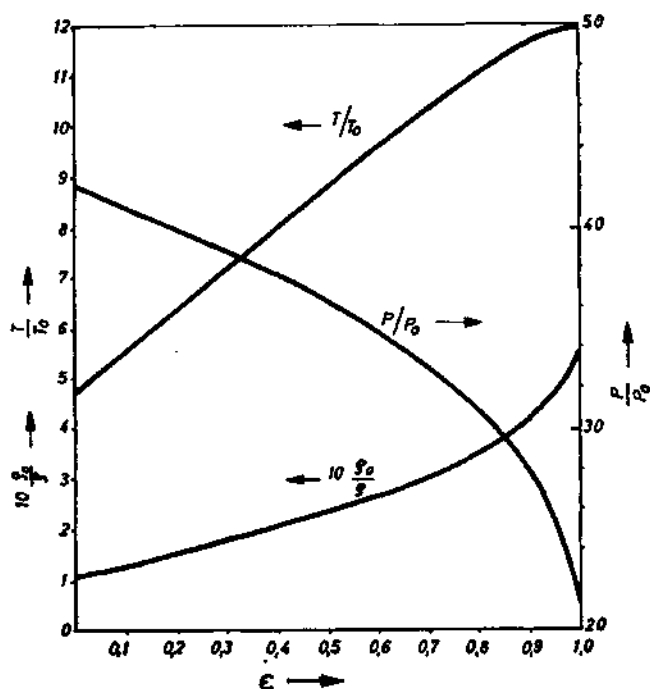


Fig. V-7,a.—Estructura de una onda de detonación. Distribución de las variables de estado en función del grado de avance de la combustión.

Otro ejemplo idealizado, igualmente interesante, es el que hemos citado anteriormente debido también a Erpenbeck, para el caso de tres especies químicas distintas que se combinan mediante dos reacciones químicas reversibles independientes. En el citado trabajo se encuentra la formulación matemática que sustituye al sistema [20] a [23] del ejemplo precedente.

Entre los casos de mezclas «reales» hay que citar, en primer lugar, el de Düff antes mencionado, quien compara además cualitativamente los perfiles de distribución que obtiene por integración numérica de las ecuaciones, con los resultados de mediciones experimentales llevadas a cabo por métodos espectrográficos y mediante otras técnicas de observación.

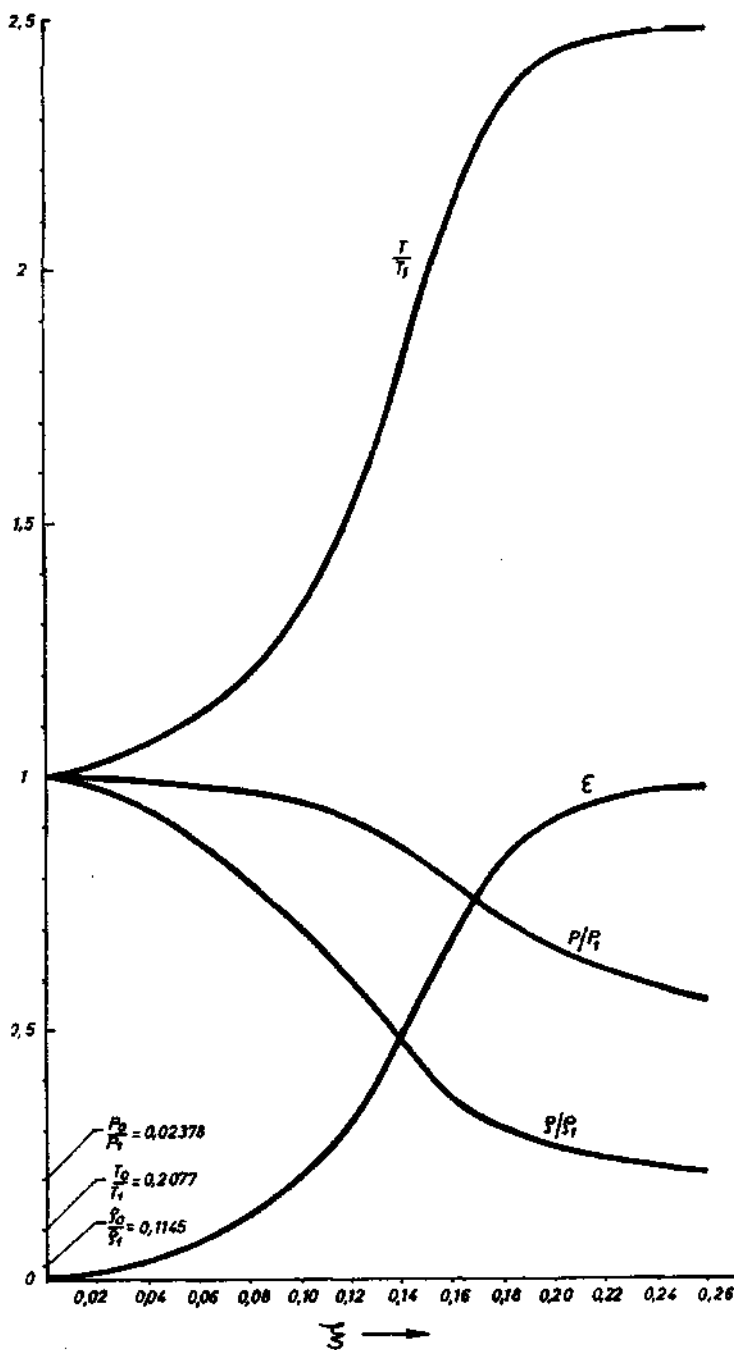


Fig. V-7, b.—Estructura de una onda de detonación. Distribución de las variables de estado y del grado de avance de la combustión a lo largo de la onda.

Pero uno de los ejemplos sin duda más recientes de cálculo de un caso real, el cual ilustra muy bien, además, las dificultades técnicas de un trabajo de esta naturaleza, tanto por lo que respecta a la programación del método de cálculo como en cuanto a la disponibilidad de datos químicos y termodinámicos de las mezclas detonantes y a la forma de obtener los respectivos parámetros, especialmente cuando se desea incluir el esquema cinético completo, es el llevado a cabo por Dove, Scroggie y Tribbeck (26) en el Departamento de Química de la Universidad de Toronto, para mezclas estequiométricas de oxígeno e hidrógeno a diversas presiones, en el caso de una detonación de Chapman-Jouguet. En particular, el esquema cinético empleado incluye 13 reacciones químicas entre ocho especies diferentes de productos iniciales, intermedios y finales. El trabajo compara también los resultados del cálculo numérico con los proporcionados por diversas mediciones experimentales e incluye una interesante bibliografía.

La figura V-8, tomada de la citada referencia muestra, en *a*), la distribución de reactantes y productos en un caso típico. En *b*), los perfiles de distribución de la densidad, presión y temperatura correspondientes al mismo caso.

En ella se ve que, como ocurre en muchos casos, la reacción química se produce muy rápidamente, es decir, en una zona de pequeño espesor, situada a una cierta distancia δ_i detrás del choque.

Esta distancia está determinada por el tiempo t_i de «inducción» durante el cual tiene que permanecer la mezcla combustible sometida a la presión y temperatura elevadas que alcanza detrás del choque, para que llegue a producirse la reacción.

Esto ha llevado a proponer el modelo de onda de detonación rectangular que se muestra en la figura V-9, el cual es una simplificación del proceso real.

En dicho modelo, la onda de detonación está constituida por la superposición de dos discontinuidades consecutivas: una onda de choque A y una de combustión B, separadas entre sí por la distancia de inducción δ_i . Esta distancia se relaciona, evidentemente, con el tiempo de inducción t_i , mediante la expresión

$$\delta_i = v_1 t_i, \quad [27]$$

(26) J. E. DOVE, B. J. SCROGGIE y T. D. TRIBBECK: *Computer Studies of Reaction Profiles in Gas Detonations*. «Astr. Acta», 1969, págs. 521-31.

siendo v_1 la velocidad de los gases inmediatamente detrás de la onda de choque.

Por su parte, t_i depende exclusivamente de la composición de la mezcla y de su estado termodinámico detrás del choque, el cual está,

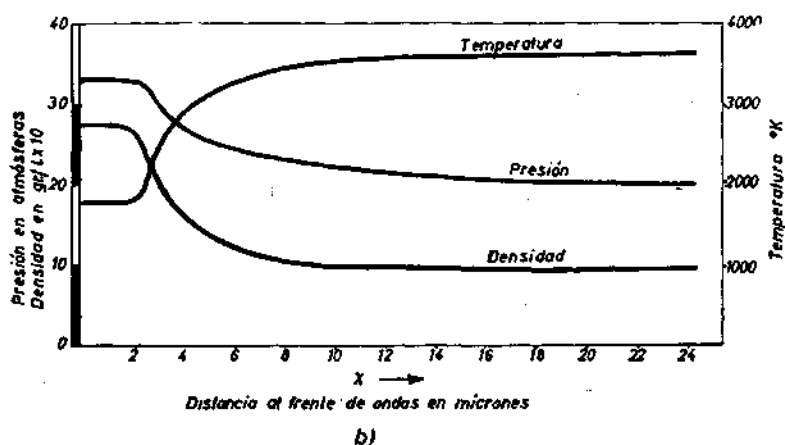
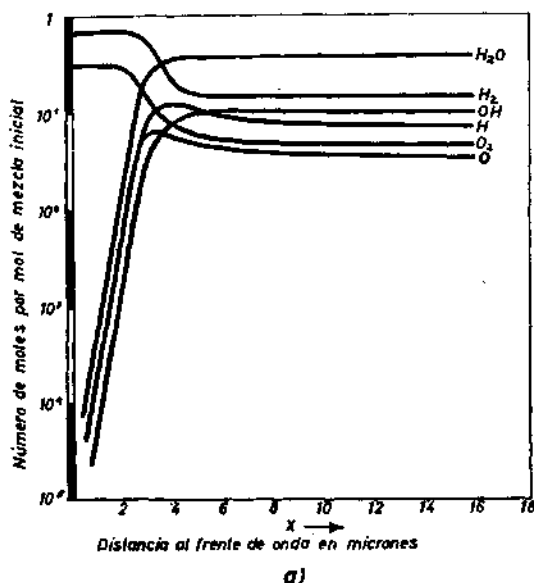


Fig. V-8.—Estructura de la onda de detonación de Chapman-Jouguet, de una mezcla estequiométrica de hidrógeno y oxígeno, a presión y temperatura ambientales, según cálculos de Dove, Scroggie y Tribbeck.

a su vez, determinado por el estado de los gases frescos y por la intensidad de aquél.

El cálculo de la detonación de estructura rectangular se reduce al de las curvas de Rankine-Hugoniot del choque y de la discontinuidad de combustión y a la determinación del tiempo de inducción. Esto

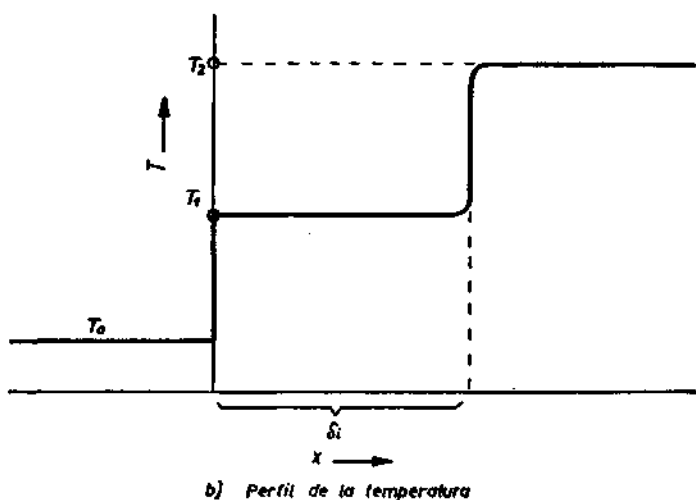
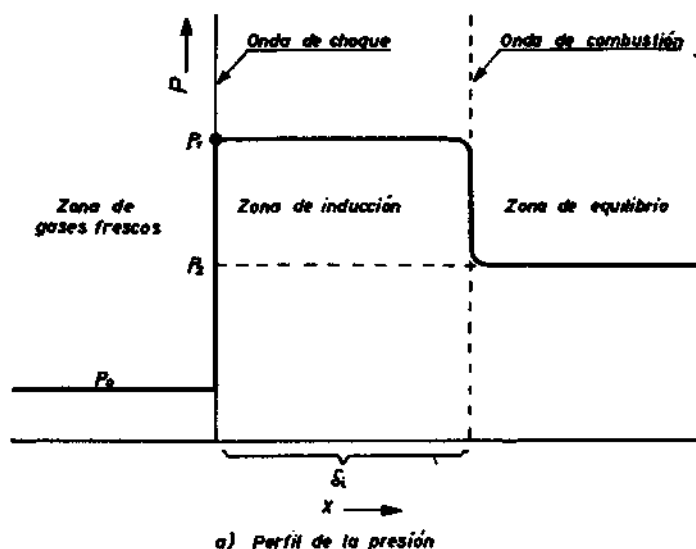


Fig. V.—Modelo de onda rectangular.

último se hace experimentalmente utilizando, por ejemplo, la técnica del tubo de choque.

Erpenbeck (27), en relación con el análisis de la estabilidad de las ondas de detonación a que nos referiremos después, ha investigado la estructura de la onda rectangular como solución asintótica de una onda NDZ para el caso de una energía de activación muy elevada.

Considerando el caso ideal de una detonación con una única reacción química de la forma [5], la ecuación [4] permite expresar x en función de ϵ , como se hizo en [24], en la forma:

$$x = \int_0^{\epsilon} \frac{m}{w} d\epsilon'. \quad [28]$$

La existencia del término $e^{-\frac{E}{R T_1}}$ en w permite desarrollar la integral de [28] en serie asintótica del parámetro

$$\alpha = \frac{\epsilon}{R T_1} \left(\frac{d \ln T}{d \epsilon} \right)_1 \quad [29]$$

para valores de $\frac{E}{R T_1}$ muy grandes, como los que se dan generalmente en los fenómenos que estamos estudiando, obteniéndose para x una expresión de la forma

$$x = \delta_i [1 + O(\alpha^{-1})], \quad [39]$$

donde

$$\delta_i \equiv \frac{m}{w_1 \alpha} \quad [31]$$

(27) J. J. ERPENBECK: *Structure and Stability of the Square-Wave Detonation*, Ninth Symp. on Comb. Academic Press, Nueva York, 1963, págs. 442-53.

es la «distancia de inducción» de la onda, a la que, en virtud de [27], corresponde un tiempo de «inducción» t_i , dado por la expresión (28)

$$t_i \equiv \frac{\delta_i}{v_i} = \frac{\rho_i}{w_i \alpha} \quad [32]$$

Erpenbeck demuestra que para valores de α suficientemente grandes, es decir, para energías de activación suficientemente elevadas, la casi totalidad de la reacción se produce en un «frente de combustión» situado en el entorno de $x = \delta_i$, lo que justifica en tales casos el empleo del modelo rectangular de la figura V-9.

En el citado trabajo de Erpenbeck se dan las expresiones para las soluciones asintóticas en las tres zonas de inducción, reacción y equilibrio en que se divide la región $x > 0$ de la onda de combustión.

5. FORMACIÓN DE LA ONDA DE DETONACIÓN

En cuanto al estudio del problema en régimen no estacionario, que corresponde al proceso de formación de la onda, recientemente Sternberg (29), del Laboratorio de Artillería de la Marina de los Estados Unidos, ha efectuado un análisis matemático completo de la existencia y unicidad de soluciones para el caso de una reacción química única e irreversible, tomando en consideración las condiciones en los límites, en la forma sugerida por Wood y Kirkwood, a la que hemos aludido anteriormente.

El análisis lo lleva a cabo estudiando las soluciones del sistema diferencial hiperbólico no estacionario considerado en el epígrafe 21 del capítulo I, correspondiente al problema de Cauchy que resulta de suponer que en el instante inicial $t = 0$ se genera una onda de choque a través de la mezcla detonante en reposo al poner en movimiento un émbolo en el extremo del tubo que contiene aquella.

Al cabo de un cierto tiempo, la onda de choque habrá recorrido un determinado espacio y lo que se trata es de buscar la solución del

(28) Recordamos que, en todas las expresiones anteriores, el subíndice «1» significa que los valores hay que tomarlos en el punto $x = 0$, $x = 0$, inmediatamente detrás de la onda de choque y antes de que se inicie la reacción.

(29) H. M. STERNBERG: *On the Mathematical Theory of the Chapman-Jouguet State*. «Astr. Acta», noviembre 1970, págs. 359-69.

sistema diferencial para la masa de gas comprendida entre el choque y el émbolo, si es que existe, y de comprobar si puede ser estacionaria a partir de un momento dado.

El método que aplica para ello es el de comenzar por buscar soluciones de semejanza, previamente desarrolladas por él (30), que son las que corresponderían a un régimen estacionario, en el caso de una detonación que se propagase con velocidad constante.

Las conclusiones más importantes de este análisis son, en primer lugar, que no existen soluciones estacionarias para el caso de ondas que se propaguen con velocidad inferior a la de Chapman-Jouguet, porque entonces aparece en la zona de reacción, en un punto donde la combustión es incompleta y la velocidad de la partícula es sónica, una línea «límite», envolvente de las características, que impide prolongar la solución estacionaria más allá de ella.

En segundo lugar, que una solución estacionaria para la detonación de Chapman-Jouguet es sólo posible en un tiempo finito, es decir, no como solución asintótica para $t \rightarrow \infty$, cuando el orden de la reacción química es inferior a la unidad (31).

Por último, que existe siempre una detonación fuerte.

En el citado trabajo, Sternberg analiza el régimen no estacionario mediante integración numérica del sistema diferencial por el método de la viscosidad artificial de von Neumann (32), considerando el caso de una detonación de Chapman-Jouguet para un orden de reacción inferior a la unidad, con objeto de comprobar la convergencia hacia la solución estacionaria en un tiempo finito, así como el caso de orden 1, en el que dicha solución se aproxima a aquél asintóticamente, como se ha dicho.

Finalmente, también toma en consideración el estudio de las soluciones correspondientes a las detonaciones patológicas, cuando la última parte de la reacción es endotérmica (33).

(30) H. M. STERNBERG: *Similarity Solutions for Reactive Shock Waves*. «Quart. Jour. Mech. and Appl. Math.», 1970, págs. 77-79.

(31) Es decir, cuando la velocidad de reacción w de la ecuación [4] es de la forma $w \sim (1 - \epsilon)^n f(p, T)$, con $n < 1$.

(32) Ver la referencia del epígrafe 18 del capítulo primero.

(33) Para un estudio más detallado sobre el problema no estacionario y su tratamiento matemático en el caso de las detonaciones, véanse, por ejemplo, además de los trabajos de STERNBERG antes citados, en los que se encontrará también bibliografía complementaria, los siguientes: D. C. PACK y F. J. WARNER: *Whitham's Shock Wave Approximation Applied to the Initiation of Detonation in*

6. INFLUENCIA DE LOS EFECTOS DE LA VISCOSIDAD Y DE LA CONDUCTIVIDAD TÉRMICA

Todas las soluciones del modelo NDZ se caracterizan porque la onda de choque se considera como un salto que sirve para calcular las condiciones iniciales de presión, densidad, temperatura y velocidad en el punto donde empieza la zona de combustión («pico de von Newmann») de tal modo que, o bien el espesor del choque se supone nulo o bien, si se calcula su estructura interna por alguno de los métodos expuestos en el capítulo precedente, hay que hacerlo separadamente de la onda de combustión y proceder después al empalme artificial de uno y otra.

Un poco más en el estudio de la estructura interna de las ondas de detonación fue dado por Hirschfelder y Curtiss (34) al tomar en consideración la influencia de los fenómenos de transporte que permiten analizar el acoplamiento entre las zonas de choque y combustión.

Para ello hay que retener en las ecuaciones de la onda los términos de conductividad, viscosidad y difusión del sistema [1] a [3] del capítulo III, pero su presencia complica sustancialmente la dificultad matemática del problema.

Sin embargo, tal estudio tiene interés porque la índole de las singularidades de las ecuaciones diferenciales que resultan en los extremos caliente y frío permite poner de manifiesto muy claramente la variedad y el comportamiento de las soluciones posibles para cada tipo de onda y las dificultades a prever en los esquemas de cálculo numérico.

En los citados trabajos, dichos autores llevan a cabo el análisis de las soluciones para los casos simplificados de reacciones químicas unimoleculares, reversibles e irreversibles, procediendo a la integración numérica de las ecuaciones para un conjunto de valores típicos de los parámetros fundamentales mediante el empleo de calculadoras electrónicas.

Solid Explosives, Tenth Symp. on Comb. The Comb. Inst., 1965, págs. 845-53; así como M. COWPERTHWAIT y G. K. ADAMS: *Explicit Solutions of Steady and Unsteady-State Propagation of Reactive Shocks at Constant Velocity*, Eleventh Symp. on Comb. The Comb. Inst., 1967, págs. 708-11.

(34) J. O. HIRSCHFELDER y C. F. CURTISS: *Theory of Detonations*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1958, págs. 1130-51. También HIRSCHFELDER, CURTISS y BIRD: *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley and Sons, 1954.

Asimismo, Oppenheim y Rosciszewski (35) han obtenido soluciones numéricas, mediante el empleo de un calculador IBM 704, para las ondas de detonación de la descomposición del ozono, incluyendo las variaciones en los valores de los coeficientes de transporte debidas a los cambios de temperatura, así como las variaciones en el número de moles debidas al cambio de composición de la mezcla y empleando el esquema cinético real del proceso químico.

Dentro de esta misma línea, Adamson (36) ha tratado el mismo problema por un método de perturbaciones, desarrollando la solución en serie de potencias del parámetro de von Karman $\frac{t_m}{t_g} \ll 1$.

El primer término del desarrollo, correspondiente a la solución de orden cero proporciona, naturalmente, los resultados conocidos del modelo NDZ, mientras que el resultado de la perturbación de primer orden, la cual se obtiene con gran facilidad y economía de cálculo, da resultados muy próximos a los de la integración numérica de Hirschfelder.

Recientemente, Busch y Fendel (37) han efectuado un estudio asintótico de la estructura de la onda de detonación, desarrollando las soluciones en función de un parámetro que relaciona, de un lado, la velocidad de reacción con el flujo de gas a través de la onda (primer parámetro de Damköhler) y de otro la temperatura de activación de la reacción química con la temperatura máxima de los gases quemados.

En su análisis, estos autores identifican hasta ocho zonas distintas en el interior de la onda, según los efectos que predominen en cada una de ellas.

El trabajo tiene interés como ejemplo de los métodos matemáticos de aproximación que se utilizan en el estudio de esta clase de problemas.

Como asimismo tiene interés desde este punto de vista un trabajo de Bowen (38) que ilustra la forma de pasar de la solución NDZ a

(35) A. K. OPPENHEIM y J. ROSCISZEWSKI: *Determination of the Detonation Wave Structure*. Ninth Symp. on Comb., Acad. Press., 1963, págs. 424-41.

(36) T. C. ADAMSON: *On the Structure of Plane Detonation Wave*. «Phys. Fluids.», 1960, pág. 706.

(37) W. B. BUSCH y F. E. FENDELL: *Asymptotic Analysis of the Structure of Steady Planar Detonation*. «Comb. Sci. and Tech.», 1971, págs. 271-86.

(38) J. R. BOWEN: *Approximations the Structure of a Laminar Detonation*

otras de empalme entre la onda de choque y la zona de reacción, mediante un método de perturbaciones por desarrollos asintóticos en la proximidad del choque y en la zona de reacción, acoplados en forma que se obtienen aproximaciones sucesivas de orden creciente y uniformemente válidas en toda la región.

7. DETONACIONES EN ESPIRAL

Durante la última década, los trabajos más intensos y las más importantes contribuciones a la teoría de la detonación se han orientado hacia el estudio de la inestabilidad de las ondas planas, cuyo modelo acabamos de describir.

El procedimiento clásico para estudiar experimentalmente el fenómeno consiste en observar fotográficamente cómo se propaga una onda de detonación a través de una mezcla explosiva contenida en un tubo de sección circular, y en medir la velocidad de propagación sobre el registro fotográfico, comparándola con la que corresponde a la condición de Chapman-Jouguet para esa mezcla (39).

Al aplicar este procedimiento al estudio de mezclas detonantes de oxígeno y monóxido de carbono, Campbell y Woodhead (40) fueron los primeros en observar que, cuando la composición de la mezcla está próxima a los límites de detonabilidad, la explosión, en lugar de propagarse de modo uniforme a las sucesivas secciones transversales, de acuerdo con el modelo de onda plana descrito en los párrafos precedentes, lo hace en forma helicoidal, dando lugar al fenómeno llamado habitualmente de detonación en espiral.

El estudio de las causas y propiedades de la detonación en espiral ha sido objeto desde entonces de numerosas investigaciones teóricas

Wave by the Method of Matched Asymptotic Expansions. «Phys. Fluids», 1967, págs. 290-96.

(39) Ver, por ejemplo, W. JOST: *Explosions-und Verbrennungs-vorgänge in Gasen*. Springer, 1939, págs. 171 y sigts. Existe traducción inglesa: *Explosion and Combustion Processes in Gases*. McGraw-Hill, Nueva York, 1946.

(40) C. CAMPBELL y D. W. WOODHEAD: *The Ignition of Gases by an Explosion Wave*. «Jour. Chem. Phys.», 1926, pág. 3010, y 1927, pág. 1572. Ver también W. A. BONE, R. P. FRASER y W. H. WHEELER: *A Photographic Investigation of Flame Movements in Gaseous Explosions*. Par. 7. *The Phenomena of Spin in Detonation*. «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1935, págs. 29-68.

y experimentales, las cuales han permitido esclarecer el fenómeno en términos completamente satisfactorios.

En particular, la explicación teórica fue dada por Manson (41), en Francia, e independientemente por Fay (42), en Estados Unidos, quienes pusieron de manifiesto que la detonación en espiral resulta del acoplamiento entre las oscilaciones de la onda de detonación y los modos naturales de vibración transversal de los gases quemados en el tubo.

A pesar de que las oscilaciones de presión observadas en este tipo de detonación son muy grandes, es decir, aun cuando el problema es de naturaleza esencialmente no lineal, ambos autores aplican la teoría acústica para determinar la frecuencia natural de las vibraciones transversales de los gases quemados, obteniendo resultados que concuerdan muy satisfactoriamente con las observaciones experimentales.

Con la hipótesis de linealización indicada y suponiendo que la vibración es estrictamente transversal, creciendo, por tanto, de componente paralela al eje del tubo, el cálculo de la frecuencia resulta sumamente sencillo.

En efecto, sea $\varphi(r, \theta, t)$ el potencial de velocidades de la vibración transversal en coordenadas cilíndricas r, θ y donde t es el tiempo. Si es a el valor de la velocidad de propagación del sonido en los gases quemados, la ecuación diferencial para el cálculo de φ es la siguiente (43):

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} . \quad [33]$$

La solución que se busca debe tener velocidad radial nula sobre la pared del tubo, lo que da la siguiente condición de contorno:

$$\text{para } r = \frac{d}{2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad [34]$$

siendo d el diámetro de aquél.

(41) N. MANSON: *Propagation des Detonations et des Deflagrations dans les Mélanges Gazeux*. ONERA, Paris, 1947.

(42) J. A. FAY: *A Mechanical Theory of Spinning Detonations*, «Jour. Chem. Phys.», 1952, págs. 942-50.

(43) Ver, por ejemplo, LORD RAYLEIGH: *Theory of Sound*. Epígrafes 241 y 339, Dover Publications, 1945.

Al ensayar en [33] soluciones de la forma :

$$\varphi(r, \theta, t) = e^{i 2 \pi \nu t} \psi(r, \theta), \quad [35]$$

correspondientes a vibraciones naturales de frecuencia ν , se obtiene para ψ la ecuación diferencial :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \left(\frac{2 \pi \nu}{a} \right)^2 \psi = 0, \quad [36]$$

cuya solución puede expresarse en la forma :

$$\psi = \sum_n J_n \left(\frac{2 \pi \nu r}{a} \right) \cdot \cos \cdot n \theta, \quad [37]$$

donde $J_n(z)$ es la función de Bessel de orden n y argumento $z = \frac{2 \pi \nu r}{a}$.

La condición de contorno [34] se expresa en la forma :

$$\frac{\pi \nu_n d}{a} = z_n, \quad [38]$$

siendo z_n la raíz más pequeña de la derivada de J_n con respecto a su argumento :

$$J'_n(z_n) = 0. \quad [39]$$

La fórmula [38] determina las frecuencias ν_n de los modos de vibración natural del gas :

$$\nu_n = \frac{a \cdot z_n}{\pi d}. \quad [40]$$

En particular, la frecuencia más baja ν , correspondiente al caso $n = 1$, es la que se observa en la detonación espiral simple y se relaciona con el paso P de la hélice de la detonación mediante la expresión :

$$P = \frac{V}{\nu}, \quad [41]$$

como se comprueba fácilmente, siendo V la velocidad de propagación de la detonación a lo largo del tubo.

Puesto que el paso de la detonación en espiral se puede medir experimentalmente, las fórmulas [40] y [41] permiten comparar la teoría propuesta con los resultados de los ensayos.

Al hacerlo se comprueba que la aproximación proporcionada por la teoría de Manson y Fay es muy satisfactoria, a pesar de que el modelo propuesto adolece de una doble simplificación muy severa.

En primer lugar, y como ya se ha indicado, se trata de una teoría lineal, mientras que las oscilaciones de presión observadas experimentalmente son muy elevadas. La aplicabilidad del modelo lineal se justifica porque la amplitud de las vibraciones influye poco en su frecuencia, única variable que aquí interesa.

En segundo lugar se han supuesto vibraciones puramente transversales, mientras que en la realidad tiene que existir una componente axial importante, al menos en la proximidad de la onda, puesto que ésta avanza con velocidad V y es ella la que proporciona la energía necesaria para mantener la vibración transversal que origina la espiral. Fay, en el trabajo citado, ha calculado la influencia de este factor en el valor de la frecuencia, comprobando que es también muy pequeña.

Por consiguiente, se concluye que el modelo propuesto explica en forma satisfactoria el mecanismo que produce el fenómeno de la detonación en espiral.

Por lo demás, este modelo ha sido investigado y extendido posteriormente por Chu (44), para incluir efectos en tres dimensiones.

Una segunda cuestión de gran importancia para el esclarecimiento del fenómeno de la detonación en espiral y de la estructura de los sistemas de ondas de detonación en general, es la de determinar la configuración de la onda helicoidal que sustituye en este caso a la onda plana anteriormente considerada.

La cuestión ha sido intensamente estudiada en Rusia y en Estados Unidos durante la última década, como parte del problema general de la inestabilidad de las ondas de detonación al que nos referiremos más tarde, habiéndose llegado a proponer independientemente modelos

(44) B. T. CHU: *Vibration of the Gaseous Column behind a Strong Detonation Wave*. Proc. Gas Dyn. Symp. Aerothermochemistry. Northwestern Univ. Press., Evanston III, 1956, págs. 96-111.

básicamente coincidentes por parte de los investigadores de ambos países (45).

Desde el punto de vista experimental debe señalarse que las observaciones capaces de ilustrar la compleja estructura del sistema de ondas propio de una detonación en espiral obligan al empleo de técnicas de laboratorio dotadas de un poder de resolución muy superior al de las que se empleaban con anterioridad. Tales técnicas han sido puestas a punto en los últimos años y la descripción de algunas de ellas se encontrará, por ejemplo, en la bibliografía citada.

El resultado de tales observaciones, interpretado mediante la aplicación de la teoría de la interacción de ondas de choques (46) ha permitido construir el modelo que se muestra en la figura V-10, basada en el trabajo de Macpherson publicado en *Astronautica Acta*, que se ha citado anteriormente.

La figura representa la intersección con las paredes del tubo, del sistema de ondas de choques y detonación que se forman. Asimismo, en el trabajo de Macpherson publicado en el XII Congreso de Combustión, que también se cita en la referencia anterior, puede verse un dibujo del sistema completo de ondas en tres dimensiones.

Por su parte, Schott, en el trabajo antes citados, muestra un desarrollo sobre la pared del tubo del sistema de ondas resultante de un conjunto de observaciones experimentales que confirma plena-

(45) Véase, a este respecto, la siguiente bibliografía, que incluye además un gran número de referencias. Del lado ruso, la obra de SCHELKIN y TROSHIN y la de SOLOUKHIN, anteriormente citadas, así como K. J. SCHELKIN y YA. K. TROSHIN: *Non Stationary Phenomena in the Gaseous Detonation Front*. «Comb. and Flame», junio 1963, págs. 143-51; A. K. OPPENHEIM: *Novel Insight into the Structure and Development of Detonation*. «Astr. Acta», junio 1965, donde se encontrará una excelente reseña de los trabajos de las escuelas rusas de Moscú y Novosibirsk hasta esa fecha. Finalmente, B. V. VOITSEKHOVSKII, V. V. MITROPANOV y M. E. TOPCHIAN: *Investigation of the Structure of Detonation Waves in Gases*. Twelfth Symp. on Comb. The Comb. Inst., Pittsburg, 1969, págs. 829-37. Del lado norteamericano el trabajo de OPPENHEIM citado, así como los siguientes: G. L. SCHOOT: *Observations of the Structure of Spinning Detonation*. «Phys. of Fluids», mayo 1965, págs. 850-65; A. K. MACPHERSON: *The Three-Dimensional Wave System of Spinning Detonation*. «Twelfth Symp. on Comb.», págs. 839-50, y *On the Structure of Single Headed Spin Detonation*. «Astr. Acta», junio 1969, págs. 549-558, del mismo autor.

(46) Ver, por ejemplo, además de los trabajos citados anteriormente, el de PACH, que se menciona en el epígrafe 18 del capítulo primero, así como el de L. F. HENDERSON: *The refraction of a Plane Shock Wave at a Gas Interface*. «Jour. Fluid. Mech.», 1966, págs. 607-37.

mente el esquema de la figura V-10 y que le permitió construir un modelo tridimensional en plástico, sumamente ilustrativo, una fotografía del cual se encontrará en el trabajo de Oppenheim mencionado en la bibliografía.

Finalmente, en el citado trabajo de Oppenheim se reproduce también el sistema de ondas propuesto por el grupo ruso de Novosibirsk

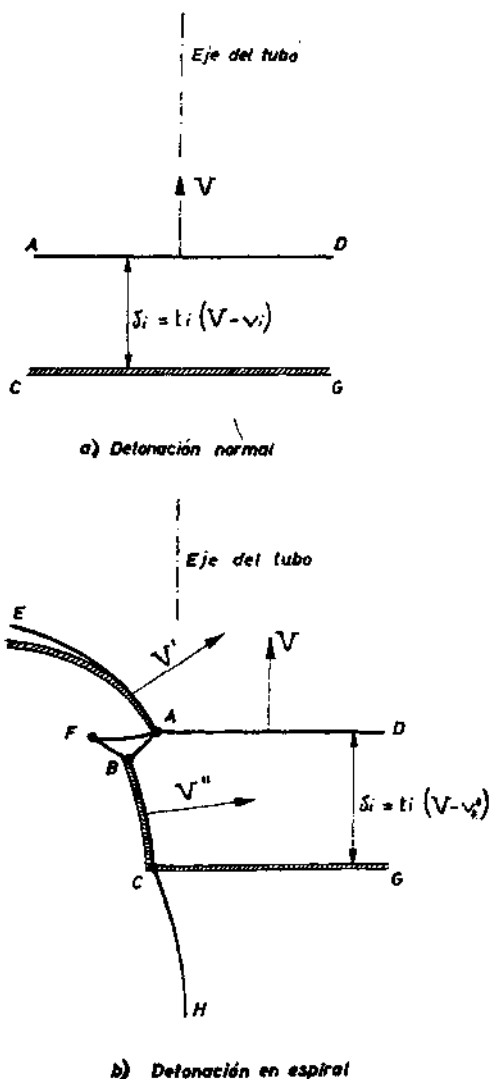


Fig. V-10.—Estructura del sistema de ondas en una detonación en espiral.

como resultado de sus observaciones experimentales, el cual coincide, como se ha dicho, con el norteamericano.

En la figura V-10, las ondas de choque están representadas por líneas de trazo grueso y las de combustión, cuyo acoplamiento con aquéllas da lugar a las ondas de detonación, por las bandas rayadas.

El esquema a) corresponde a una detonación plana, según el modelo NDZ, y el b), a una detonación en espiral.

En este caso, AD es la onda de choque que encabeza el proceso y que se propaga aproximadamente a lo largo del eje del tubo, calentando el gas, el cual se quema seguidamente en la banda de deflagración CG, situada a una distancia δ_i de AD, que está determinada por el tiempo de inducción t_i correspondiente a la composición y estado de la mezcla detrás de la onda de choque AD (47):

$$\delta_i = t_i (V - v'_1). \quad [42]$$

En el caso de la detonación en espiral, a este sistema se superpone una onda de choque AE helicoidal, que avanza a través de los gases frescos a una velocidad V' mucho mayor que la V de la onda normal, por lo que su intensidad es mucho mayor que la de AD.

Ello significa que la compresión y el consiguiente aumento de temperatura de los gases detrás de esta onda es mucho mayor que detrás de la primera, por lo que su tiempo de inducción t'_i es también mucho menor que t_i y la combustión se produce inmediatamente detrás del choque, según el modelo NDZ correspondiente a una detonación fuerte».

Las leyes de la reflexión de ondas de choque enseñan que en A se origina un «punto triple» que da lugar a la onda de choque reflejada AB y a la superficie de discontinuidad tangencial AF. El cálculo de las características del sistema de ondas en el punto triple A, a partir de las de AD y, por ejemplo, del ángulo entre ésta y AE es sumamente laborioso y se efectúa con ayuda de las curvas polares o diagramas hodógrafos de los campos de velocidades a ambos lados de las ondas, mediante un procedimiento de aproximaciones sucesivas que se puede ver, por ejemplo, en los citados trabajos de

(47) Para comparar la expresión [42] con la [27] en que se definió δ_i , hay que tener en cuenta que en la figura V-10, v'_1 es la velocidad del gas detrás del choque, en un sistema de referencia fijo al tubo, mientras que en [27] el sistema estaba ligado a la onda.

Macpherson o en la bibliografía citada anteriormente sobre los fenómenos de interacción de ondas de choque.

El punto B es otro punto triple para el sistema de la onda incidente AB, la reflejada BF y otra onda de choque casi normal, BC, que se genera en él. Esta última se propaga a través de la masa de mezcla que ha sido previamente calentada al atravesar la primera onda AD. La segunda compresión de este gas al atravesar BC es suficiente para que la combustión se produzca aquí también, como ocurría en AE, inmediatamente detrás del choque, dando lugar a que BC sea una segunda onda de detonación «fuerte»: es precisamente a través de esta segunda onda en espiral donde se quema la mayor parte de la mezcla.

Finalmente, C es un tercer punto triple para la onda de detonación BC, la de deflagración CG y la onda de choque CH, cuya intensidad decae rápidamente al alejarse de C. Esta última onda de choque es la que produce el acoplamiento que sostiene el fenómeno, entre el sistema de ondas que acabamos de describir y la vibración transversal de los gases quemados, estudiada por Manson y Fay.

Fay, en el trabajo citado, estudió también las vibraciones transversales de los gases quemados en tubos de sección rectangular. La estructura del sistema de ondas que se forma en este caso ha sido analizada teórica y experimentalmente por Edwards, Parry y Jones (48), alcanzando conclusiones similares, en cuanto a la formación de puntos triples, a las que acabamos de describir para el caso de los tubos de sección circular.

8. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD DE LAS ONDAS DE DETONACIÓN

Las nuevas técnicas experimentales de gran poder de resolución, anteriormente mencionadas, han permitido observar la estructura «fina» de las ondas de detonación y comprobar que el caso de la detonación en espiral no constituye una excepción, sino que es tan sólo un caso límite de una estructura compleja más general. Efectivamente, las observaciones llevadas a cabo durante la última década han puesto de manifiesto que la onda de detonación plana de Chapman-Jouguet, según el modelo NDZ, no se produce nunca en la realidad,

(48) D. H. EDWARDS, J. PARRY y T. JONES: *The Structure of the Wave Front in Spinning Detonation*. «*Jour. Fluid Mech.*», 1966, págs. 321-36.

sino que, por el contrario, el frente de onda presenta siempre una estructura compleja y cambiante, cuyas características dependen de la composición y estado de la mezcla y de la geometría del experimentado (49).

El esclarecimiento del fenómeno plantea aquí también, como en el caso de la detonación en espiral, una doble cuestión:

En primer lugar es necesario identificar la causa de la inestabilidad intrínseca que parece ser propia de las ondas de detonación.

En segundo, hay que determinar cuál es la razón de las configuraciones especiales que parece adoptar con preferencia el sistema complejo que sustituye en cada caso a la onda plana (50).

La primera cuestión plantea un problema de estabilidad hidrodinámica del conjunto formado por la onda de choque y la zona de combustión que le sigue, cuyo tratamiento matemático, que resulta sumamente laborioso, ha sido abordado también por grupos de investigadores rusos y norteamericanos durante los últimos años.

En Rusia, el problema fue inicialmente considerado por Shchel-

(49) Ver, por ejemplo, D. R. WHITE: *Turbulent Structure of Gaseous Detonation*. «Jour. Phys. Fluids», 1961, págs. 465-80. También, del mismo autor, *Discussion on Detonations*. Ninth Symposium on Combustion. Acad. Press., 1963, pág. 415.

(50) Para un estudio de este problema, véase, además de las referencias facilitadas al comienzo de este epígrafe, las siguientes: del lado ruso, R. I. SOLOUKHIN: *Multiheaded Structure of Gaseous Detonation*. «Comb. and Flame», 1966, págs. 51-58, y *Nonstationary Phenomena in Gaseous Detonation*. «Twelfth Symp. on Comb.», págs. 799-808. Del lado norteamericano, A. K. OPPENHEIM, N. MANSON y H. GR. WAGNER: *Recent Progress in Detonation Research*. «AIAA Jour.», octubre 1963, págs. 2243-52; R. A. STREHLOW, R. LIAGMINAS, R. H. WATSON y J. R. EYMAN: *Transverse Wave Structure in Detonations*. «Eleventh Symp. on Comb.». The Comb. Inst. Pittsburg, 1967, págs. 683-92; R. A. STREHLOW: *Fundamentals of Combustion*. International Textbook Co., 1968, págs. 293-339; *Gas Phase Detonations: Recent Developments*. «Comb. and Flame», 1968, páginas 81-101; *The Nature of Transverse Waves in Detonation*. «Astr. Acta», junio 1969, págs. 539-48; *Multi-Dimensional Detonation Wave Structure*. «Astr. Acta», 1970, págs. 345-57; D. H. EDWARDS: *A Survey of Recent Work on the Structure of Detonation Waves*. «Twelfth Symp. on Comb.», págs. 819-28; D. H. EDWARDS y D. J. PARRY: *The Structure of Transverse Waves in Detonations*. «Astr. Acta», junio 1969; J. H. LEE, R. I. SOLOUKHIN y A. K. EPPENHEIM: *Current Views on Gaseous Detonation*. «Astr. Acta», junio 1969, págs. 505 y sigts, y D. H. EDWARDS, G. HOOVER, E. M. JOB y D. J. PARRY: *The Behavior of the Frontal and Transverse Shocks in Gaseous Detonation Waves*. «Astr. Acta», 1970, págs. 323-33.

kin (51), quien, mediante consideraciones de carácter cualitativo sobre el comportamiento de las pequeñas perturbaciones de una onda de detonación de estructura rectangular, propuso un criterio cuantitativo de estabilidad, según el cual aquélla depende del valor del parámetro:

$$\frac{R T_1}{E} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \right], \quad [43]$$

donde E es la energía de activación de la combustión, T_1 es la temperatura de los gases inmediatamente detrás de la onda de choque, antes de iniciarse la combustión y p_1 y p_2 son las presiones detrás del choque y de la combustión, respectivamente.

Según Schelkin, el valor de este parámetro debe ser inferior a la unidad para que la detonación sea estable.

Ahora bien, en la mayoría de los casos de interés dicho parámetro es apreciablemente mayor que 1, por lo que las ondas de detonación correspondientes resultarían inestables según este criterio, de acuerdo con las observaciones experimentales.

Zaidel (52), utilizando el mismo modelo de onda rectangular de Schelkin, ha desarrollado una teoría matemática de estabilidad que parece soportar el criterio de aquél, pero cuya validez ha sido objetada por Erpenbeck (53), porque el modelo de onda rectangular constituye una simplificación excesiva, en vista de la gran sensibilidad de la estabilidad con respecto a los perfiles de distribución de las variables termodinámicas a través de la onda.

Finalmente, Pukhnachev (54) ha desarrollado un tratamiento matemático similar al del grupo norteamericano, en el cual toma en consideración la estructura detallada de la onda, si bien, según Erpenbeck, no trata adecuadamente la condición de contorno en la onda de choque que inicia la detonación.

(51) Ver la obra de SCHELKIN y TROSHIN anteriormente citada, págs. 401 y siguientes.

(52) M. R. ZAIDEL: *About Stability of Detonation Waves in Gaseous Mixtures*. «Doklady Acad. Ci. URSS», 1961, pág. 1148. Trad. inglesa «Acad. Sci. URSS Phys. Chem. Sec.», 1961, 167.

(53) J. J. ERPENBECK: *Structure of the Square-Wave Detonation*, citado en el epígrafe 5.

(54) V. V. PUKHNACHEV: «Doklady Acad. Cienc. URSS», 1963, pág. 792. Trad. ingl. «Soviet Phys. Sci.», 1963, pág. 338.

En Estados Unidos, el problema de la estabilidad ha sido investigado principalmente por Fay (55); por el profesor Strehlow (56), de la Universidad de Illinois, y, especialmente, por Erpenbeck (57), ya citado.

El método de Strehlow consiste en estudiar la propagación, en el seno de la onda, de una perturbación «acústica» mediante la aplicación del procedimiento de Milne (58) para el análisis de las ondas sonoras a través de un gas en movimiento, con velocidad y composición variables de un punto a otro. Dicho análisis demuestra que las ondas de detonación son intrínsecamente inestables.

Pero el estudio más completo y sistemático de la estabilidad de las ondas de detonación es, sin duda, el llevado a cabo de Erpenbeck en la colección de trabajos que se ha mencionado. En ellos, el autor analiza el comportamiento al variar el tiempo de una pequeña perturbación inicial superpuesta a una detonación plana indefinida, del tipo NDZ. Si la perturbación crece con el tiempo, la onda plana es inestable; en caso contrario, es estable.

Aun cuando el problema entra dentro de la teoría general de la estabilidad hidrodinámica (59), presenta características propias que resultan de la existencia de una superficie de discontinuidad: la onda de choque, lo que hace que el sistema diferencial para el estudio de la perturbación no sea homogéneo, contrariamente a lo que ocurre en los problemas clásicos de aquella teoría.

(55) J. A. FAY: *Stability of Detonation Waves at Low Pressurs*. Detonation and Two-Phase Flow. Progress in Astronautics and Rocketry, vol. VI. Ed. por S. S. Pinner y F. A. Williams. Acad. Press., 1962, págs. 8-16.

(56) R. A. STREHLOW y F. D. FERNÁNDEZ: *Transverse Waves in Detonations*. «Comb. and Flame», 1965, págs. 109-19; H. O. BARTHEL y R. A. STREHLOW: *Wave Propagation in One-Dimensional Reactive Flows*. «Jour. Phys. Fluids», 1966, págs. 1896-1907; R. A. STREHLOW: *Fundamentals of Combustion*. «Inter. Text. Book Co.», 1968, págs. 313-328.

(57) J. J. ERPENBECK: *Stability of Steady-State Equilibrium Detonations*. «Jour. Phys. Fluids», 1962, págs. 604-14; *Stability of Idealized One-Reaction Detonations*. Idem id., 1964, págs. 648-96; *Stability of Idealized One-Reaction Detonation: Zero Activation Energy*. Idem id., 1965, págs. 1192-98; *Detonation Stability for Disturbances of Small Transverse Wavelength*. Idem id., 1966, páginas 1293-1306; *Nonlinear Theory of Unstable One-Dimensional Detonation*. Idem id., 1967, págs. 274-89. Finalmente, *Theory of Detonation Stability*. «Twelfth Simp. in Comb. The Comb. Inst.», 1969, págs. 711-21.

(58) E. A. MILNE: «Phil. Mag.», vol. 42 (1921), pág. 96.

(59) Ver, por ejemplo, la obra de Lin que se menciona en el epígrafe 11 del capítulo primero.

Por ello, y para que se pueda apreciar la dificultad adicional que introduce el que los coeficientes del sistema diferencial sean funciones de los perfiles de la velocidad, composición y estado termodinámico de la mezcla en la onda NDZ, a continuación resumimos brevemente la teoría de Erpenbeck y sus principales conclusiones.

Para ello, comencemos por formular matemáticamente el problema, teniendo presente que aunque la onda de detonación cuya estabilidad se analiza sea plana y estacionaria, las perturbaciones no cumplen esta doble condición, naturalmente, por lo que es necesario partir de las ecuaciones generales del movimiento, en tres dimensiones y no estacionarias.

Recordando que los fenómenos de transporte (viscosidad, conductividad y difusión) son despreciables en el caso de las ondas de detonación y suponiendo, para mayor sencillez, que la composición de la mezcla queda determinada por una sola variable química ϵ , el sistema diferencial para el estudio del problema, en notación vectorial, es el siguiente:

$$\frac{D \rho}{D t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad [44]$$

$$\frac{D \mathbf{v}}{D t} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad [45]$$

$$\frac{D S}{D t} + \Phi w = 0 \quad [46]$$

$$\frac{D \epsilon}{D t} - \frac{w}{\rho} = 0. \quad [47]$$

En este sistema todas las variables corresponden a la notación previamente establecida, en tanto que Φ está dada por la expresión

$$\Phi \equiv \frac{\Delta F}{T}, \quad [48]$$

donde ΔF es el incremento de la energía libre de Gibbs producido por la reacción química.

Puesto que [45] es una ecuación vectorial de tres componentes,

resulta así que estamos ante un sistema de seis ecuaciones para la determinación de las seis incógnitas ρ , S , v_x , v_y , v_z , ϵ .

Cualquier otra variable de estado y, en particular, la presión p que aparece explícitamente en [45], se expresa en función de ρ , S , ϵ a través de la ecuación de estado, como se indicó en el epígrafe 21 del capítulo I.

Suponiendo que la onda de detonación plana y estacionaria cuya estabilidad se está investigando es normal al eje x y adoptando un sistema de referencias ligado a ella, con el origen de coordenadas en la onda de choque y con la zona de reacción en la región $x > 0$, la solución NDZ, estudiada anteriormente, proporciona los valores

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(x) \\ v_x &= v(x) \\ v_y &= v_z = 0 \\ S &= S(x) \\ \epsilon &= \epsilon(x)\end{aligned}\quad [49].$$

que son soluciones del sistema [44] a [47], en ausencia de perturbaciones. Recordemos, por otra parte, que en el origen de coordenadas $x = 0$ existe una onda de choque y que, por consiguiente, los valores de [49] para $x = 0^+$ están ligados con los del movimiento uniforme que precede a la onda en la región $x < 0$ por las condiciones de Rankine-Hugoniot correspondientes a la detonación supuesta.

Pues bien, se trata ahora de superponer a esta solución básica, en el instante inicial $t = 0$, una perturbación pequeña de la forma

$$\left. \begin{aligned}\rho &= \rho(x) + \rho'_0(x, y, z, 0) \\ v_x &= v(x) + v'_{x0}(x, y, z, 0) \\ v_y &= v'_{y0}(x, y, z, 0) \\ v_z &= v'_{z0}(x, y, z, 0) \\ S &= S(x) + S'_0(x, y, z, 0) \\ \epsilon &= \epsilon(x) + \epsilon'_0(x, y, z, 0)\end{aligned}\right\} \quad [50]$$

sometida a la doble limitación de que a través de la onda de choque se cumplan las condiciones de Rankine-Hugoniot y de que las fun-

ciones de perturbación anteriores se anulen lejos de la onda, es decir, para $x \rightarrow \pm \infty$. Hecho esto, el estudio de la estabilidad consiste en analizar la evolución de esta perturbación con el tiempo.

Si al variar el tiempo la evolución de la perturbación tiende a anularse, la onda será estable a la perturbación [50], mientras que, en el caso contrario, será inestable. Y es claro que solamente si la detonación es estable para todas las perturbaciones iniciales posibles, resultará ser efectivamente estable.

Para resolver este problema hay que proceder en la forma habitual de la teoría de la estabilidad, linealizando el sistema [44] a [47] mediante la introducción en él de las variables de perturbación:

$$\rho'(x, y, z, t) = \rho(x, y, z, t) - \rho(x), \quad [51]$$

etcétera y reteniendo solamente términos de primer orden en dichas variables. Pero antes de hacerlo hay que advertir que, si bien en el instante inicial la onda de choque es plana, la perturbación introducirá una deformación, también pequeña, de la misma, que supondremos dada por la expresión.

$$x = \psi(y, z, t). \quad [52]$$

Por otra parte, como el salto a través del choque produce una discontinuidad que no es pequeña, la existencia del mismo origina la dificultad de que una pequeña deformación de su superficie puede dar lugar a variaciones grandes de velocidad, densidad, etc., en dos puntos y en dos instantes muy próximos.

La manera de solucionar esta dificultad consiste en adoptar un sistema de referencia que impida permanentemente el paso de la coordenada x de una cara a la otra del choque, lo cual se consigue adoptando como coordenada x precisamente la distancia a la superficie de la onda deformada, dada por la expresión [52].

En esta condición, unida a la discontinuidad del salto, lo que introduce los términos no homogéneos a que se aludía al comienzo, en el sistema de ecuaciones diferenciales linealizadas para el estudio del comportamiento de la perturbación, dando lugar a la peculiaridad del problema de estabilidad propia de este tipo de ondas.

Efectivamente, al linealizar el sistema [44] a [47] por el procedimiento habitual, pero respecto del sistema de referencia mencionado, en que y, z no varían, pero donde x se mide en cada momento desde

la onda deformada ψ y si es $f_n(x, y, z, t)$, $n = 1, 2, \dots, 6$ una cualquiera de las variables de la perturbación ρ' , etc., se obtiene un sistema lineal de seis ecuaciones en derivadas parciales para el cálculo de f_n , de la forma

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_n}{\partial t} + \sum_j X_{nj}' \frac{\partial f_j}{\partial x} + \sum_j Y_{nj}' \frac{\partial f_j}{\partial y} + \sum_j Z_{nj}' \frac{\partial f_j}{\partial z} + \\ + \sum_j A_{nj}' f_j + a_n \frac{\partial \psi}{\partial t} + b_n \frac{\partial \psi}{\partial y} + c_n \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad [53]$$

$$n = 1, 2, \dots, 6,$$

donde X_{nj}' , Y_{nj}' , Z_{nj}' , A_{nj}' son matrices cuadradas cuyos coeficientes dependen de x a través de la solución básica [49] mientras que a_n , b_n , c_n son vectores de seis componentes, cuyos elementos dependen, asimismo, del movimiento no perturbado, es decir, de x .

Debiendo advertirse que, puesto que la perturbación inicial puede aplicarse a uno u otro lado del choque, o a los dos a la vez, el sistema anterior vale tanto delante como detrás del choque $x = 0$, pero con coeficientes X_{nj}' , etc., diferentes a ambos lados.

En particular, en la región $x < 0$ anterior al choque, los términos de las matrices son constantes y los de los vectores son nulos, es decir: delante del choque el sistema lineal es homogéneo y de coeficiente constantes.

Por tanto, la solución de las perturbaciones de dicha región a partir de la perturbación inicial f_n^0 en ella, no ofrece dificultad, pudiendo tratarse por el método clásico de las características, como se hace en acústica. Lo cual significa que las perturbaciones delante de la onda quedan determinadas por lo que ocurra en la región anterior al choque en el instante inicial, pero no por lo que ocurra detrás de él, como corresponde al hecho de que el movimiento delante del choque sea supersónico.

Detrás del choque, en cambio, es decir, en la zona de combustión, las cosas son diferentes, debiendo comenzar por señalar que el sistema de seis ecuaciones [53] incluye, además de las seis incógnitas f_n la función $\psi(x, y, z, t)$ que define la deformación del choque, la cual también es desconocida.

Es decir, se trata de un sistema indeterminado.

Para completarlo hay que tener presente que en cada punto y en

cada momento tienen que cumplirse las condiciones de Rankine-Hugoniot, también para el movimiento perturbado.

Al linealizar las condiciones del salto a través del choque (60) se obtiene un sistema de ecuaciones de compatibilidad entre las regiones $x < 0$ y $x > 0$, de la forma

$$f_n^+ = \sum_j B_n^j f_j^- + d_n \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} + e_n \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + h_n \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad [54]$$

donde $f_n^+ = f_n(0^+, y, z, t)$ y análogamente para f_n^- y en donde B_n^j, d_n, e_n, h_n son coeficientes constantes, cuyos valores numéricos dependen en cada caso de las condiciones del choque en la solución básica.

El análisis de la determinación del problema representado por el sistema [53] y [54] para f_n y ψ , en la región $x \geq 0$, es decir, la investigación de la existencia de una solución, es un problema sumamente complejo (61). No obstante, se puede imaginar la existencia de la solución buscada a partir de la condición inicial:

$$t = 0, \quad \text{para } x \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n = f_n^0(x, y, z, 0) \\ n = 1, 2, \dots, 6 \\ \psi^0(y, z, 0) = 0, \end{array} \right. \quad [55]$$

y que cumpla además las condiciones de contorno ($t \geq 0, x = 0^+$) dadas por [54], mediante el siguiente razonamiento que correspondería a una integración paso a paso.

En el instante inicial $t = 0$, el sistema [54] de las condiciones de contorno determina los valores de las derivadas de ψ , las cuales, llevadas al sistema diferencial [53], junto con f_n^0 , determinan los valores iniciales de las derivadas de t_n y así sucesivamente.

Pasemos ahora a ver la forma de analizar la estabilidad de la onda a partir del sistema anterior y de las condiciones iniciales y en los límites que hemos establecido.

Para ello y siguiendo a Erpenbeck, en primer lugar y puesto que los coeficientes del sistema no dependen de y ni de z , se puede apli-

(60) Conservación de los flujos de masa, cantidad de movimiento y energía, así como continuidad de la composición química, puesto que la reacción empieza detrás de la onda de choque.

(61) Ver Erpenbeck, antes citado, 1962.

car a f_n y ψ la transformación de Fourier, multiplicando los sistemas [53] y [54] por la expresión: $\exp [-i(\alpha x + \beta z)]$ e integrando sobre la sección transversal.

Con ello se logra eliminar las variables y, z y los sistemas anteriores se reducen a los siguientes, con las dos únicas variables x, t :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_n}{\partial t} + \sum_j X_{nj} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \sum_j [i(\alpha Y_{nj} + \beta Z_{nj}) + A_{nj}] F_j + \\ + a_n \cdot \frac{d\psi}{dt} + i(\alpha b_n + \gamma c_n) \psi = 0 \end{aligned} \quad [56]$$

$$\begin{aligned} F_n^+ = \sum_j B_{nj} F_j^- + d n \cdot \frac{d\psi}{dt} + i(\alpha \cdot e_n + \beta \cdot h_n) \psi \\ n = 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \quad [57]$$

donde

$$F_n(\alpha, \beta; x, t) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha y + \beta z)} \cdot f_n(x, y, z, t) dy dz \quad [58]$$

$$\psi(\alpha, \beta, t) \equiv \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\alpha y + \beta z)} \cdot \psi(y, z, t) dy dz \quad [59]$$

son las transformadas de Fourier de f_n y ψ respectivamente

En segundo lugar, con objeto de reducir [56] a un sistema de ecuaciones ordinarias, suponiendo que F_n y ψ no crecen con t más rápidamente que una función exponencial (62), se aplica a estas fun-

(62) Ver el trabajo de Erpenbeck para un análisis más detallado de esta hipótesis.

ciones la transformación compleja de Laplace con respecto al tiempo t :

$$L_n(\tau; x) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\tau t} \cdot F_n(x, t) dt$$

$$n = 1, 2, \dots, 6$$

$$l(\tau) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\tau t} \psi(t) dt, \quad [60]$$

siendo τ el parámetro complejo de la transformación.

Con ello el sistema [56] y [57] se reduce al siguiente:

$$\frac{d L_n}{d x} = \sum_j P_j(\tau; x) L_j + Q_n(\tau; x)$$

$$L_n^+ = \sum_j B_n^j L_j^- + [\tau \cdot a_n + i(\alpha b_n + \beta \cdot c_n)] l(\tau) \quad [62]$$

$$n = 1, 2, \dots, 6,$$

donde $Q_n(x; x)$ son funciones lineales de $l(\tau)$, cuyos coeficientes dependen de α, β, τ, x .

Así pues, mediante la doble transformación de Fourier y Laplace, el problema se ha reducido a la integración del sistema lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias dado por [61], con las condiciones de contorno para $x = 0$, dadas también en [62].

Así las cosas, la estabilidad del sistema puede investigarse ahora a través del comportamiento de la transformada $l(\tau)$ de la superficie $\psi(y, z, t)$ del choque perturbado.

Erpenbeck (63) muestra que $l(\tau)$ puede expresarse en la forma:

$$l(\tau, \eta) = \frac{W(\tau, \eta)}{V(\tau, \eta)}, \quad [63]$$

(63) Twelfth Symposium on Combustion, antes citado.

siendo $\eta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ el parámetro característico de la vibración transversal supuesta y $W(\tau, \eta)$, $V(\tau, \eta)$ dos funciones que se obtienen mediante la integración del sistema anterior.

La estabilidad estará determinada, entonces, por las singularidades de la función $l(\tau, \eta)$, puesto que tales singularidades dan lugar a perturbaciones que crecen exponencialmente con el tiempo en la transformada inversa de ella. Es decir, a deformaciones de la onda de choque perturbada $\psi(y, z, t)$ que crecen exponencialmente con t y son, por tanto, inestables.

Erpenbeck muestra también que $W(\tau, \eta)$ carece de singularidad en el semiplano complejo $R(z) > 0$ (64), por lo que las singularidades de $l(\tau, \eta)$ en dicho semiplano resultarán de los ceros de $V(\tau, \eta)$ a cuya determinación se reduce, por tanto, el análisis de la estabilidad de la detonación.

La existencia y el número de ceros de $V(\tau, \eta)$ en el citado semiplano pueden determinarse mediante el análisis de la variación δArg del argumento de $V(\tau, \eta)$ al recorrer un contorno cerrado en forma de semicircunferencia con el lado recto situado sobre el eje imaginario y cuyo radio sea lo suficientemente grande para que en su exterior no quede ningún cero de $V(\tau, \eta)$.

Puede demostrarse, efectivamente, que $V(\tau, \eta)$ carece de polos en el semiplano $R(\tau) > 0$, por lo que el número N de ceros está dado por la expresión:

$$N = \frac{\delta \text{Arg } V}{2\pi}$$

En definitiva, resulta que si es $N = 0$, la detonación es estable para la perturbación dada; en caso contrario, es inestable.

Por tanto, el problema se reduce al cálculo de $V(\tau, \eta)$ sobre el eje imaginario, el cual hay que efectuar numéricamente en cada caso, mediante un proceso sumamente laborioso, que requiere el empleo de ordenador.

Erpenbeck ha efectuado el cálculo para un cierto número de casos representativos, cuyo detalle se encontrará en la bibliografía citada, obteniendo resultados como el que muestra la figura V-11, tomada del trabajo del XII Symposium de Combustion antes citado.

(64) $R(\tau)$ significa parte real de τ .

Dicha figura muestra las regiones de estabilidad e inestabilidad para detonaciones fuertes, cuya intensidad se mide por la relación $f = \sqrt{\frac{V}{V_{ej}}}$ entre su velocidad de propagación V y la de la detonación de Chapman-Jouguet V_{ej} , en función del número de onda η de la perturbación, para dos valores de la energía adimensional de activación Q_a definida por la expresión $Q_a = \frac{E}{R T_0}$, y para un valor típico del calor adimensional de reacción $Q_r \equiv \frac{q}{R T_0} = 50$.

En ella puede verse que siempre existe una región de inestabilidad, si bien ésta tiende a estrecharse al reducirse la energía de activación.

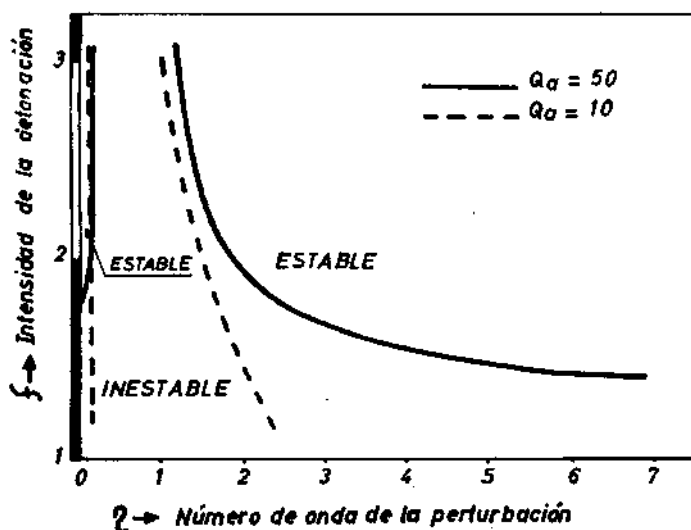


Fig. V-11.—Estabilidad de las ondas de detonación.

La figura V-12, tomada del mismo trabajo, muestra la influencia estabilizadora de una reducción en la energía de activación y en el calor de reacción, si bien puede verse que éste tiene que ser en general muy pequeño para que exista estabilidad.

Erpenbeck ha extendido su análisis al caso de perturbaciones transversales de longitud de onda muy pequeña con respecto al espesor de la detonación, mediante un laborioso desarrollo asintótico de las soluciones para $\eta \rightarrow \infty$ poniendo de manifiesto que para las perturbaciones de alta frecuencia hay regímenes de estabilidad dis-

tintos que dependen del perfil de la función $[v(x)^2 - a_s(x)^2]$ a través de la onda donde $v(x)$ ha sido previamente definido y $a_s(x)$ es la velocidad de propagación del sonido en la mezcla con reacción química «congelada» en cada punto x .

En una onda de detonación dicho perfil puede presentar una de las tres formas distintas siguientes: 1.ª, el perfil crece monótonamente a partir del choque; 2.ª, pasa por un máximo; 3.ª, decrece monótonamente.

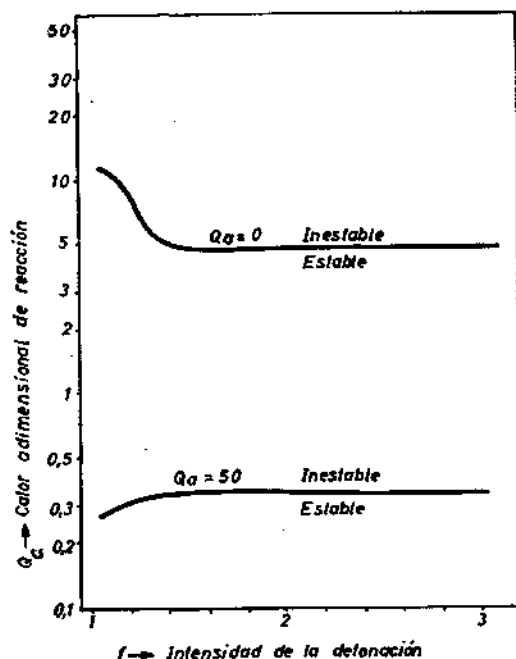


Fig. V-12.—Influencia del calor de reacción y de la energía de activación en la estabilidad de las ondas de detonación.

El estudio de Erpenbeck muestra que solamente en el tercer caso la detonación es estable para oscilaciones de alta frecuencia, resultando inestable en los otros dos (65).

Pasando ahora a considerar otro aspecto del problema, hay que señalar que, si bien la teoría de Erpenbeck permite determinar el ca-

(65) Esta combustión es análoga a la obtenida por Strehlow y sus colaboradores con el método acústico antes citado.

rácter estable o no de una detonación dada para cada tipo de perturbación, al tratarse de una teoría lineal no sirve para determinar la evolución con el tiempo de una perturbación dada en un caso de inestabilidad, cuestión ésta de gran importancia para el estudio de la estructura compleja que deba sustituir en tal caso a la onda plana inestable.

Por otra parte, como acabamos de ver, el sistema diferencial que gobierna el proceso es demasiado complejo para que pueda pensarse, por el momento, en aplicar a él los métodos de la teoría no lineal de la Estabilidad que se están desarrollando en los últimos años (66).

Existe, sin embargo, un caso considerablemente más sencillo y susceptible por ello de ser tratado numéricamente mediante el empleo de un ordenador, el cual ha sido investigado por Fickett y Wood (67), también en el Laboratorio de Los Alamos, de la Universidad de California.

Se trata de una perturbación longitudinal, la cual corresponde al caso límite de una perturbación transversal de longitud de onda infinita ($\eta \rightarrow 0$) para la que la teoría de Erpenbeck permite determinar los parámetros del umbral de estabilidad.

La ventaja del caso radica, evidentemente, en que las variables independientes se reduce a dos: x, t , lo que permite la integración numérica del sistema inicial [44] a [47] por el método de las características.

Para ello, Fickett y Wood consideran el caso de un cilindro lleno de gas explosivo en reposo y cerrado en un extremo por un émbolo que en el instante inicial $t = 0$ se pone en movimiento, según una ley de velocidades elegida de acuerdo con el caso que se desea estudiar y para que genere una detonación fuerte, de intensidad

$$f = \sqrt{\frac{V}{V_{ej}}} \text{ prefijada.}$$

La solución numérica pone de manifiesto que si el caso analizado corresponde a una detonación que sea estable, según la teoría de Erpenbeck, las oscilaciones de presión que inicialmente se generan tienden a amortiguarse, de tal modo que la detonación transitoria converge hacia la solución estacionaria y estable.

(66) Ver, por ejemplo, W. ECKHAUS: *Studies in Non-Linear Stability Theory*. Springer, Berlin, 1965.

(67) W. FICKETT y W. W. WOOD: *Flow Calculations for Pulsating One-Dimensional Detonations*. «Phys. of Fluids», 1966, págs. 903-16.

Pero si se trata, por el contrario, de un caso inestable, la solución converge hacia un régimen pulsatorio, con un pico de presión en la onda de choque que, en los casos típicos estudiados, es del orden de un 50 por 100 mayor que el correspondiente a la solución inestable estacionaria.

Por su parte, Erpenbeck (68) ha desarrollado un laborioso método para el cálculo del comportamiento de perturbaciones longitudinales no lineales, en el cual los términos no lineales del sistema diferencial se tratan como perturbaciones de las ecuaciones lineales de estabilidad, obteniendo soluciones de detonaciones pulsatorias que concuerdan satisfactoriamente con los resultados de los cálculos numéricos de Fickett y Wood.

El segundo problema relativo a la inestabilidad de las detonaciones, como se indicó al comienzo de este epígrafe, es el de analizar la estructura que preferentemente adoptan los sistemas de ondas que propagan la combustión, del cual hemos visto un ejemplo en el caso de la detonación en espiral, así como el de determinar las causas de que sea esa precisamente y no otra la configuración propia del sistema.

A esclarecerlo se orientan una gran parte de las investigaciones teóricas y experimentales de los últimos años o en curso en estos momentos, sobre las que se encontrará abundante información en la bibliografía citada al comienzo de este epígrafe (69).

Tales estudios han permitido poner de manifiesto que el elemento básico de la estructura es el punto triple de la reflexión de Mach que ya encontramos en la detonación en espiral y que en muchos casos el conjunto de puntos triples describe trayectorias regulares que tienden a formar un sistema reticulado como el de la figura V-13, tomada del trabajo de Lee, Soloukhin y Oppenheim, que se cita al comienzo de este epígrafe.

La figura muestra la intersección del sistema de choques y ondas de combustión con la pared lateral de un conducto de sección rectangular en el que se propaga la detonación.

En ella, como en el caso de la figura V-10, las ondas de choque se representan de trazo grueso y las zonas de combustión son las áreas rayadas detrás de cada onda, mientras que las líneas de trazos, que forman una red romboidal marcan las trayectorias de los puntos

(68) Referencia citada, 1967.

(69) Ver también R. A. STREHLOW y A. J. CROOKER: *The Structure of Marginal Detonation Waves*. «Astr. Acta», 1974, págs. 303-15.

triples A, B, C, etc., las cuales son fotografiables mediante una ingeniosa técnica que se describe, por ejemplo, en el trabajo de Strehlow, de 1968, en el que se pueden ver excelentes fotografías del retículo, al igual que en el de Lee y colaboradores, de donde se ha tomado la figura V-13.

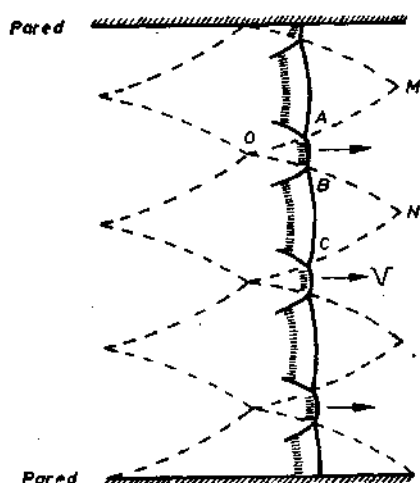


Fig .V-13.—Sistemas de ondas de detonación y trayectorias de los puntos triples.

La colisión entre dos puntos críticos se produce en los vértices del retículo que actúan como puntos de activación de la combustión, puesto que la onda de choque resultante de la interacción entre dos puntos triples es de intensidad mucho mayor que las de las ondas incidentes, lo que significa que detrás de aquella los gases están mucho más calientes que antes de la colisión. Tal es, por ejemplo, el caso del tramo AB en la figura V-13 y por ello la combustión se produce en él inmediatamente detrás del choque, mientras que en el tramo BC tiene lugar a una mayor distancia, es decir, con un tiempo de inducción t_i mucho mayor que en AB.

A medida que el tramo AB avanza a través del retículo MON, su intensidad se debilita y el tiempo de inducción de la reacción aumenta, comportándose a partir de MN como un tramo BC, mientras que éste, al atravesar el vértice N se convierte en una detonación fuerte, como ocurrió en el vértice O con AB, merced a la colisión en N de los puntos triples B y C.

Así, pues, las investigaciones citadas han permitido comprobar que ni la detonación es plana ni las diversas ondas que forman el frente se propagan a velocidad constante, pero el conjunto se comporta, en promedio muy aproximadamente como una onda de Chapman-Jouguet.

En el trabajo de Strehlow, de 1970, antes citado, puede verse un análisis de la configuración tridimensional de estos retículos.

Un aspecto importante del problema es el de descubrir la ley que determina la geometría del sistema.

A este respecto se ha observado que cuando la densidad energética de la mezcla es grande, el tamaño del retículo parece estar exclusivamente determinado por las características fisicoquímicas de aquélla.

Al reducir aquella densidad, por ejemplo, diluyendo la mezcla con un gas inerte o disminuyendo su presión o bien alejando su composición de la estequiométrica, el tamaño del retículo tiende a aumentar, aparte de que, según los casos, puede variar su regularidad, hasta acoplarse con la geometría del conducto, como hemos visto que ocurre en el caso de la detonación en espiral.

Los estudios más recientes se orientan al cálculo de la geometría del retículo en función de las propiedades fisicoquímicas de la mezcla y de las características de la inestabilidad hidrodinámica de la onda que hemos estudiado anteriormente.

Ejemplos de tales intentos de cálculo, aún insatisfactorios, pueden encontrarse en el trabajo de Strehlow que acabamos de citar o en el de Edwards y colaboradores, de 1970, que también se menciona en la bibliografía del comienzo del presente epígrafe.

CAPÍTULO VI

LLAMAS PREMEZCLADAS

1. INTRODUCCIÓN

El problema fundamental de la teoría de las llamas premezcladas es el de justificar la existencia comprobada experimentalmente de una velocidad de propagación bien determinada para cada mezcla que se encuentre bajo condiciones termodinámicas dadas, y el calcular su valor en función de los que tomen los parámetros químicos y termodinámicos de la misma (1).

Como se ha visto en los capítulos II y III, la solución de este problema depende de la estructura interna de la onda de combustión, a cuyo estudio teórico y experimental se ha consagrado por ello una gran atención, sobre todo durante los últimos treinta años.

Por otra parte, teniendo presente que, a la presión normal, el espesor de una llama es de una fracción de milímetro y que al atravesarlo se producen variaciones muy grandes de la densidad, temperatura y concentraciones de las diversas especies químicas, se comprende la dificultad que encierra el estudio experimental de su estructura interna, el cual resulta indispensable para contrastar los resultados teóricos.

Una idea de las técnicas que se emplean para efectuar la explora-

(1) Como bibliografía de carácter general para este capítulo, pueden consultarse las obras de SCHELKIN-TROSHIN, WILLIAMS y STREHLAW, ya citadas, así como las de JOST, FRISTROM-WESTENBERG y GAYDON-WOLFARD que se mencionan más adelante. Finalmente, ver también B. LEWIS y G. VON ELBE: *Combustion, Flames and Explosions*. Acad. Press, Nueva York; *Combustion Processes*. Vol. II de la Enciclopedia de Princeton; D. B. SPALDING: *Some Fundamentals of Combustion*. Butterworths Sol. Publ. Londres, 1955, y A. VAN TIGGELEN et al.: *Oxidations et Combustions*. Ed. Technip., París, 1969.

ción experimental de la estructura de las llamas y de los resultados que se obtienen, junto con abundante bibliografía sobre el tema, se encontrará en una excelente obra de Fristrom y Westenberg sobre la Estructura de las Llamas (2).

En particular y por lo que respecta a la determinación experimental de la velocidad de propagación de la llama, el trabajo de revisión más reciente, incluyendo una bibliografía muy completa, ha sido llevado a cabo en la Universidad de Leeds (3), donde también se están efectuando algunos de los estudios teóricos más completos sobre la estructura de llamas correspondientes a modelos reales, como se verá más adelante.

Hecha esta aclaración y pasando a la formulación teórica del problema, hay que recordar, en primer lugar, que en el capítulo II se ha visto que las deflagraciones débiles, únicas que pueden existir, se caracterizan porque su velocidad es muy pequeña, lo que permite prescindir de sus efectos dinámicos. En particular, la presión puede suponerse constante a través de la llama.

Asimismo se comprobó que, en estas ondas, son también despreciables los efectos de la viscosidad, de tal modo que el mecanismo de propagación de la combustión está alimentado en ellas por los efectos de la conductividad térmica, que transmite el calor desde la zona de reacción hasta los gases fríos, provocando su encendido y por la difusión de las especies activas para las reacciones químicas.

Con las consideraciones anteriores y teniendo presentes las condiciones en los límites que se definieron en el capítulo III, el sistema general de ecuaciones para el modelo sencillo de dos únicas especies químicas que allí se consideró, se reduce en el caso de las llamas, como vimos, al siguiente (4):

$$p = \text{const.}; \quad [1]$$

$$\rho v = m = \rho_0 V; \quad [2]$$

(2) R. M. FRISTROM y A. A. WESTENBERG: *Flame Structure*. Mc Graw-Hill Book Co., Nueva York, 1965.

(3) G. E. ANDREWS y D. BRADLEY: *Determination of Burning Velocities: A Critical Review*. «Combustion and Flame», 1972, págs. 133-153.

(4) En general, en el presente capítulo se utilizará el subíndice cero para designar el estado inicial de los gases frescos, y el subíndice f para el de los gases quemados.

$$\lambda \frac{dT}{dx} = m C_p (T - T_0) - m q \epsilon; \quad [3]$$

$$m \frac{d\epsilon}{dx} = w = \rho K (1 - Y) e^{-\frac{u}{RT}}; \quad [4]$$

$$\rho D \frac{dY}{dx} = m (Y - \epsilon), \quad [5]$$

al que habrán de agregarse, la correspondiente ecuación de estado de la mezcla:

$$f(p, \rho, T, Y) = 0 \quad [6]$$

y las condiciones en límites que allí se expusieron.

2. RESEÑA HISTÓRICA

Antes de entrar en el análisis de las características de este sistema y en el estudio de los métodos desarrollados para obtener sus soluciones, vamos a exponer una breve reseña histórica de las diversas teorías que se han propuesto sobre la propagación de la llama, hasta llegar al sistema anterior (5).

Debiendo advertir previamente que la presentación que sigue encuadra las teorías expuestas en el marco de la formulación correcta del problema representada por el sistema [1] a [6], por lo que constituye más bien una interpretación de aquéllas a la luz de esta formulación, lo que permite apreciar mejor su verdadero significado y eliminar algunos errores de su tratamiento original.

(5) Para un estudio más completo de tales teorías se recomienda consultar la excelente obra de W. JOST: *Explosions-und Verbrennungsvorgänge in Gasen*. Springer, Berlín, 1939, págs. 104 y sigts. (traducción inglesa Mc Graw-Hill Book Co. Inc., 1946, Serie de «Publications in Aeronautical Sciences», título: *Explosions and Combustion Processes in Gases*), así como el trabajo de revisión de M. W. EVANS: *Current Theoretical Concepts of Steady-State-Flame Propagation*. «Chem. Rev.», diciembre 1952, págs. 363-429, donde se encontrará, además, una bibliografía muy completa sobre los trabajos originales. Ver también A. G. GAYDON y H. G. WOLFHARD: *Flames; their Structure, Radiation and Temperature*. Chapman and Hall Ltd., Londres, 1960, págs. 89 y sigts.

El primer intento de desarrollar una teoría sobre el mecanismo de propagación de una llama, el cual estaba basado en la hipótesis de que el factor determinante es el transporte de calor de la zona caliente a la fría, pero no la velocidad de reacción química, se debe a Mallard y Le Chatelier en su famoso trabajo teórico y experimental sobre la «Combustión de Mezclas Gaseosas Explosivas» (6), publicado hace cerca de noventa años.

a) Teorías térmicas

El modelo de onda de combustión propuesto por Mallard y Le Chatelier, como muchos de los que le siguieron más tarde con la denominación genérica de «Teorías Térmicas de la Llama», ignoraba los efectos de la difusión (7) y suponía la existencia de una temperatura de encendido T_i que tenía que alcanzar la mezcla combustible para que se produjera la reacción química.

En este modelo, el punto en que se alcanza la temperatura de encendido divide a la onda de combustión en dos regiones, como muestra la figura VI-1 que esquematiza el perfil de temperaturas de

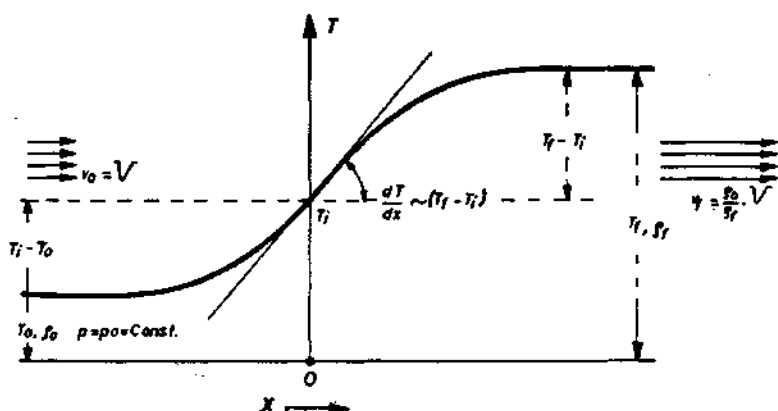


Fig. VI-1.—Modelo de llama de Mallard y Le Chatelier.

(6) E. MALLARD y H. L. LE CHATELIER: *Combustion des Mélanges Gazeux Explosifs*, «Ann. Mines», 1883, págs. 343 y sigts.

(7) Con lo que en el sistema anterior desaparece la ecuación [5] y en la [4] la concentración Y se identifica con el flujo α .

la onda en un sistema de referencia ligado a ella, con el origen $x = 0$ en el punto de encendido $T = T_i$.

A la izquierda de dicho punto, los gases se calientan por conducción térmica desde la temperatura inicial T_0 hasta la de encendido T_i . A la derecha se produce la reacción que libera el calor de combustión, el cual calienta los gases hasta la temperatura final T_f .

Al aplicar la ecuación [3] en el punto $x = 0$, $T = T_i$, donde es $\epsilon = 0$, puesto que la combustión no ha empezado todavía, se obtiene la siguiente expresión para la velocidad V de propagación de la llama:

$$V = \frac{\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}}{\rho_0 C_p (T_i - T_0)} \quad [7]$$

El problema consiste ahora en conocer el valor del gradiente de temperatura $\left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0}$ en el punto de encendido, lo que, a su vez, requiere el conocimiento del perfil de la figura VI-1, es decir, la solución de la onda.

A falta de mejores datos, Mallard y Le Chatelier supusieron que dicho gradiente es proporcional al salto de temperaturas $(T_f - T_i)$ de la zona de combustión, con lo que se obtiene, finalmente, para la velocidad de la llama, una expresión de la forma:

$$V \sim \frac{\lambda}{\rho_0 C_p} \frac{T_f - T_i}{T_i - T_0} \quad [8]$$

En cuanto a la temperatura T_f de los gases quemados, al aplicar la ecuación [3] al punto $x = \infty$, $T = T_f$, donde ha terminado la combustión y, por tanto, es $\epsilon = 1$, resulta estar determinada por la ecuación (8):

$$T_f - T_0 = \frac{q}{C_p} \quad [9]$$

(8) La temperatura T_f de la combustión adiabática se calcula por los procedimientos que se expusieron en el capítulo II. Ver, además, I. H. HARRER y D. A. ALLEN: *The Calculation of the Temperature and Composition of Flame*

La expresión [8] muestra que la velocidad de propagación de la llama, según este modelo, debe ser proporcional a la relación entre los saltos de temperatura de las zonas de combustión y de calentamiento, respectivamente.

Pero esta conclusión resultó ser errónea, como puso de manifiesto Jouguet (9) al introducir en el cálculo de la llama la influencia de la velocidad de reacción de la combustión.

Jouguet, con objeto de hacer que la ecuación [4] resulte integrable, supuso en su modelo que la velocidad de la reacción de combustión dependía solamente de la concentración de la mezcla:

$$w = K (1 - \epsilon), \quad [10]$$

con lo cual obtuvo la siguiente distribución para los productos de la combustión:

$$1 - \epsilon = e^{-\frac{K}{m} x} \quad [11]$$

Esta distribución, al ser llevada a [3], permite obtener, a su vez, la siguiente distribución de temperaturas en la zona de combustión $x \geq 0$:

$$\frac{T_f - T}{T_f - T_0} \left(1 + \frac{\lambda K}{m^2 C_p} \right)^{-1} e^{-\frac{K}{m} x}. \quad [12]$$

Finalmente, al introducir en esta expresión la condición de que en el punto de encendido $x = 0$ la temperatura sea la de encendido T_i , se obtiene la siguiente expresión para la velocidad de propagación de la llama:

$$V = \sqrt{\frac{\lambda K}{\rho_0^2 C_p}} \cdot \sqrt{\frac{T_f - T_i}{T_i - T_0}}. \quad [13]$$

Gases. «Jour. Inst. Fuels», 1909, págs. 183-87, y M. Y. SMITH: *Note: Data for Calculating Adiabatic Flame Temperatures.* «Jour. Inst. Fuels», 1909, págs. 248-50.

(9) E. JOUGUET: *Sur la propagation des déflagrations et sur les limites d'inflammabilité.* «Comptes Rendus. Acad. des Sciences», París, 1913, pág. 1052. También, del mismo autor, *Mécanique des Explosifs.* Octave Doin, París, 1917, páginas 377 y sigts.

Soluciones similares fueron obtenidas por Nusselt y otros, como puede verse en los trabajos de Jost y de Evans antes citados, todas las cuales confirmaron el carácter cuadrático de la solución [13] de Jouguet, el cual resulta ser correcto, como veremos más adelante.

Pero todas estas soluciones adolecen de un defecto básico al suponer la existencia de una temperatura de encendido T_i bien definida y que controla la velocidad de propagación de la llama en la forma que muestra la expresión [13], conclusión que resulta ser contraria a los resultados de la evidencia experimental.

La eliminación de esta dificultad sólo puede lograrse mediante el empleo de expresiones más correctas para la velocidad de reacción w , las cuales tomen debidamente en cuenta la gran sensibilidad de aquélla a las variaciones de temperatura que produce el término de Arrhenius $e^{-\frac{E}{RT}}$ en las reacciones con energías de activación E muy elevadas, como las que corresponden generalmente a los procesos de combustión.

La cuestión ha sido tratada por von Karman y el autor (10) mediante un método aproximado de integración del sistema [3], [4], similar a los que se describen más adelante, el cual proporciona para V una expresión de la forma:

$$V = \sqrt{\frac{\lambda K \theta_0 e^{-\theta_0}}{\rho_0 C_p}} \cdot f(\theta_i, \theta_a), \quad [14]$$

donde $\theta_0 = \frac{T_0}{T_f}$ y $\theta_i = \frac{T_i}{T_f}$ son, respectivamente, la temperatura adimensional de los gases frescos y la de encendido y donde $\theta_a = \frac{E}{RT_f}$ es una temperatura adimensional de activación de la reacción.

En dicho trabajo se demuestra que para energías de activación grandes, es decir, para valores de $\theta_a \gg 1$, $f(\theta_i, \theta_a)$ es insensible al valor elegido de θ_i , excepto en un reducido entorno de la temperatura de los gases frescos, donde $f \rightarrow \infty$ y en la proximidad de los gases quemados $\theta_i \sim 1$, donde $f \rightarrow 0$.

(10) TH. VON KARMAN y G. MILLÁN: *The Thermal Theory of Constant Pressure Deflagration*. Biezeno's Anniversary Volume. N. V. De Technische Uitgeverij, Holanda, 1953. También, VON KARMAN, *CALL, WORKS*, vol. IV, págs. 473-80.

En particular, la figura VI-2 muestra la variación de f con θ_i para un caso típico, cuyo tramo central horizontal confirma lo que acabamos de explicar.

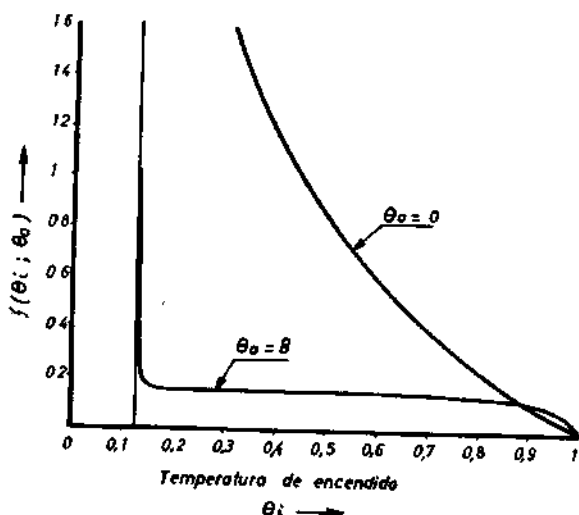


Fig. VI-2.—Insensibilidad de la velocidad de propagación de la llama con respecto a la temperatura de encendido para energías d eactivación elevadas.

En la figura se ha incluido también la variación de f con θ_i para una energía de activación nula, con objeto de poner de manifiesto la forma en que la velocidad de la llama depende entonces de la temperatura de encendido.

Hirschfelder (11) utiliza un artificio distinto, consistente en suponer que en el lado frío de la llama hay un estabilizador que absorbe una pequeña cantidad de calor q , e impide la difusión de los productos de la combustión, con lo que la velocidad de la llama muestra un comportamiento similar al de la figura VI-2 al variar q , y resulta también independiente del calor cedido al estabilizador entre límites muy amplios.

Zeldovich (12), entre otros, ha objetado la justificación de este «filtro» para eliminar la temperatura de encendido.

(11) Ver HIRSCHFELDER et al., año 1949, citado más adelante, así como la obra de HIRSCHFELDER, CURTIS y BIRD: *Molecular Theory of Gases and Liquids*. John Wiley and Sons, Nueva York, 1954, págs. 762 y sigts.

(12) Y. B. ZELDOVICH y G. I. BARENBLATT: *Theory of Flame Propagation*. «Combustion and Flames», marzo 1959, págs. 61-74. Para una crítica del problema

Finalmente, D. Layzer, en el trabajo que se cita más adelante, supone que la velocidad de reacción tiende a cero cuando la temperatura se aproxima a la de los gases frescos, proporcionalmente a una potencia de la diferencia de temperatura.

b) Teorías de difusión

Otros autores (13), basados en la importancia del papel que desempeñan algunos átomos y radicales libres, tales como los de hidrógeno y oxígeno o los radicales oxhídricos, en la programación de los procesos de combustión, han desarrollado diversas teorías llamadas «de difusión».

En ellas, el acento se pone en la distribución de la concentración de centros activos en el seno de la llama, cuya velocidad de propagación se supone determinada básicamente por la difusión de los mismos a través de la mezcla.

De todas las Teorías de Difusión, la más extendida ha sido, sin duda, la de Tanford y Pease, cuyos fundamentos vamos a resumir brevemente a continuación.

Si es Y_i la concentración de uno de los centros activos, por ejemplo, uno de los átomos de hidrógeno, su distribución en el interior de la llama está determinada, aproximadamente (14), por la aplicación de la ecuación [5] a dicha especie:

$$\rho D_i \frac{d Y_i}{d x} - m Y_i - m \epsilon_i = 0, \quad [15]$$

del límite frío, ver también D. A. FRANK-KAMENETSKII: *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. «Plenum», 1969, págs. 338 y sigts., así como A. L. BERLAD y C. H. YANG: *On the Existence of Steady State Flames*. «Comb. and Flames», 1959, págs. 447-52.

(13) CH. TANFORD y R. N. PEASE: *Theory of Burning Velocity*. II. *The Square Root Law for Burning Velocity*. «Jour. Chem. Phys.», 1947, págs. 861-65; N. MANSON: *Mecanisme de la Propagation des Déflagrations dans des Melanges Gazeux et Role de la Projection des Centres Actifs*. «Revue de l'Institut Française du Pétrole et Annales des Combustibles Liquids», 1949, págs. 338-54; A. VAN TIGGELEN: «Mem. Acad. Roy. Belg.» (Sciences), 1952; A. G. GAYDON y H. G. WOLFHART, antes citado.

(14) Decimos aproximadamente porque en un caso de mezcla con más de dos especies químicas, como sería el presente, las ecuaciones correctas de difusión

la cual muestra que aquella distribución es el resultado de un proceso mixto de difusión pura, representado por los dos primeros términos de [15] y de la reacción química, representada por el tercero.

Pero Tanford (15) había comprobado que la citada distribución coincide muy aproximadamente con la que resulta de un proceso de difusión pura hacia la zona de reacción, de los radicales situados en la zona de gases quemados, cuya concentración Y_{if} se puede calcular por las condiciones de equilibrio termoquímico, sin necesidad de conocer para ello la solución de las ecuaciones de la llama.

Esta hipótesis proporciona el modelo de distribución de radicales que muestra la figura VI-3, el cual se obtiene mediante integración de la ecuación [15] al suponer $s_i = 0$, con lo que resulta:

$$Y_i = Y_{if} e^{\frac{m}{\rho D_i} x}$$

suponiendo que es $\rho D_i = \text{const.}$ (16).

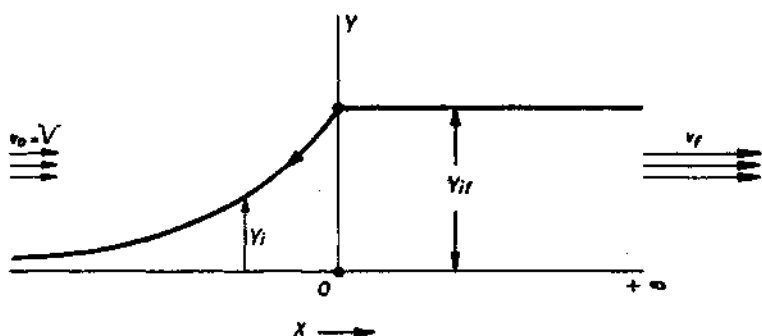


Fig. V-13.—Modelo de onda de combustión para la teoría de difusión de Tanford y Pease.

Por otra parte, al aplicar la ecuación de reacción [4] al produc-

son más complicadas que la expresión [15] siguiente, la cual resulta ser entonces tan sólo una aproximación válida bajo condiciones que aquí pueden considerarse cumplidas, puesto que estamos interesados solamente en el comportamiento cualitativo de la solución. Para las ecuaciones correctas y las condiciones de validez de la aproximación [15] ver, por ejemplo, G. MILLÁN e I. DA RIVA, 1962, citado más adelante.

(15) CH. TANFORD: *Theory of Burning Velocity. I. Temperature and Free Radical Concentrations near the Flame Front. Relative Importance of Heat Conduction and Diffusion*. «*Jour. Chem. Phys.*», julio 1947, págs. 432-39.

to ϵ de la combustión e integrarla entre el punto $x = -\infty$, $\epsilon = 0$ en que se sitúa el extremo frío y el $x = 0$, $\epsilon = 1$ en que se supone completa la combustión, se obtiene:

$$m = \int_{-\infty}^0 w \, dx. \quad [17]$$

Por consiguiente, si se conociese la distribución a través de la onda de la velocidad w de generación de productos, la ecuación [17] proporcionaría la velocidad $V = \frac{m}{\rho_0}$ de propagación de la llama.

Tal conocimiento implica una hipótesis sobre el mecanismo cinético de la combustión, que resuelven Tanford y Pease suponiendo que la generación de productos resulta de reacciones binarias entre el combustible, cuya concentración es $1 - Y$, y cada radical Y_i .

Las velocidades de reacción w_i de dichas reacciones están dadas entonces por expresiones de la forma:

$$w_i = k_i (T) Y_i (1 - Y), \quad [18]$$

(16) Una doble observación que hay que hacer a este respecto es la siguiente:

En primer lugar, puede incluirse en [16] la influencia del término ϵ_i de [15], como hacen Tanford y Pease, si se supone una ley integrable para la velocidad de reacción de los radicales

$$m \frac{d \epsilon_i}{d x} \sim Y_i, \quad [16]$$

con lo que subsiste una solución de la forma [16], sin más modificación que la del parámetro que multiplica a x en el exponente, como se comprueba fácilmente.

En segundo lugar, puesto que la presión es constante y se supone un peso molecular medio constante a través de la llama, la densidad ρ es proporcional a T^{-1} . Pero la teoría cinética enseña que D_i varía proporcionalmente a $T^{3/2}$; por tanto, ρD_i es proporcional a $T^{1/2}$, por lo que habrá de adoptarse un valor medio entre las zonas fría y caliente.

con lo que resulta para w :

$$w = \left[\sum_{i=1}^n k_i(T) Y_i \right] (1 - Y), \quad [19]$$

siendo n el número de centros activos distintos.

Al llevar [19] a [17], resulta, finalmente:

$$m = \int_{-\infty}^x (1 - Y) \left[\sum_{i=1}^n k_i(T) Y_i \right] dx. \quad [20]$$

Ahora bien, como las concentraciones Y_i de los radicales están determinadas en función de x mediante las soluciones [16], si se adoptan para Y y T valores medios $\bar{Y}$ y $\bar{T}$, que hay que determinar empíricamente, se obtiene, para la velocidad de propagación de la llama, como se comprueba con facilidad, una expresión de la forma:

$$V = \left[(1 - \bar{Y}) \sum_{i=1}^n k_i(\bar{T}) \frac{\rho D_i}{\phi_0^2} Y_{i,0} \right]^{1/2}. \quad [21]$$

En ella, Tanford y Pease determinan los valores de $\bar{Y}$ y $\bar{T}$ buscando la coincidencia con los resultados experimentales para una condición determinada.

Lograda ésta, la expresión [21] permite analizar la evolución de V con los parámetros de la mezcla y compararla con el resultado de las observaciones.

Por ejemplo; la figura VI-4, tomada de un trabajo de la NASA (17), permite comprobar una aproximación realmente notable, habida cuenta del carácter tan rudimentario del modelo propuesto.

En el trabajo de la NASA pueden verse los valores medios utilizados para $\bar{Y}$ y $\bar{T}$ y la forma en que se han calculado.

En la figura se incluyen también, para comparación, los resultados de la escuela rusa de Frank-Kamenetsky-Semenov, a que aludiremos después.

(17) G. L. DUGGER y D. M. SIMON: *Prediction of Flame Velocities of Hydrocarbon Flames*. «Tec. Rep.» núm. 1.153 NASA, 1954.

Pero tanto las teorías térmicas como las de difusión que acabamos de resumir resultan de introducir simplificaciones excesivas en el sistema general [1] a [5] que rige el fenómeno.

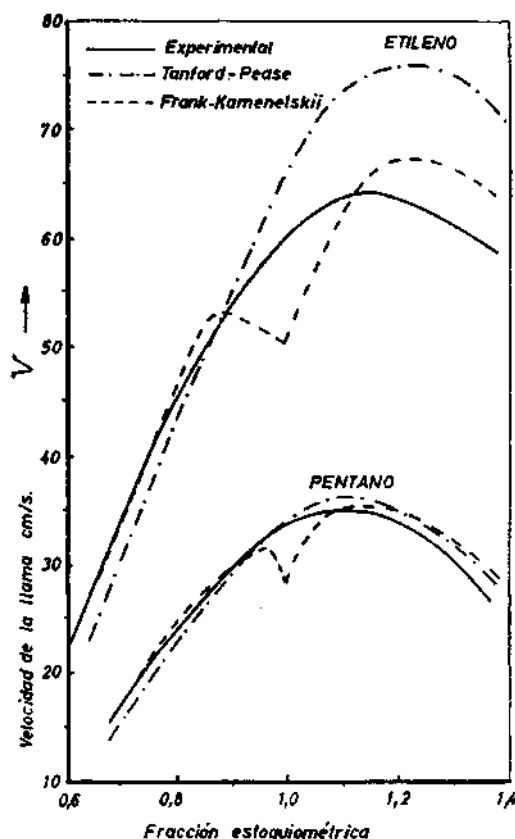


Fig. VI-4.—Velocidad de propagación de la llama para algunos hidrocarburos, en función de la composición de la mezcla.

Por ello, el paso siguiente en el desarrollo de la teoría de las llamas consiste en tomar en consideración el sistema diferencial completo del proceso, cuya formulación matemática, para el caso más general de j especies distintas con n reacciones químicas independientes, incluyendo además tanto la influencia de la energía cinética de la mezcla como la de la viscosidad, ambas despreciables en el caso de las llamas que estamos estudiando, fue dado por el profe-

sor Hirschfelder de la Universidad de Wisconsin y sus colaboradores (18), a cuyos trabajos remitimos al lector, con objeto de no alargar demasiado esta exposición (19), dando por terminada, con ello, esta breve reseña histórica.

3. CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN EN EL CASO DE DOS ESPECIES QUÍMICAS

En atención a la sencillez y porque su contribución al desarrollo de la Teoría General y de los métodos de cálculo propuestos ha sido de gran relevancia, vamos a circunscribirnos inicialmente al caso más sencillo de dos únicas especies químicas (reactantes y productos) representado por el sistema [1] a [5], el cual transformaremos mediante la eliminación de la variable x , como se hizo en el estudio de las ondas de detonación, por tratarse aquí también de un sistema autónomo.

Con ello y al introducir la notación adimensional que se indica, aquel sistema se sustituye por el siguiente:

Ecuación de continuidad:

$$\varphi \equiv \frac{v}{V} = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad [22]$$

donde $\theta = \frac{T}{T_0}$ es la temperatura adimensional.

(18) J. O. HIRSCHFELDER y C. F. CURTISS: *The Theory of Flame Propagation*. «*Jour. Chem. Phys.*», noviembre 1949, págs. 1076-81. También J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y D. E. CAMPBELL: *The Theory of Flames and Detonations*. «*Fourth Symposium on Combustion*». The Williams and Wilkins Co., 1953, págs. 190-211.

(19) Una sencilla deducción de las ecuaciones generales, junto con algún método de solución y aplicaciones a casos concretos, se encontrarán en los trabajos desarrollados por von Karman y sus colaboradores a los que nos referimos más adelante. Asimismo, un excelente trabajo de revisión de la teoría de las llamas laminares y de los métodos matemáticos desarrollados para resolver el sistema diferencial de las ecuaciones del proceso, se encontrará en el capítulo V de la obra del Prof. F. A. WILLIAMS, reiteradamente mencionada.

Ecuación de reacción:

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \Lambda \frac{(1-Y) e^{\theta_a \frac{1-\theta}{\theta}}}{1-\varepsilon - \frac{1-\theta}{1-\theta_0}}, \quad [23]$$

donde $\theta_a = \frac{E}{R T_f}$ es la temperatura adimensional de activación de la reacción, anteriormente definida, y

$$\Lambda = \frac{\rho \lambda K e^{-\theta_a}}{m^2 C_p (1-\theta_0)} \quad [24]$$

es un parámetro adimensional (20), cuyo valor determina el de la propagación V de la llama mediante la expresión:

$$V = \sqrt{\frac{\lambda K e^{-\theta_a}}{\rho_0^2 C_p (1-\theta_0)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Lambda}}. \quad [25]$$

Finalmente, la

Ecuación de difusión:

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{L}{1-\theta_0} \cdot \frac{Y-\varepsilon}{1-\varepsilon - \frac{1-\theta}{1-\theta_0}}, \quad [26]$$

donde

$$L \equiv \frac{\lambda}{\rho D C_p} \quad [27]$$

(20) En la definición de Λ se supone por sencillez que el cociente $\frac{\rho C_p}{\lambda}$ es constante. De no ser así, podrían utilizarse los valores en un punto de la llama; por ejemplo, en el límite frío, incorporando la variación $\frac{\rho \lambda}{\rho_0 \lambda_0} \cdot \frac{C_{p0}}{C_p}$ como una función adimensional de θ (o de ésta e Y) en el término variable de [23], lo que no altera el carácter de las conclusiones.

es el llamado número de Lewis-Semenov, igual a la relación entre los números de Schmidt y de Prandtl definidos en el capítulo III.

Esta formulación muestra que el problema se reduce a la integración de las dos ecuaciones [23] y [26], para el cálculo de las distribuciones de la concentración Y y del flujo ϵ de los productos en función de la temperatura θ , la cual determina además directamente las distribuciones de la velocidad y de la densidad de la mezcla mediante la ecuación de continuidad [22].

En cuanto a las condiciones en los límites, que expresan que la composición y el estado de la mezcla en los extremos frío y caliente, respectivamente, son los correspondientes a la mezcla inicial y al equilibrio termodinámico de los productos de la combustión, son las siguientes:

Extremo frío: $\theta = \theta_0$:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = 0, \\ Y = 0. \end{array} \right\} \quad [28]$$

Extremo caliente: $\theta = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = 1, \\ Y = 1. \end{array} \right\} \quad [29]$$

Fácilmente se comprueba que en el entorno del límite frío la única solución de la ecuación [23] que cumple la condición [28] es de la forma (21):

$$\theta - \theta_0 = - \frac{e^{-\theta_0} \frac{1 - \theta_0}{\theta_0}}{2 \Lambda} \epsilon^2 + 0 (\epsilon^3),$$

(21) Basta considerar que en el entorno de dicho punto [28] se comporta como la ecuación

$$\frac{d \xi}{d \epsilon} = \xi - \epsilon$$

lo hace en el entorno del origen, donde su solución es

$$\xi = 1 + \epsilon - \epsilon^2$$

o lo que es lo mismo: que no hay ninguna solución en el semientorno $\theta - \theta_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ que cumpla la citada condición [28] del límite frío.

La solución a esta dificultad consiste, como se ha dicho, en alterar la condición [28] bien sea mediante la introducción de una temperatura de encendido $\theta = \theta_i > \theta_0$, en cuyo caso aquella condición se sustituye por la siguiente:

$$\theta_0 < \theta < \theta_i : \varepsilon = 0, \quad [28']$$

sin que el valor θ_i elegido influya de modo sensible en el resultado, como se ha mostrado en la figura VI-2, siempre que la temperatura de activación θ_a de la reacción sea grande; bien sea mediante la introducción de un estabilizador poroso en el origen, que absorba una cierta cantidad de calor, como se ha visto que hace Hirschfelder, en cuyo caso la ecuación [23] habría de sustituirse por la siguiente:

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \Lambda \frac{(1-Y) e^{-\theta_a \frac{1-\theta}{\theta_i}}}{1-\varepsilon - \frac{1-\theta}{1-\theta_0} + \theta_s}, \quad [23']$$

siendo

$$\theta_s = \frac{q_s}{m C_p (T_i - T_0)} \ll 1$$

la expresión adimensional del calor indeterminado $q_s = \left(\lambda \frac{dT}{dx} \right)$ que se cede al estabilizador por unidad de tiempo.

Como puede comprobarse fácilmente, la presencia del término θ_s en el denominador de [23'] elimina de dificultad del límite frío y,

siendo

$$\zeta = \frac{e^{\theta_a \frac{1-\theta_0}{\theta_i}}}{(1-\theta_0) \Lambda} \cdot \frac{\theta - \theta_0}{1-\theta_0}$$

$$\xi = \frac{e^{\theta_a \frac{1-\theta_0}{\theta_i}}}{(1-\theta_0) \Lambda} \cdot \varepsilon.$$

además, como ha mostrado Hirschfelder (22), el resultado es también independiente del valor elegido para θ_0 , cuando θ_0 es grande.

Por otra parte, en la solución de Hirschfelder es evidente que si la temperatura de los gases frescos es la misma T_0 del caso anterior, la T_f de los gases quemados no puede ser la misma T_f de la combustión adiabática, puesto que se extrae del sistema una cantidad de calor q , por unidad de tiempo. Por ello, la condición [29] en el extremo caliente debe sustituirse en este caso por la siguiente:

Extremo caliente: $\theta = \theta_0 = 1 - \theta_0$:

$$\left. \begin{array}{l} \epsilon = 1, \\ Y = 1. \end{array} \right\} \quad [29']$$

Ahora bien, como veremos más adelante y precisamente a causa de la energía de activación de la reacción química, la zona que interesa en el proceso y donde, por ello, se inicia la integración del sistema en los métodos de cálculo, es la próxima al extremo caliente.

Por ello, si en la solución de Hirschfelder se parte para el cálculo de la temperatura T_f de los gases quemados en la combustión adiabática, la del estabilizador tiene que ser mayor que la T_0 que tendrían los gases frescos en aquella y su valor T_f en función del calor q , cedido al mismo está dado por la expresión:

$$\theta_1 = \theta_0 + \theta_0, \quad [28'']$$

en cuyo caso la solución de Hirschfelder se identifica matemáticamente con la correspondiente al modelo de una temperatura de encendido θ_1 dada precisamente por [28''], como resulta fácil comprobar.

Finalmente, cabe eludir también la dificultad del límite frío mediante el empleo de una expresión para la velocidad de reacción w que tienda a cero con suficiente rapidez cuando la temperatura se aproxima a la de los gases frescos.

Tal es precisamente el método seguido por Layzer (23), quien supone que para $\theta \rightarrow \theta_0$, w tiende a cero como $(\theta - \theta_0)^n$, siendo

(22) Véase HIRSCHFELDER, CURTISS y BIRD, ya citados, pág. 773.

(23) D. LAYZER: *Theory of Flame Propagation*. Part. I. *Existence, Uniqueness and Stability of the Steady State*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1954, págs. 222 y sigts.

$n > 1$. Sin embargo, se puede demostrar que, en este caso, la solución no es única (24).

Para todo lo cual, en lo que sigue emplearemos la hipótesis de una temperatura de encendido θ_i próxima a θ_0 , en la forma descrita.

De todo lo expuesto resulta que, en el caso aquí considerado de dos únicas especies químicas, el problema de la estructura de la llama se reduce, en definitiva, a la integración de las dos ecuaciones diferenciales [23] y [26] en el intervalo $\theta_i \leq \theta \leq 1$, con las condiciones en los límites:

$$\begin{aligned} 0 &= \theta_i \sim \theta_0; & \epsilon &\approx 0; \\ \theta &= 1; & \begin{cases} \epsilon &= 1, \\ Y &= 1. \end{cases} \end{aligned} \quad [28''']$$

las cuales sólo podrán satisfacerse simultáneamente para valores determinados del parámetro Λ (25).

Se trata, pues, de un problema de *valor propio* con condiciones en los límites dadas en *dos puntos distintos*.

Además, uno de los límites, el del extremo caliente, es un punto singular aislado del sistema diferencial [23], [26], puesto que los numeradores y los denominadores de los segundos miembros de ambas ecuaciones se anulan simultáneamente en él, constituyendo además la única singularidad del sistema en el intervalo de integración (26).

Su carácter se determina fácilmente mediante la aplicación del teorema de Bendixson, comprobándose que se trata de un punto de silla, con una única solución en el semientorno $\theta \leq 1$; $\epsilon \leq 1$; $Y \leq 1$ de dicho punto para cada valor del parámetro Λ (27).

(24) Ver F. A. WILLIAMS, ya citado, pág. 100.

(25) Obsérvese que en el punto de encendido θ_i la concentración Y_i se desconoce *a priori*. Su valor queda determinado por la solución del problema y la del sistema en el intervalo de calentamiento $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_i$ está determinada por la condición de que en él sea $\epsilon \equiv 0$, con lo que la distribución de Y es la de una difusión pura, con el valor inicial $Y = Y_i$ para $\theta = \theta_i$. Claro es que la solución presenta una discontinuidad de la derivada de ϵ en el punto de encendido.

(26) Si se utiliza el modelo de Layzer para tratar la dificultad del límite frío, éste es otra singularidad del sistema, comprobándose fácilmente que se trata de un punto nodal.

(27) El método de análisis es el siguiente:

Al hacer en el entorno del extremo $\theta = 1$, $\epsilon = 1$, $Y = 1$ el cambio de varia-

Por tanto, se concluye que para cada valor de Λ existe una única solución del sistema que se inicia en el extremo caliente y el problema consiste en buscar el valor de Λ que hace pasar a la solución buscada también por el límite frío.

La figura VI-5 muestra el aspecto de las soluciones en el espacio θ, ϵ, Y para tres casos típicos obtenidos por integración numérica del sistema [23], [26], así como las proyecciones de las mismas en:

bles $\xi = \frac{1-\theta}{1-\theta_0}$, $\eta = 1-\epsilon$, $\zeta = 1-Y$, el comportamiento de [23] y [26] en:

él es análogo al del sistema (ver, por ejemplo, las obras de LEFSCHETZ y CASARI: citadas en el capítulo V:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \alpha \frac{\zeta}{\eta - \xi}, \quad \frac{d\zeta}{d\xi} = L \frac{\eta - \zeta}{\eta - \xi}$$

en el entorno del origen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, siendo

$$\alpha = (1 - \theta_0) \Lambda > 0.$$

Para analizar este sistema, es mejor considerar primero la ecuación

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \gamma \frac{\zeta}{\eta - \zeta}, \quad (a)$$

que resulta de eliminar la variable ξ , siendo

$$\gamma = \frac{\alpha}{L} = (1 - \theta_0) \frac{\Lambda}{L} > 0.$$

La aplicación del teorema de Bendixson a la ecuación (a) muestra que el punto $\eta = 0$, $\zeta = 0$ es un punto de silla, con una única solución en el cuadrante $\eta > 0$, $\zeta > 0$ para cada valor de γ , cuya pendiente está dada por la expresión

$$\left(\frac{d\eta}{d\zeta} \right)_0 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4(1 - \theta_0) \frac{\Lambda}{L}}}{2}.$$

Fácilmente se verifica también que a esa única solución en el plano η, ζ corresponden soluciones también únicas en los planos ξ, η y ξ, ζ , respectivamente, es decir, que hay una única solución para cada valor de Λ , que se inicia en el punto $\theta = 1$, $\epsilon = 1$, $Y = 1$.

los planos (ϵ, θ) y (θ, Y) que corresponden respectivamente a las soluciones de cada una de ambas ecuaciones (28).

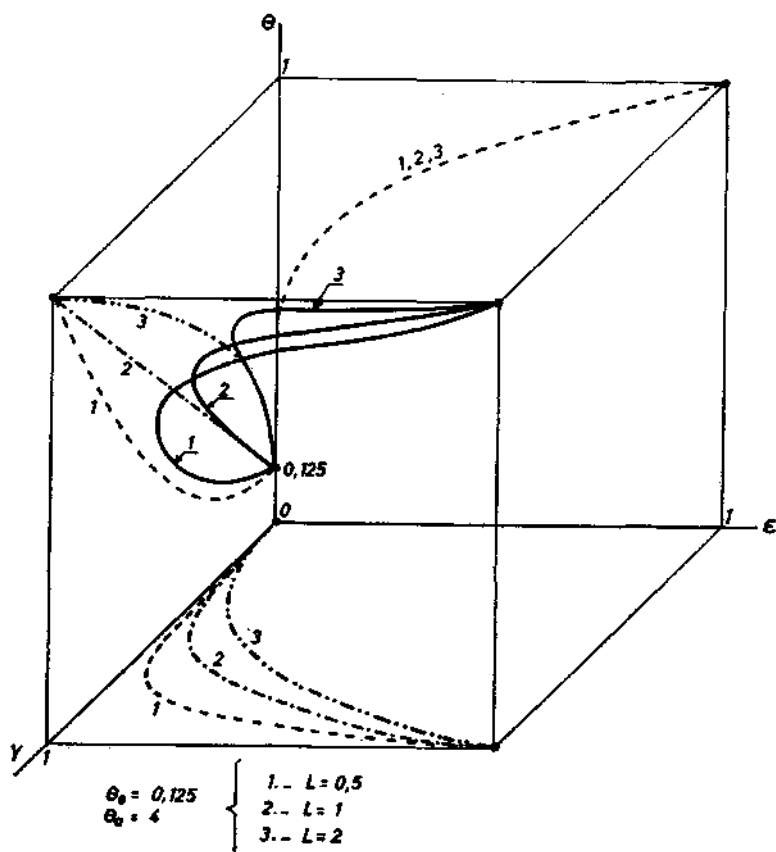


Fig. VI-5.—Representación de la estructura de la llama en el espacio de fase.

Antes de entrar en el estudio de los métodos de resolución del sistema [23], [26], vamos a considerar un caso particular de gran interés práctico, porque facilita mucho su integración.

Dicho caso se da cuando el número de Lewis-Semenov de la mezcla es igual a la unidad:

$$\frac{\lambda}{\rho D C_p} = 1, \quad [30]$$

(28) En la aproximación de la figura no pueden separarse las tres curvas de ϵ vs θ correspondientes a las tres soluciones.

porque entonces los perfiles de distribución de la concentración Y y de la temperatura θ coinciden, como se comprueba fácilmente al verificar que la solución

$$Y = \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0} \quad [31]$$

satisface tanto la ecuación diferencial [26] como las condiciones en los límites [28] y [29].

Físicamente, la condición [30] significa que la entalpía total de la mezcla (suma de la térmica y de la química) permanece constante a través de la onda (29).

Por otra parte, constituye una buena aproximación en muchos casos, como enseña la Teoría Cinética de Gases (30), por lo que su empleo está bien justificado.

La evolución de la idea ha sido la siguiente:

La entalpía constante fue introducida por primera vez en 1934 como una hipótesis no demostrada por Lewis y von Elbe, al estudiar la llama de descomposición del ozono, que fue el primer intento de aplicación de la teoría de propagación de la llama a un caso con Cinética Química real (31).

El grupo de investigadores rusos de la combustión llegó independientemente a la misma conclusión, mediante una formulación matemática correcta de las condiciones de validez de [31] (32).

(29) El número de Lewis-Semenov juega aquí el mismo papel que el de Prandtl:

$$Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$$

en la Teoría de la Capa Límite, donde la condición $Pr = 1$ permite expresar el perfil de velocidades en función de temperaturas, al igual de lo que ocurre en [30] para la concentración, como se vio en el epígrafe 10 del capítulo primero.

(30) Ver, por ejemplo, W. JOST: *Diffusion in Solids, Liquids and Gases*. Acad. Press Inc., Nueva York, 1952. También, del mismo autor, la obra citada al comienzo de este capítulo, págs. 113 y sigs.

(31) B. LEWIS y G. VON ELBE: *On the Theory of Flame Propagation*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1934, págs. 537-46.

(32) Y. B. ZELDOVICH y D. A. FRANK-KAMENETSKII: «*Doklady*», 1938, pág. 663; N. N. SEMENOV: *Thermal Theory of Combustion and Explosion*. «*Prog. Phys. Sci. URSS*», 1940, pág. 251. Trad. NACA «*Tech. Mem.*», 1.024; YA. ZELDOVICH,

Finalmente, las condiciones generales de validez de la regla de entalpía constante en el caso de más de dos especies químicas independientes que consideraremos más tarde, han sido analizadas por Hirschfelder (33), quien ha demostrado que para su validez es necesario y suficientes que los coeficientes binarios de difusión de cada par de especies sean iguales entre sí y que el número de Lewis-Semenov resultante sea igual a la unidad.

Por último, en los casos excepcionales en que la energía cinética de la mezcla es importante y hay que tomarla en consideración, la condición de entalpía total (térmica más química más cinética) constante, exige, además, que el número de Prandtl sea igual a tres cuartos: $Pr = 3/4$.

La gran ventaja de la condición [30] es, evidentemente, la de reducir el problema a la integración de una única ecuación diferencial

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = \frac{\Lambda}{1 - \theta_0} \frac{(1 - \theta) e^{-\theta_0 \frac{1-\theta}{\theta}}}{1 - \epsilon - \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0}}, \quad [32]$$

con las dos condiciones en los límites: $\theta = \theta_0$, $\epsilon = 0$; $\theta = 1$, $\epsilon = 1$.

Tratándose de un problema de valor propio, la reducción del sistema a una sola ecuación de primer orden constituye, evidentemente, una gran simplificación.

4. MÉTODOS DE CÁLCULO

Es claro que ni el sistema diferencial [23], [26], correspondiente al caso más sencillo de dos únicas especies químicas independientes, ni siquiera la ecuación [32] a que se reduce aquél en el caso de un número de Lewis-Semenov igual a la unidad, admiten una solución

D. FRANK-KAMENETSKII y N. N. SEMENOV: «*Jour. Exp. Theor. Phys. URSS*», 1940, pág. 1427. Trad. NACA, «*Tech. Mem.*», núm. 1.084. Ver también D. FRANK-KAMENETSKII: *Diffusion and Heat Transfer in Chemical Kinetics*. «Plenum», páginas 335 y sigts. del capítulo VI, dedicado a *Conceptos elementales de la Teoría de la combustión*, donde se encontrará un resumen muy claro e ilustrativo de la Teoría de las llamas y otros procesos de combustión.

(33) J. O. HIRSCHFELDER: *Diffusion Coefficients in Flames and Detonation with Constant Enthalpy*. «*Phys. Fluids*», 1960, págs. 100-12.

que se exprese en forma analítica cerrada, como tampoco puede expresarse en esta forma el valor propio Λ .

Por ello, durante la década de los años 50, una vez clasificados los aspectos relativos a la formulación matemática de la teoría de la llama, se realizó un esfuerzo considerable en el estudio, desarrollo y valoración de los métodos numéricos y analíticos propuestos para la resolución del sistema de ecuaciones resultantes, con las condiciones en los límites indicados (34).

El grupo de Combustión del INTA, creado a partir de 1953, tomó una parte activa en tales estudios, cuyos resultados principales se recogieron en algunos informes del mencionado Instituto y en otras publicaciones (35).

Para facilitar su estudio, los métodos desarrollados pueden agruparse genéricamente en una de las tres clases siguientes:

- a) Métodos de integración analítica aproximada.
- b) Métodos de integración numérica.

Ante la imposibilidad de hacer una exposición y valoración de todos ellos, remitimos a la abundante bibliografía sobre la materia, limitándonos aquí a exponer en forma muy resumida los aspectos más importantes de la cuestión, para lo cual empezaremos por considerar los métodos analíticos:

a) *Métodos analíticos*

Es claro que la dificultad para la integración del sistema procede de su carácter no lineal y del acoplamiento que existe entre las dos ecuaciones, como también es claro lo muy ventajoso que resulta poder disponer de soluciones que proporcionen una expresión analítica del valor propio Λ , en lugar de tener que proceder por tanteos como los que lleva consigo la integración numérica.

(34) Ver, por ejemplo, el trabajo de M. EVANS, citado anteriormente.

(35) TH. VON KARMAN y S. S. PENNER: *Fundamental Approach to Laminar Flame Propagation*. Selected Combustion Problems. AGARD. Butterworths Sc. Publ. Londres, 1954; TH. VON KARMAN, S. S. PENNER y G. MILLÁN: *The Present Status of the Theory of Laminar Flame Propagation*. Syxth Symp. on Comb. Reinhold Publ. Co., Nueva York, 1957; G. MILLÁN, J. M. SENDAGORTA e I. DA RIVA: *Comparison of Analytical Methods for the Calculation of Laminar Flame Velocity*. INTA, 1957; G. MILLÁN e I. DA RIVA: Idem id. INTA, 1958; J. M. SENDAGORTA: *Propagation Velocity and Structure of Single Step Reaction Flames*. «Comb. and Flames», diciembre 1961.

Ventajas a las que hay que agregar las que proporciona el disponer de una expresión analítica de la solución, aunque sea sólo aproximada, a la hora de estudiar sus propiedades generales, así como la influencia de parámetros tales como el coeficiente de difusión, la energía de activación de la reacción, la composición y el estado inicial de la mezcla, etc.

Todo lo cual justifica suficientemente el esfuerzo que se ha realizado para obtener soluciones aproximadas del sistema diferencial de la llama, así como su generalización a casos más complejos de cinética química y de variación de las funciones termodinámicas de la mezcla.

Como hemos visto, la cuestión básica consiste en obtener el valor propio de Λ correspondiente a la solución buscada.

Y el fundamento general de los métodos analíticos desarrollados para ello consiste en integrar la ecuación [23] entre los extremos del intervalo, lo que proporciona para Λ la siguiente expresión:

$$\Lambda = \frac{\frac{1}{2} - \int_0^1 \frac{1-\theta}{1-\theta_0} \cdot d\epsilon}{\int_{\theta_i}^1 (1-Y) e^{-\theta_* \frac{1-\theta}{\theta_0}} \cdot d\theta} \quad [33]$$

en donde, como se ha visto, la influencia de θ_i es despreciable para valores de θ_* suficientemente grandes, como los que se dan generalmente en los procesos de combustión.

Definida así la cuestión, se trata ahora de buscar expresiones aproximadas de θ en función de ϵ para calcular la integral del numerador (36)

$$J = \int_0^1 \frac{1-\theta}{1-\theta_0} d\epsilon = \frac{1}{1-\theta_0} \int_0^1 \epsilon \cdot d\theta, \quad [34]$$

(36) O de ϵ en función de θ , puesto que una integración por partes da

$$\int_0^1 \frac{1-\theta}{1-\theta_0} d\epsilon = \frac{1}{1-\theta_0} \int_{\theta_0}^1 \epsilon \cdot d\theta.$$

así como de encontrar expresiones aproximadas de $1 - Y$ en función de θ , para calcular la integral de denominador:

$$I = \int_{\theta_i}^1 (1 - Y) e^{-\theta_s \frac{1-\theta}{\theta}} d\theta, \quad [35]$$

con lo que el valor propio buscado Λ está dado por la expresión

$$\Lambda = \frac{1 - 2J}{2I}, \quad [36]$$

donde J e I dependen, en general, a su vez, de Λ .

Empezando por la integral [35], la cuestión queda automáticamente resuelta si el número de Lewis-Semenov es igual a la unidad, porque, como se ha visto, en este caso Y está dado, no aproximadamente sino exactamente por la expresión [31], con lo que se obtiene para I , después de despreciar los términos en θ_i :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{1 - \theta_0} \int_{\theta_i}^1 (1 - \theta) e^{-\theta_s \frac{1-\theta}{\theta}} d\theta \simeq \\ &\simeq \frac{1}{1 - \theta_0} \int_0^1 (1 - \theta) e^{-\theta_s \frac{1-\theta}{\theta}} d\theta = \\ &= \frac{1}{1 - \theta_0} \left[\frac{1 + \theta_s}{2} + \left(1 + \frac{\theta_s}{2} \right) \theta_s e^{\theta_s} E_i(-\theta_s) \right], \end{aligned} \quad [37]$$

siendo $E_i(-x)$ la integral exponencial

$$E(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad [38]$$

función tabulada (37), que para valores grandes de x admite el siguiente desarrollo en serie semiconvergente:

$$-E_1(-x) = \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right) \quad [39]$$

el cual proporciona para I una aproximación de la forma:

$$I \approx \frac{1}{\theta_a^2} + O(\theta_a^{-3}). \quad [40]$$

Por consiguiente, en el caso de un número de Lewis-Semenov igual a la unidad, las diferencias entre los diversos métodos consisten en las distintas maneras de aproximar la integral J .

El grupo ruso de Frank-Kamenetskii, Zeldovich y Semenov fue el primero en desarrollar métodos de esta naturaleza (38) y en proporcionar para la integral I la aproximación dada por [40].

Para aproximar la integral J , Frank-Kamenetskii supone que casi toda la combustión se produce en el entorno de la temperatura máxima, con lo que el integrando $\frac{1-\theta}{1-\theta_a}$ es muy pequeño en todo el intervalo, lo que permite despreciar su valor frente al término $1/2$ en el numerador de [33]. Con ello se obtiene, finalmente, para la velocidad de propagación de la llama la expresión:

$$V = \sqrt{\frac{2 \lambda_f K e^{-\theta_a}}{\rho_0^2 C_p \theta_a^2 (1-\theta_a)^2}}. \quad [41]$$

Fisicamente, el despreciar la integral del numerador de [33] significa que en la zona de reacción el calor transportado por convección es muy pequeño, tanto frente al que general la combustión como

(37) JAHNKE-EMDE: *Tables of Functions with Formulae and Curves*. Dover Publications, 1945. También, M. ABRAMOWITZ e I. A. STEGUN: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.

(38) Traducciones del grupo de trabajos realizados por estos autores entre 1938 y 1948, se encontrarán en las «Technical Memoranda» de NACA, núms. 1.026, 1.064 y 1.282, ya citados. Ver también las págs. 66 y sigts. de la obra de SHECHERKIN y TROSHIN citada al comienzo, así como el trabajo de EVANS, págs. 334 y siguientes, y la obra citada de FRANK-KAMENETSKII, págs. 338 y sigts.

al transmitido por la conductividad térmica, hipótesis que sirvió de base a Frank-Kamenetskii para su formulación.

Debe señalarse que, en este caso, como en los que siguen, se obtienen fórmulas similares con variaciones que pueden encontrarse en las referencias mencionadas, al considerar reacciones de orden distinto al primero con que estamos operando en esta exposición.

Al objeto de ilustrar con un ejemplo la aproximación que proporciona la fórmula [41] en un caso de combustión real, en la figura VI-4 se ha incluido, como se indicó, la velocidad de la llama que se obtiene mediante su aplicación.

Para obtener una mejor aproximación de la integral J definida por [34] puede utilizarse, por ejemplo, la aproximación lineal

$$1 - \epsilon = \alpha (1 - \theta), \quad [42]$$

que sabemos existe en el entorno del extremo caliente, puesto que éste es, como vimos, un punto de silla.

El valor α se calcula fácilmente y está dado por la ecuación

$$\alpha = \frac{\Lambda}{(1 - \theta_0) \alpha - 1}. \quad [43]$$

Por otra parte, al introducir [42] en [33] se obtiene la expresión:

$$1 - \frac{1}{(1 - \theta_0) \alpha} = 2 \Lambda I, \quad [44]$$

que, al combinarla con [43] y eliminar α entre ambas, proporciona la siguiente aproximación para Λ :

$$\Lambda^{-1/2} = \sqrt{\frac{2 I}{(1 - \theta_0) - \sqrt{2 I}}}, \quad [45]$$

generalmente llamada segunda aproximación de von Karman (39).

Puede mejorarse todavía el resultado sin más que mejorar en el integrando de J la aproximación de ϵ en función θ en el entorno del extremo caliente, como se ha hecho, por ejemplo, por el Grupo de

(39) Ver VON KARMAN, PENNER y MILLÁN, 1956, antes citados.

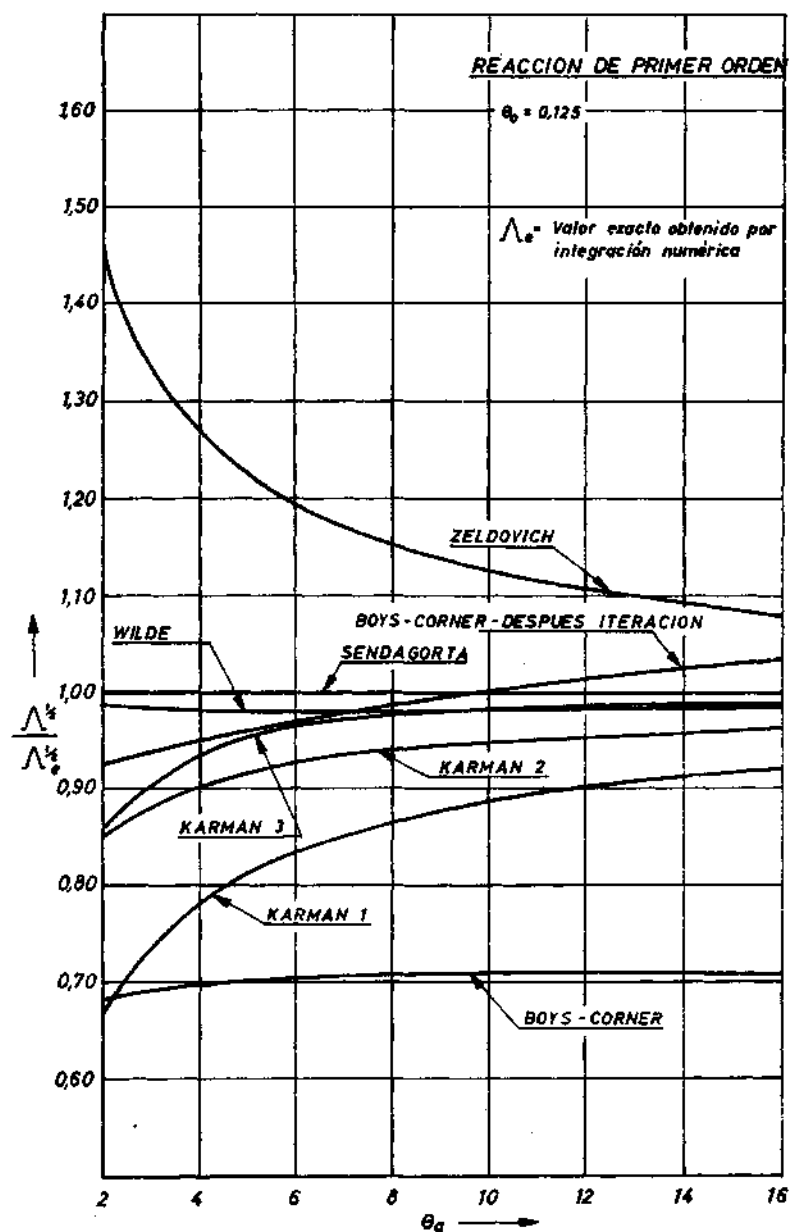


Fig. VI-6.—Comparación de métodos analíticos para el cálculo de la velocidad de propagación de la llama.

Combustión del INTA, en la forma que puede verse en los trabajos anteriormente citados.

Una comparación entre los diversos métodos existentes, llevada a cabo por el Grupo de Combustión del INTA, puede verse en la figura VI-6 para un caso típico.

En ella se han incluido también las aproximaciones obtenidas por los métodos de Boys y Corner (40) y de Wilde (41) para cuyo fundamento remitimos a las referencias de estos autores o a las del INTA, ya mencionadas.

Asimismo, la figura VI-7 muestra la distribución de ϵ en función de θ que se obtiene con algunos de los métodos citados, para un caso

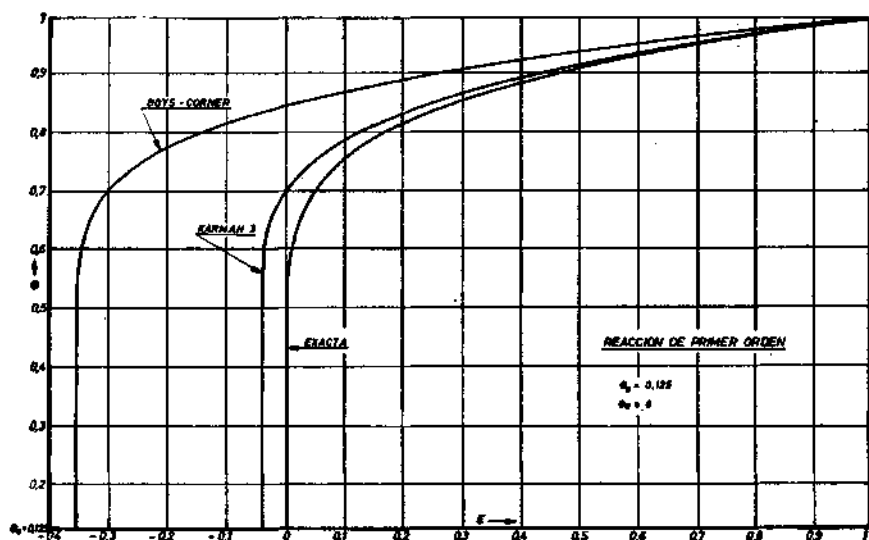


Fig. VI-7.—Distribución del grado de avance de la reacción en función de la temperatura.

(40) S. F. BOYS y J. CORNER: *The Structure of the Reaction Zone in a Flame*. «Proc. Roy. Soc.», 1949, págs. 90-106; J. CORNER: *The Effect of Diffusion of the Main Reactants on Flame Speed in Gases*. «Proc. Roy. Soc.», 1949, páginas 388-405.

(41) K. A. WILDE: *Improved Approximate Solutions of Flame Equations for Flames Governed by Simple Chemical Reactions*. «Jour. Chem. Phys.», 1954, página 1788.

típico, junto a la solución exacta, obtenida por integración numérica.

Si bien en la mayoría de los casos de mezclas combustibles el valor del número de Lewis-Semenov difiere poco de la unidad, con lo que la aproximación $L = 1$ que hemos empleado hasta aquí resulta bastante satisfactoria, en algunas ocasiones la diferencia puede ser grande.

Tal ocurre, por ejemplo, en el caso de combustión del hidrógeno en el aire, en que es $L = 0,30$, o en el de la combustión del propano, donde por el contrario, es $L = 2$.

En tales casos, el problema se complica intrínsecamente al tener que resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales, en lugar de una sola y si se desea aplicar un método similar a los que acabamos de describir para el caso $L = 1$, para calcular la integral I en [35], se hace necesario buscar una aproximación satisfactoria de Y en función de θ , que sustituya a la solución exacta [31] que se tenía entonces.

Por ejemplo, si se emplea para Y vs θ una aproximación lineal que coincida con la solución exacta en el extremo caliente, al aplicar el método de Frank-Kamenetskii, que consiste, como hemos visto, en despreciar el término convectivo en la zona de reacción, se comprueba que aquella aproximación es:

$$1 - Y = L \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0}, \quad [46]$$

con lo que se obtiene para la velocidad V de propagación de la llama la expresión:

$$V = V_{L=1} \cdot \sqrt{L}, \quad [47]$$

donde $V_{L=1}$ es la velocidad correspondiente a un número de Lewis-Semenov igual a la unidad, dada por la expresión [41].

Por otra parte, se puede comprobar fácilmente que en la zona fría de la llama $\theta \sim \theta_0$, donde la influencia de la reacción química es nula y la distribución de Y es, por ello, la correspondiente a un proceso de difusión pura, la concentración es una función parabólica de θ , de la forma:

$$Y = C (\theta - \theta_0)^2. \quad [48]$$

En consecuencia, se obtiene una mejor aproximación de Y en todo el intervalo, o bien extendiendo la validez de [48] hasta el extremo caliente, en cuyo caso la distribución de la concentración en todo el campo de integración está dada por la expresión:

$$Y = \left(\frac{\theta - \theta_0}{1 - \theta_0} \right)^L, \quad [49]$$

o, mejor todavía, utilizando las aproximaciones [48] y [46] en las regiones fría y caliente respectivamente, con la condición adicional de que sean tangentes en el punto de intersección, condición que sirve para fijar el valor de la constante C en [48].

La figura VI-8, tomada del trabajo antes citado de Sendagorta, Da Riva y el autor, muestra la influencia del número de Lewis-Semenov en el valor de la velocidad de propagación $V \sim \Lambda^{-\frac{1}{2}}$, según los diversos métodos de aproximación empleados, cuya descripción detallada puede encontrarse en la mencionada publicación.

Asimismo, la figura VI-9, tomada de la misma referencia, muestra las distribuciones de ϵ e Y en función de θ , para un caso típico (42).

Dentro de la línea de aproximación analítica que estamos considerando, un trabajo muy reciente y de gran interés además para ilustrar algunos aspectos de la estructura de la llama, es el de Bush y Fendell (43), en que la solución se obtiene mediante desarrollos asintóticos de ϵ e Y , así como del valor propio Λ , en función de un parámetro

$$\beta = \frac{\theta_a}{1 - \theta_0}, \quad [50]$$

equivalente a la temperatura de activación de la reacción, para valores grandes del mismo, puesto que, como se ha dicho, en los procesos de combustión θ_a es generalmente mucho mayor que la unidad.

(42) Obsérvese que en estos ejemplos se emplea una temperatura de activación $\theta_0 = 4$ deliberadamente baja para mostrar un caso más bien desfavorable.

(43) W. B. BUSH y F. E. FENDELL: *Asymptotic Analysis of Laminar Flame Propagation for General Lewis Numbers*. «Combustion Science and Technology», 1970, págs. 421-28.

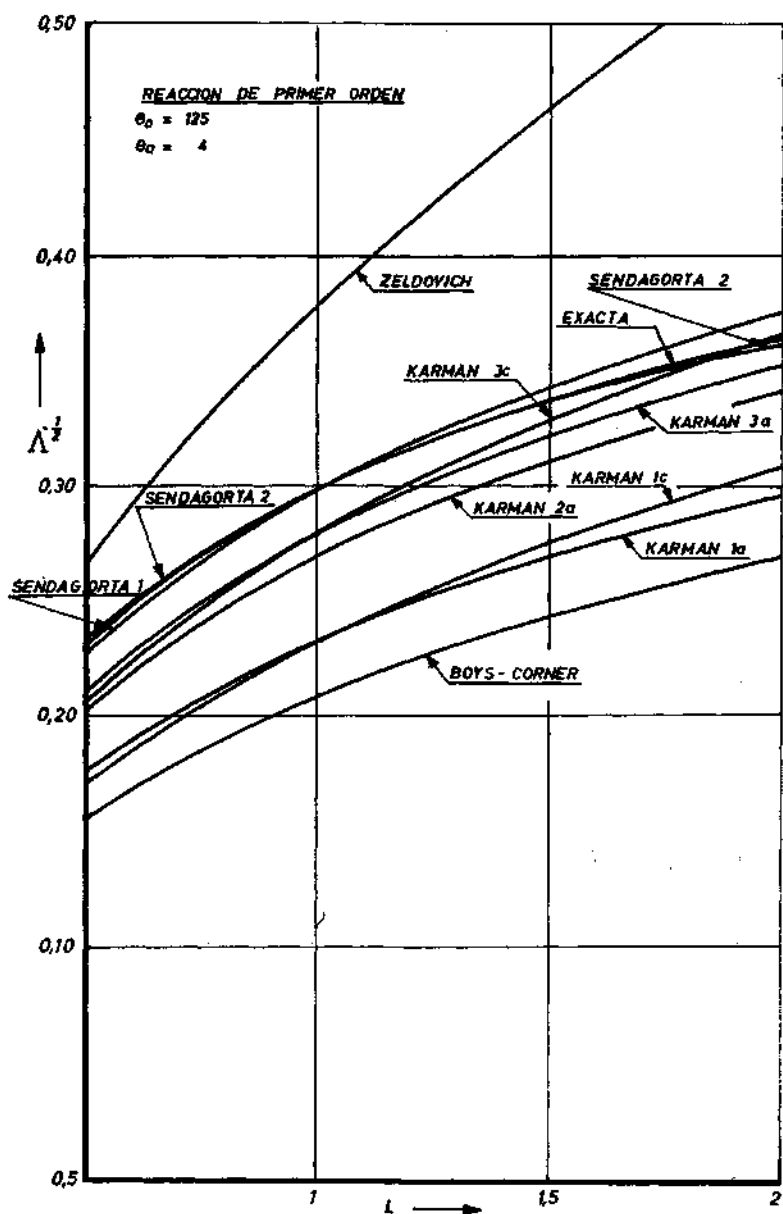


Fig. VI-8.—Influencia del número de Lewis-Semenov en la velocidad de propagación de la llama.

El método empleado es el de las pequeñas perturbaciones (44), consistente en efectuar desarrollos asintóticos distintos para cada una de las dos zonas de la llama próximas respectivamente a los extremos caliente y frío, con una zona central de validez común que permite efectuar el empalme de ambas aproximaciones.

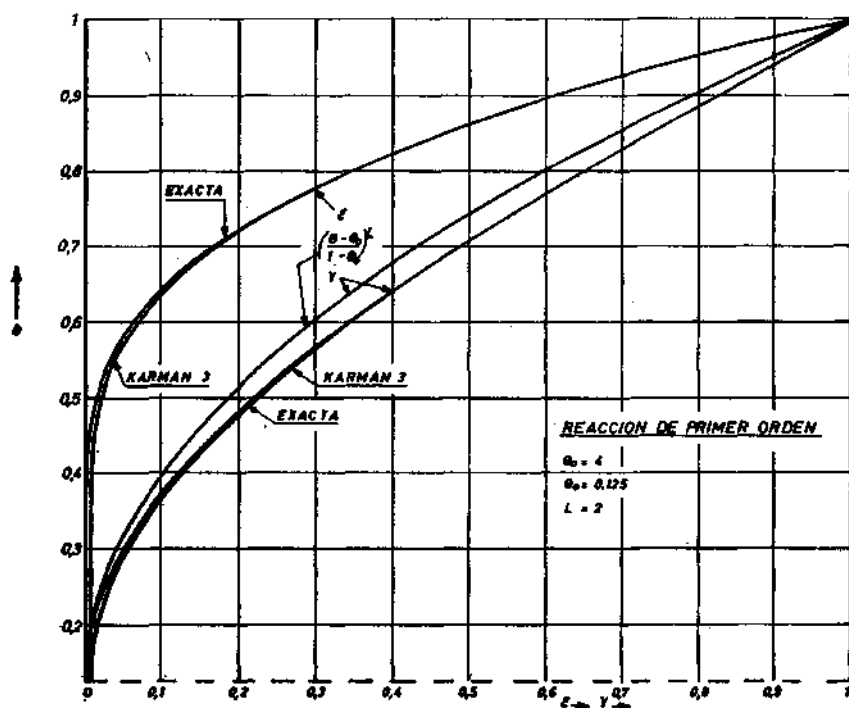


Fig. VI-9.—Distribuciones de la concentración y del grado de avance de la reacción para un número de Lewis-Semenov distinto de la unidad.

El desarrollo asintótico del valor propio Λ , es decir, de la incógnita del problema, es común a toda la llama y está dado por la expresión

$$\Lambda = \beta^2 [\Lambda_0(L) + \beta^{-1} \Lambda_1(L) + \dots], \quad [51]$$

(44) Ver, por ejemplo, M. VAN DYKE o J. D. COLE, previamente citados.

donde los valores de los diversos coeficientes del desarrollo son :

$$\Lambda_0 = \frac{1}{2L} ; \quad \Lambda_1 = \frac{1,656 - (1 - L)}{L}, \dots \quad [52]$$

Los desarrollos propuestos permiten dividir a la llama en una zona de espesor muy pequeño, próxima al extremo caliente, la cual resulta ser la determinante para la velocidad de propagación V , cuyo valor puede calcularse independientemente de la solución correspondiente a la zona fría.

Por otra parte, el paso al límite de las soluciones correspondientes a ambos desarrollos asintóticos, para temperaturas de activación muy grandes $\theta_0 \gg 1$, reduce tales desarrollos a los valores de las variables a uno y otro lado de la llama considerada como una superficie de discontinuidad, cuya justificación aparece así clara para reacciones con energías de activación suficientemente altas.

Pero el paso al límite indicado deja indeterminado el valor de Λ , el cual no puede calcularse, como hemos visto, sin tomar en cuenta la estructura interna de aquélla.

En cuanto a la aproximación del resultado, en el trabajo se muestra que el empleo de dos únicos términos en el desarrollo asintótico [51] del valor propio, cuyo cálculo es muy sencillo, proporciona un valor de éste que mejora apreciablemente los de las aproximaciones analíticas anteriormente comentadas. Por ejemplo, la desviación de Λ con respecto al valor exacto es inferior al 1 por 100 para $\beta > 10$, en un caso típico calculado por Bush y Fendell.

En particular, como se ve fácilmente, el primer término da para la velocidad de propagación de la llama el valor obtenido por Frank-Kamenskii.

Un procedimiento distinto para la integración del sistema fundamental de ecuaciones de la llama y, consiguientemente, para el cálculo del valor propio Λ ha sido desarrollado por el prof. Klein, de la Universidad de Wisconsin (45), y consiste en reducir el problema a la resolución de una ecuación integral.

Para exponer los fundamentos del método, comencemos por ex-

(45) G. KLEIN: *Equations of a Simple Flame Solved by Successive Approximations to the Solution of a Integral Equation*. ONR 8, 1954. También, *A Contribution to Flame Theory*, «Phil. Trans.», año 1967, págs. 389 y sigts.

presar el sistema [3], [4] y [5] en forma adimensional mediante el siguiente cambio de variables:

$x = l \xi$, siendo $l = \frac{\lambda}{m C_p}$ una longitud característica del proceso.

$\tau = \frac{T - T_0}{T_f - T_0} = \frac{\theta - \theta_0}{1 - \theta_0}$, una temperatura adimensional,

en lugar de θ ; $\tau_0 = \frac{\theta_0}{1 - \theta_0}$; $\Gamma = (1 - \theta_0) \Delta$, el parámetro cuyo valor propio se busca. Finalmente,

$\Phi = (1 - Y) e^{-\theta_0 \frac{1-\theta}{1-\theta_0}} = (1 - Y) e^{-\theta_0 \frac{1-\tau}{1-\tau_0}}$
una velocidad adimensional de la reacción química.

[53]

Con ello se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\frac{d\tau}{d\xi} = \tau - \epsilon; \quad [54]$$

$$\frac{d\epsilon}{d\xi} = \Gamma \cdot \Phi; \quad [55]$$

$$\frac{dY}{d\xi} = L(Y - \epsilon), \quad [56]$$

que puede deducirse al siguiente, de dos ecuaciones de segundo orden, al eliminar ϵ de [54] y [56] mediante [55]:

$$\frac{d^2\tau}{d\xi^2} - \frac{d\tau}{d\xi} + \Gamma \cdot \Phi = 0; \quad [57]$$

$$\frac{d^2Y}{d\xi^2} - L \frac{dY}{d\xi} + L \Gamma \cdot \Phi = 0. \quad [58]$$

Las condiciones en los límites que ha de satisfacer la solución y

que sirven también para determinar el valor propio de Γ son, evidentemente (46):

$$\left. \begin{aligned} \xi \rightarrow -\infty: \quad \tau, Y, \frac{d\tau}{d\xi} \text{ y } \frac{dY}{d\xi} &\rightarrow 0; \\ \xi \rightarrow +\infty: \quad \tau, Y, &\rightarrow 1; \frac{d\tau}{d\xi} \text{ y } \frac{dY}{d\xi} \rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad [59]$$

Para llevar a cabo la integración de este sistema Klein, teniendo presente que τ es una función monótona de ξ , que varía entre 0 y 1 cuando ξ lo hace entre $-\infty$ y $+\infty$, introduce en él el siguiente cambio de variables, que permiten reducirlo a un sistema no lineal, de primer orden:

Variable dependiente: $\zeta = \frac{d\tau}{d\xi}$, es decir, la pendiente del perfil

de temperaturas.

Variable independiente: la temperatura adimensional τ .

Con ello, el citado sistema se transforma en el siguiente:

$$\zeta \frac{d\zeta}{d\tau} - \zeta + \Gamma \cdot \Phi = 0; \quad [60]$$

$$\zeta \frac{dY}{d\tau} - L(Y + \zeta) + L\tau = 0, \quad [61]$$

con las nuevas condiciones en los límites:

$$\left. \begin{aligned} \tau = 0: \quad \zeta = 0, Y = 0; \\ \tau = 1: \quad \zeta = 0, Y = 1. \end{aligned} \right\} \quad [62]$$

Además, si en la ecuación [60] se logra expresar la concentración Y que figura en Φ en función de la temperatura τ , como ocurre, por ejemplo, en el caso de un número de Lewis-Semenov igual a la unidad o mediante una integración aproximada de [61], el problema queda reducido a la integración de la única ecuación diferencial [60].

(46) Como ya hemos discutido en otro lugar, la compatibilidad de estas condiciones para un valor propio de Γ , no analizaremos aquí este problema.

Finalmente, al integrar ésta entre el punto τ y el extremo caliente, teniendo en cuenta las condiciones en los límites [62], se obtiene la siguiente ecuación integral para el cálculo del gradiente de temperaturas ζ :

$$\frac{\zeta^2}{2} = \Gamma \int_{\tau}^1 \Phi(Y, \tau') d\tau' - \int_{\tau}^1 \zeta d\tau, \quad [63]$$

y al particularizarla en el extremo frío $\tau = 0$, resulta la siguiente expresión para el valor propio buscado (47):

$$\Gamma = \frac{\int_0^1 \zeta d\tau}{\int_0^1 \Phi(Y, \tau) d\tau}. \quad [64]$$

Así pues, la cuestión consiste, en primer lugar, en buscar aproximaciones satisfactorias de Y como función de τ para calcular la integral del denominador de [64]:

$$H \equiv \int_0^1 \Phi(Y, \tau) d\tau. \quad [65]$$

En particular, si es $L = 1$, la expresión:

$$Y = \tau \quad [66]$$

es una solución de [61] que satisface las condiciones en los límites [62].

En el caso más general $L \neq 1$, pueden utilizarse para Y aproximaciones de tipo similar a las que empleamos anteriormente o las que resultan del siguiente proceso de iteración, desarrollado por Klein.

(47) Se supone que Φ tiende a cero cuando $\tau \rightarrow 0$ con la rapidez suficiente para evitar la dificultad del extremo frío.

Sea ζ_n una aproximación de ζ obtenida por algún procedimiento. Al llevarla a [61] se obtiene una ecuación casi lineal

$$\frac{dY}{d\tau} - \frac{1}{\zeta_n} Y = L \left(1 - \frac{\zeta}{\zeta_n} \right) \quad [67]$$

para el cálculo de una aproximación Y_n de Y , si es que no se dispone ya de ella, como hemos dicho.

Al llevar este valor de Y_n a Φ se obtiene una aproximación Φ_n para la velocidad de reacción, la cual llevada a [65] proporciona una aproximación H_n para H .

Análogamente, al llevar estos valores a [64] se obtiene una aproximación de orden n para el valor propio Γ :

$$\Gamma_n = \frac{\int_0^1 \zeta_n d\tau}{H_n}, \quad [68]$$

y al introducir, finalmente, los valores de ζ_n , Φ_n y Γ_n en la ecuación integral [63] se obtiene una nueva aproximación:

$$\frac{\zeta_{n+1}^2}{2} = \Gamma_n \int_{\tau}^1 \Phi_n d\tau' - \int_{\tau}^1 \tau_n d\tau \quad [69]$$

de ζ , que permite continuar el proceso de iteración.

En la medida en que este proceso muestre una convergencia suficientemente rápida, se habrá obtenido un método de solución satisfactorio.

Los cálculos llevados a cabo por Klein y su comparación con los resultados obtenidos por otros de los procedimientos expuestos, así como con los que proporciona la integración numérica, confirma que el procedimiento resulta satisfactorio en muchos casos (48).

(48) Ver, por ejemplo, además de los trabajos citados, los siguientes, del mismo autor: *Equations of a Simple Flame Solved by Successive Approximations to the Solution of an Integral Equation*. Part. II. *Second Order Reactions*. ONR-13, septiembre 1954, y Part. III. *A Simple Ideal Non-branching Chain Reaction Flame*. SQUID, núm. 2, 1955. Ambos de la Universidad de Wisconsin.

Una cuestión a resolver todavía es la de la primera aproximación ζ_0 con que iniciar el proceso de iteración. La elección de ζ_0 se basa en el comportamiento de esta función en el plano ζ, τ . La figura VI-10 muestra un ejemplo típico y la solución consiste en elegir una expresión algebraica sencilla que preserve el comportamiento de ζ , especialmente en los extremos. Por ejemplo, en el caso que estamos considerando de una reacción de primer orden y si es $L = 1$, una posible solución es:

$$\zeta_0 = \tau (1 - \tau). \quad [10]$$

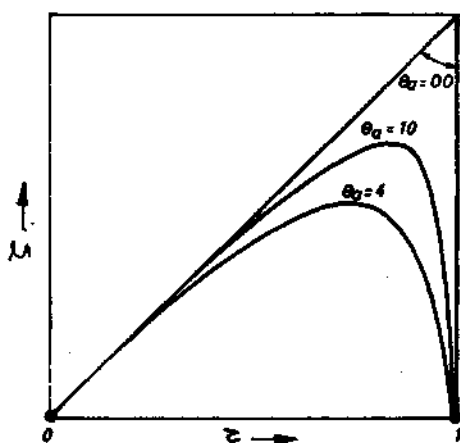


Fig. VI-10.—Distribución de la pendiente de la temperatura en función de ésta, en un caso típico.

Recientemente, Jain y Kumar (49), del Departamento de Ingeniería Aeronáutica del Instituto Científico de Bangalore, en la India, han aplicado un método análogo al de Bush y Fendell descrito anteriormente, consistente en la unión de desarrollos asintóticos en los extremos frío y caliente del par de ecuaciones [60] y [61], utilizando para el desarrollo también un parámetro que mide la energía de activación, equivalente al β de la ecuación [50], pero distinto de él

(49) V. K. JAIN y R. N. KUMAR: *Theory of Laminar Flame Propagation with Non-Normal Diffusion*, «Combustion and Flame», 1969, págs. 285-94.

porque la influencia del término de Arrhenius la aproximan mediante expresiones de la forma:

$$\Phi(Y, \tau) \simeq A (1 - Y) \tau^n, \quad n \gg 1, \quad [71]$$

las cuales fueron sugeridas por Spalding para otros propósitos, a los que aludiremos después.

El trabajo de Jain y Kumar, que interesa sobre todo como otro ejemplo de aplicación del método de desarrollos asintóticos, así como por las comparaciones que hacen los autores con otros de los procedimientos que hemos descrito, incluidos los de von Karman y el grupo del INTA, permite obtener resultados similares a los de Bush y Fendell, sin que se vea la necesidad de emplear una aproximación de la forma [71] para la velocidad de reacción, puesto que el problema es tratable, como hemos visto, mediante una expresión correcta, de la forma dada para Φ en [53] y el empleo de la aproximación anterior no introduce ninguna simplificación básica.

Ya nos hemos referido al prof. Spalding (50), del Departamento de Ingeniería Mecánica del Colegio Imperial de Ciencia y Tecnología de Londres, quien ha estudiado las soluciones de la ecuaciones [63] y [64] para velocidades de reacción $\Phi(Y, \tau)$ que sean funciones explícitas de la temperatura τ nada más, como ocurre en el caso $L = 1$, empleando para Φ , como hemos dicho, aproximaciones de forma polinómica.

El autor demuestra, por ejemplo, que la ecuación diferencial [60] tiene soluciones analíticas, entre otras, para expresiones de la forma:

$$\Phi = H \cdot \left[\frac{2n(n+1)}{n-1} \right] \tau^n (1 - \tau^{n-1}), \quad [72]$$

cuyo comportamiento es similar al de la velocidad de una reacción de primer orden, con una energía de activación que depende del valor que se elija para n .

En particular, la solución que se obtiene para el caso [72] es:

$$\Gamma = \frac{1}{H} \cdot \frac{1}{\tau_e} \left[-1 + \left(1 - \tau_e + \frac{9}{4} \tau_e^2 \right)^{1/2} \right], \quad [73]$$

(50) D. B. SPALDING: I. *Predicting the Laminar Flame Speed in Gases with Temperature-explicit Reaction Rates*, y II. *One-dimensional Laminar Flame Theo-*

siendo

$$\tau_c = \frac{1}{H} \cdot \int_0^1 \tau \cdot \Phi(\tau) d\tau \quad [74]$$

la distancia al origen del «centroide» del área abarcada por la curva [72].

Análogamente, aplicando el método de iteración de Klein, ha obtenido soluciones para velocidades de reacción de la forma.

$$\left. \begin{aligned} \Phi &= H \cdot (n+1)(n+2)(1-\tau)\tau^n, \\ y \\ \Phi &= H \cdot \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2} (1-\tau)^2 \tau^n, \end{aligned} \right\} \quad [75]$$

que corresponderían, respectivamente, a reacciones de primer y segundo orden, con valores de n que están determinados por la energía de activación de la reacción, y pueden calcularse en la forma que ha mostrado Rosen (51).

Asimismo, Spalding ha expresado el resultado en función del centroide de [75], que está dado respectivamente por:

$$\tau_c = \frac{n+1}{n+3} \quad y \quad \tau_c = \frac{n+1}{n+4}.$$

Finalmente, ha calculado el valor de $\frac{\Gamma}{H}$ en función del centroide τ_c para otras muchas formas de Φ , utilizadas por otros autores, estableciendo una correlación entre los valores de $\frac{\Gamma}{H}$ y τ_c , la cual per-

ry for Temperature-explicit Reaction Rates. «Comb. and Flame», 1957, páginas 287-307.

(51) G. ROSEN: *On the Classification of the Chemistry in Combustion Experiments*. «Jet Propulsion», 1958, págs. 839-41.

mite expresar aquel valor propio en función de τ_c , mediante una fórmula empírica de la forma:

$$\Gamma = H \cdot [0,5 - 0,6604 (1 - \tau_c) - 0,4283 (1 - \tau_c)^2], \quad [77]$$

llamada «Regla del centroide».

Según ha demostrado Spalding, esta regla permite calcular el valor de Γ con un error inferior al 1 por 100 para todas las formas normales de la velocidad de reacción, las cuales se caracterizan porque en ellas es $\tau_c > 0,6$.

La Regla del Centroide tiene la ventaja de ser de aplicación muy rápida, puesto que basta con representar gráficamente la función $\Phi(\tau)$ cuya forma característica se muestra en la figura VI-11, y hacer dos cuadraturas para obtener el valor de τ_c , dado por la expresión:

$$\tau_c = \frac{\int_0^1 \tau \cdot \Phi(\tau) \cdot d\tau}{\int_0^1 \Phi(\tau) \cdot d\tau}. \quad [78]$$

Spalding ha extendido su regla al cálculo de la influencia de número de Lewis-Semenov, sustituyendo la curva de correlación [77] que corresponde al caso $L = 1$, por un haz de curvas correspondientes a los diversos valores de L (52).

Un caso que presenta dificultades para ser tratado por el método de Spalding con número de Lewis-Semenov distinto a uno, es el de una reacción bimolecular en una mezcla estequiométrica, porque entonces el término en $(1 - Y)$ de Φ es un cero de orden dos en el extremo caliente. La solución para este caso ha sido dada por Adler (53).

La justificación matemática y las condiciones de aplicabilidad de la Regla del Centroide de Spalding ha sido analizados por J. Ad-

(52) Ver la figura 2 del primero de los trabajos citados.

(53) J. ADLER: *The Prediction of Laminar Flame Speeds in Stoichiometric Mixtures with normal Diffusion*. «Comb. and Flame», 1965, págs. 273-79.

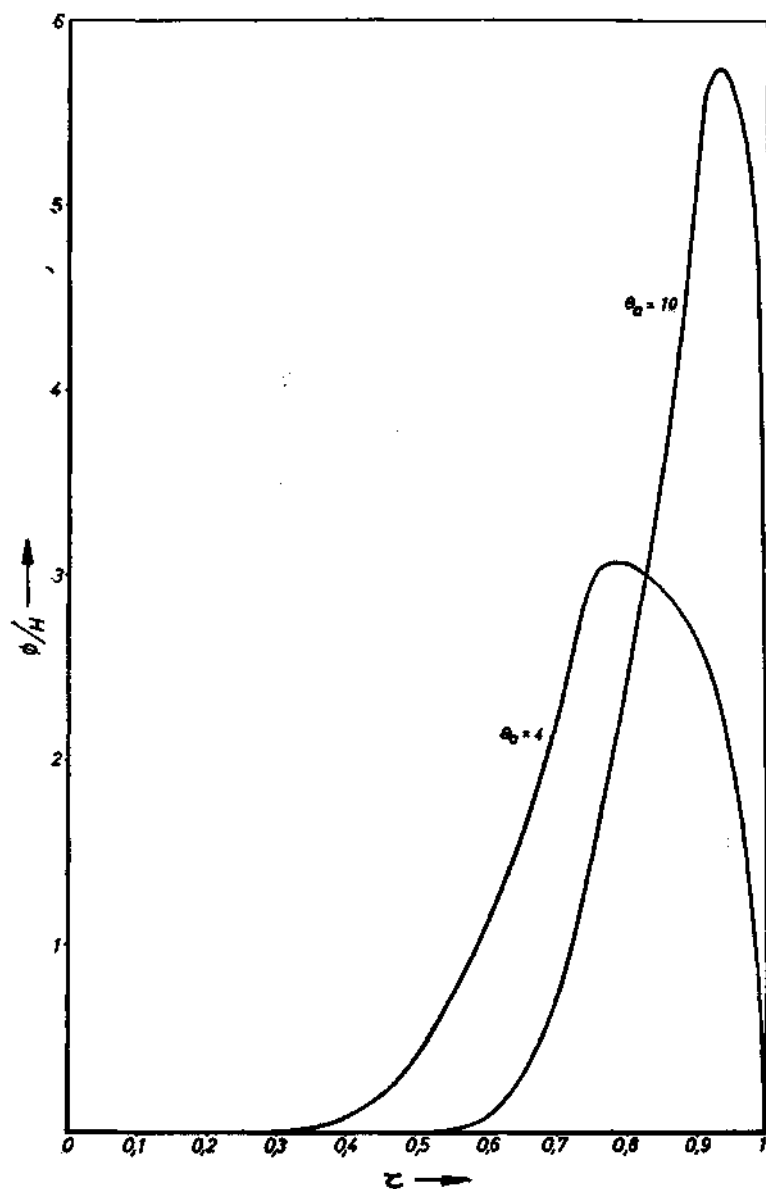


Fig. VI-11.—Representación de $\frac{\phi}{H}$ para aplicar la regla del centroide.

ler (54), que establece determinados límites para la velocidad de la llama, una vez fijado el centroide de la función de reacción, independientes de la forma de ésta, así como por Menkes (55).

Finalmente, el profesor Rosen, de la Universidad de Princeton, ha desarrollado un interesante método de solución (56) mediante la aplicación de un «principio de acción» a un funcional cuyo mínimo determina la distribución de temperaturas correcta y la velocidad de propagación de la llama.

El profesor Rosen justifica y generaliza además con su método la regla empírica del centroide de Spalding, la cual constituye una excelente aproximación al citado principio para la clase de funciones de reacción empleada por Spalding.

Asimismo, en un trabajo posterior generaliza su principio de acción al caso de reacciones con velocidad del tipo de Arrhenius (57).

b) Métodos numéricos

Además de los métodos analíticos que acabamos de describir, se han llevado a cabo numerosas integraciones numéricas del sistema de ecuaciones diferenciales de la llama, generalmente mediante el empleo de calculadoras electrónicas digitales (58), las cuales son necesarias porque el cálculo resulta muy laborioso, al tener que proceder,

(54) J. ADLER: *The Limits of the Eigenvalue of the Laminar Flame Equation in Terms of the Reaction Rate-Temperature Centroid*. «Comb. and Flames», 1959, págs. 389-397.

(55) J. MENKES: *A Note on Spalding's Centroid Formula*. «Comb. and Flames», 1958, págs. 328-330.

(56) G. ROSEN: *An Action Principle for the Laminar Flame*. «Seventh Symp. on Comb.», Butterworths Sci. Publ., Londres, 1959, págs. 339-341.

(57) G. ROSEN: *Generalization of the Laminar Flame Action Principle for Arrhenius-Type Rate Functions*. «Jour. Chem. Phys.», 1960, págs. 311-12.

(58) Un ejemplo de empleo de una calculadora analógica para la resolución de la única ecuación diferencial de la llama en el caso de una velocidad de reacción explícitamente dependiente de la temperatura, ha sido propuesto por D. B. SPALDING y D. VORTMEYER: *Application of an Iterative Network Analogue Computer and the Theory of Flame propagation*. «Comb. and Flames», 1962, págs. 35-41. Ver también, para otras aplicaciones analógicas a problemas de combustión, el trabajo de A. PERCHE, A. PÉREZ y M. LUCQUIN, de la Universidad de Lille: *Simulation by an Analog Computer of Normal Explosions and Cool Flame*. «Comb. and Flames», 1971, págs. 179-188.

como se ha dicho, por tanteos para la determinación del valor propio correspondiente a la velocidad de propagación de aquella.

Tales cálculos han sido llevados a cabo, especialmente por Zeldovich (59), Henkel, Hummel y Spaulding (60), Hirschfelder, Curtiss y Campbell (61), Friedman y Burke (62), el grupo de Combustión del INTA (63), etc.

En general, hay que partir del extremo caliente, calcular los primeros puntos mediante un análisis del comportamiento de la solución en su entorno y aplicar seguidamente alguno de los métodos clásicos de integración numérica, tales como el de Milne, Euler modificado, etc (64).

A veces se producen dificultades resultantes de la inestabilidad o sobreestabilidad de la familia de soluciones del sistema diferencial, cuestión que ha sido analizada por Curtiss y Hirschfelder (65), quienes han propuesto un procedimiento para resolverlas.

Un procedimiento de cálculo numérico por aplicación del Método de Relajación de Southwell ha sido desarrollado por Schatzki (66), del grupo de Wisconsin pero, como explica el propio autor, hace falta una gran dosis de habilidad y práctica para obtener una buena convergencia.

La índole del problema de valor propio para condiciones dadas en los límites frío y caliente, sugiere como método directo de solución el procedimiento clásico llamado del «disparo» (shooting), de uso generalizado en numerosos problemas de la Tecnología Aeroespacial,

(59) Y. B. ZELDOVICH: *Theory of Flame Propagation*. Trad. ingl. NASA. «Tech. Mem.», núm. 1.282, año 1948.

(60) M. J. HENKEL, H. HUMMEL y W. P. SPAULDING: *Theory of Propagation of Flames*. Part. III. *Numerical Integrations*. «Third Symp. on Combustion, Flame and Explosion Phenomena». The Williams and Wilkins Co. Baltimore, 1949, págs. 135-140.

(61) Ver «IV Symp. on Combustion», ya citado, págs. 190 y sigts.

(62) R. FRIEDMAN y E. BURKE: *A theoretical Model of a Gaseous combustion Wave Governed by a First Order Reaction*, «Jour. Chem. Phys.», 1953, páginas 710-14.

(63) Ver los trabajos citados anteriormente.

(64) Ver, por ejemplo, E. ISAACSON y H. B. KELLER: *Analysis of Numerical Methods*. John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1966, págs. 364 y sigts.

(65) C. F. CURTISS y J. O. HIRSCHFELDER: *Integration of Stiff Equations*.

(66) TH. F. SCHATZKI: *The Solution of the Equations for a Steady-State, Low Velocity Flame by Means of Relaxation Methods*. C. M. 858, Univ. Wisconsin, 1955.

de proyectiles dirigidos, Dinámica de Gases, etc. Por ello se trata de un problema que ha sido objeto de especial atención durante los últimos años, tanto por lo que respecta a las propiedades y condiciones de existencia de las soluciones, como en cuanto a los métodos aproximados de cálculo de las mismas, lo que permite disponer de abundante bibliografía reciente sobre la materia (67).

Una aplicación de estos métodos a la Teoría de las llamas, puede hallarse en un reciente y fecundo trabajo de Wilde (68), donde se calculan algunos de los casos reales que se describen en el epígrafe número 7.

Finalmente; un procedimiento sumamente original, como todos los suyos, desarrollado por Spalding (69) que permite sustituir el problema de condiciones en los límites, el cual resulta muy laborioso para el cálculo de valores propios, como hemos visto, por otro de condiciones iniciales, si bien en derivadas parciales. Dicho procedimiento consiste en considerar la llama estacionaria como la solución asintótica de un proceso no estacionario que se inicia en forma arbitraria y converge hacia aquélla al pasar el tiempo.

Consideremos, efectivamente, el caso de una onda de deflagración plana, pero no estacionaria. Entonces, como se comprueba fácilmente

(67) Ver, por ejemplo, la excelente monografía de H. E. KELLER: *Numerical Methods for Two-Point Boundary-Value-Problems*. Blaisdell Publ. Co. 1968, especialmente el capítulo V. Asimismo, R. E. BELLMAN y R. E. KALABA: *Quasilinearization and Nonlinear Boundary Value Problems*. Amer. Elsevier Publ. Co., 1965, y E. S. LEE: *Quasilinearization and Invariant Imbedding*. Acad. Press, 1969.

(68) K. A. WILDE: *Boundary-Value of the One-Dimensional Laminar Flame Propagation Equations*. «Comb. and Flame», 1972, págs. 43-52.

(69) D. B. SPALDING: *The Theory of Flame Phenomena with a Chain Reaction*. «Phil. Trans. Roy. Soc.», 1956, págs. 1-25. También, del mismo autor, *Theoretical Aspects of Flame Stabilization*. «Aircraft Engineering», 1953, págs. 264-68 y 276. Ver también el trabajo de ADAMS y COOK que se cita más adelante, donde se encuentra una descripción del método, su programación para el empleo de máquina calculadora y la aplicación a la llama de descomposición de la hidracina. Idem, DIXON-LEWIS, 1967, citado más adelante en relación con el estudio de la llama de hidrógeno, donde ofrece una formulación completa y una valoración práctica del método de Spalding. D. R. SPALDING, P. L. STEPHENSON y R. G. TAYLOR: *A Calculation, Procedure for the Prediction of Laminar Flame Speeds*. «Comb. and Flame», 1971, págs. 55-64. Finalmente, el reciente trabajo de L. BLEDIAN: *Computation of Time-Dependent Laminar Flame Structure*. «Comb. and Flame», 1973, págs. 5-17, que contiene además algunas aplicaciones, así como la extensión del método a las llamas cilíndricas y esféricas.

te, el sistema de ecuaciones [2] a [5] debe sustituirse por el siguiente, en donde t es el tiempo:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0; \quad [79]$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + v \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) + \frac{w}{\rho}; \quad [80]$$

Ecuación de conservación de las especies:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} + v \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho D \frac{\partial Y}{\partial x} \right) + \frac{w}{\rho}. \quad [81]$$

La primera de estas ecuaciones demuestra que existe una «función de corriente» (70) $\psi(x, t)$, que cumple las condiciones:

$$\rho = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad \rho v = - \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad [82]$$

Al sustituir en el sistema anterior la variable independiente x por ψ , lo que equivale a emplear un sistema de referencia Lagrangiano (71), aquél se transforma en el siguiente:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\lambda \rho}{C_p} \frac{\partial \tau}{\partial \psi} \right) + \frac{w}{\rho}; \quad [83]$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\rho^2 D \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right) + \frac{w}{\rho}, \quad [84]$$

(70) Introducida por L. Howarth en 1938 para la Teoría de la capa límite.

(71) Esto es así porque ψ es constante para cada partícula de gas, es decir, porque se adopta como coordenada de cada partícula la que tenía en el instante inicial.

con lo que se reduce a dos el número de ecuaciones y se ha conseguido, además, eliminar de ellas la primera derivada en la variable ψ , es decir, el término de convección de las ecuaciones originales.

Las ecuaciones [83] y [84] son las de propagación del calor por conducción, con fuentes de calor distribuidas en el espacio y cuya intensidad depende de las funciones incógnitas. Son estas fuentes precisamente las que crean la dificultad del problema con respecto a los que resuelve la teoría clásica del calor (72).

Por consiguiente, en este método el problema se reduce a la integración del sistema parabólico formado por las dos ecuaciones anteriores para el cálculo de las dos funciones τ e Y , puesto que w es función de ellas y todos los demás términos lo son de τ .

Por tratarse de un problema parabólico, las condiciones en los límites se sustituyen por condiciones iniciales, las cuales están definidas por las distribuciones de τ e Y que se postulan para el instante $t = 0$ en el espacio $-\infty < \psi < \infty$.

El método de Spalding que, además, permite tratar problemas no estacionarios como es, por ejemplo, el del encendido de una mezcla gaseosa, consiste en suponer unas distribuciones iniciales arbitrarias de τ e Y , que sean plausibles para el problema que se está analizando y en calcular su evolución con el tiempo mediante integración numérica del sistema, por alguno de los procedimientos conocidos (73).

Cuando la solución se hace estacionaria, es decir, cuando los perfiles de τ e Y avanzan a lo largo de ψ sin deformación, se ha obtenido la solución buscada, la cual proporciona la velocidad de la llama que es, naturalmente, la de avance de aquellos perfiles.

En el caso particular en que el número de Lewis-Semenov sea igual a la unidad, se comprueba fácilmente, al comparar [83] y [84], que subsiste para el caso no estacionario la validez de [66] si dicha condición se cumple en el momento inicial.

Posteriormente, Spalding (74) ha extendido su método al estudio

(72) Ver, por ejemplo, D. B. SPALDING: *Ends and Means in Flame Theory*. «Sixth Symp. on Comb.», Reinhold Publ. Co., Nueva York, 1957, págs. 120 y siguientes, donde se comenta este aspecto al referirse a la dificultad de aplicar a la Teoría de la llama los métodos matemáticos clásicos de «fuentes y sumideros».

(73) Ver, por ejemplo, la obra de ISAACSON y KELLER, ya citada, págs. 501 y siguientes.

(74) D. B. SPALDING: *Approximate Solutions of Transient and Two-dimen-*

de procesos transitorios y en dos dimensiones que guardan relación con los fenómenos de encendido, estabilidad de la llama y otros, mediante el empleo de fórmulas integrales basadas en aproximaciones del perfil de temperaturas que le permiten reducir la cuestión a la integración de una ecuación diferencial ordinaria, según la técnica introducida por von Karman y Polhausen en 1921, para el estudio de la capa límite (75).

El método de Spalding ha sido aplicado también por Zeldovich y Barenblat (76), que ha dado algunos ejemplos de interés.

El resumen que precede sobre los métodos de cálculo de las ecuaciones de la llama permite apreciar el gran esfuerzo que se ha realizado en las dos últimas décadas para poner a punto procedimientos analíticos y de integración numérica de aquéllas.

En esta exposición nos hemos referido, por sencillez, al caso de una única reacción global de primer orden. Pero es claro que tales métodos se han extendido a otros muchos casos de interés, relativos a esquemas cinéticos ideales más complejos.

Por ejemplo, los trabajos del grupo de la Universidad de Wisconsin encabezado por Hirschfelder, que son probablemente los más completos, han considerado además de las reacciones de primer y segundo orden (77), reacciones de orden cero (78), que se prestan más cómodamente al estudio de problemas especiales, tales como las llamas cilíndricas y esféricas; reacciones reversibles (79), de la forma $A \rightleftharpoons B$; reacciones en dos escalones (80), de la forma $A \rightleftharpoons B \rightarrow C$, etc.

sional Flame Phenomena: Constant-Enthalpy Flames. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1958, págs. 352-372.

(75) Ver epígrafe 10 del capítulo primero.

(76) Y. B. ZELDOVICH y G. I. BAREMBLAT, ya citados.

(77) J. O. HIRSCHFELDER y A. MCCOME: *Theory of Flames Produced by Unimolecular Reactions. I. Accurate Numerical Solution. II. Ignition Temperature and Other Types of Approximations.* «Phys. Fluids», 1959, págs. 551-574.

(78) J. O. HIRSCHFELDER y S. VAN DOMELLEN: *Propagation of Flames Supported by a Zeroeth-Order Chemical Reaction.* «Phys. Fluids», 1960, págs. 210-216.

(79) J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y D. E. CAMPBELL: «Fourth Symp. Com.», citado anteriormente, págs. 198 y sigts.

(80) C. F. CURTISS, J. O. HIRSCHFELDER y M. H. TAYLOR: *Propagation of $A \rightleftharpoons B \rightarrow C$ Flames.* «Phys. Fluids», junio 1961, págs. 771-77.

5. LLAMAS CON VARIAS REACCIONES QUÍMICAS INDEPENDIENTES

Ahora bien, todos los casos considerados hasta aquí se refieren a procesos de combustión ideales con una cinética química simplificada hasta el extremo de reducirla a una única reacción global, lo que nos ha permitido describir la composición de la mezcla en cada punto de la llama mediante una única variable de composición: el valor de la fracción másica Y del producto de combustión.

Pero ocurre, por el contrario, que la gran generalidad de los procesos químicos de la combustión más compleja, de tal modo que la correcta descripción de los mismos obliga a tomar en consideración un mayor número de especies químicas.

Para abordar este problema, la primera cuestión es la de ver cómo debe ampliarse el sistema diferencial básico [1] a [5] en el caso de varias reacciones químicas independientes, lo que vamos a hacer a continuación, pero manteniendo en los otros aspectos las mismas hipótesis de simplificación que allí se introdujeron, más aquellas complementarias que deban incorporarse con objeto de evitar una complicación excesiva, que haga intratable el problema o que carezca de justificación para el nivel actual del conocimiento físico-químico de estos procesos.

A este propósito es claro, en primer lugar, que la ecuación [4] del flujo de masa del producto de la combustión deberá sustituirse por un sistema de tantas ecuaciones análogas como especies químicas independientes participen en el proceso:

$$m \frac{d\epsilon_j}{dx} = w_j (Y_1, Y_2, \dots; T), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad [85]$$

Asimismo, la ecuación de difusión [5] deberá ser sustituida por un sistema de n ecuaciones, para las n concentraciones independientes Y_j .

El grupo de Hirschfelder ha establecido cuál es la forma correcta de tales ecuaciones (81), de las que, en el caso de más de dos especies químicas, la expresión [5] constituye tan sólo una aproximación

(81) J. O. HIRSCHFELDER, CH. F. CURTIS y R. B. BIRD: *Molecular Theory of Gases and Liquids*, ya citado, págs. 516 y sigts. y pág. 751. También TH. VON KARMAN y S. S. PENNER, 1954, ya citado.

válida bajo condiciones que se examinan en la literatura (82) y que nosotros supondremos se cumplen en lo que sigue.

Por consiguiente, la ecuación [5] deberá sustituirse por un sistema de n ecuaciones de la forma:

$$\rho D_j \frac{d Y_j}{d x} = m (Y_j - \epsilon_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad [86]$$

donde D_j es un coeficiente de difusión binaria de la especie j a través de la mezcla formada por las restantes.

Finalmente; la ecuación de la energía [3] debe sustituirse por la siguiente, cuya deducción es inmediata (83).

$$\lambda \frac{d T}{d x} = m C_p (T - T_0) + m \sum_{j=1}^n h_j^0 (\epsilon_j - \epsilon_j^0), \quad [87]$$

donde h_j^0 es la entalpía de formación de la especie j (84) y $\epsilon_j^0 = Y_j^0$ es el valor de ϵ_j en la mezcla de los gases fríos.

En particular, el mismo cambio de variable que se introdujo en el caso de una única especie química y la eliminación de x permite sustituir las dos ecuaciones [23] y [26] que allí se obtuvieron por el siguiente sistema de $2n$ ecuaciones:

$$\frac{d \epsilon_j}{d \theta} = \frac{\lambda}{m^2 C_p} \cdot \frac{w_j (Y_1, Y_2, \dots; T)}{\theta - 1 + \sum_{j=1}^n \theta_j (\epsilon_j - \epsilon_j^f)}, \quad j = 1, 2, \dots, n; \quad [88]$$

$$\frac{d Y_j}{d \theta} = L_j \frac{Y_j - \epsilon_j}{\theta - 1 + \sum_{j=1}^n \theta_j (\epsilon_j - \epsilon_j^f)}, \quad [89]$$

(82) Ver, por ejemplo, J. O. HIRSCHFELDER y C. F. CURTISS: *Theory of Propagation of Flames. Part. I. General Equations.* «Third Symp. on Comb.», The Williams and Wilkins Co., Baltimore, 1949, págs. 121-27.

(83) Ver, por ejemplo, VON KARMAN y PENNER, antes citado.

(84) O una combinación lineal de las de diversas especies, si es que ϵ_j lo es también.

en donde

$$L_j = \frac{\lambda}{\rho D_j C_p} \quad [90]$$

es el número de Lewis-Semenov correspondiente a la especie j en la mezcla; θ_j es una forma adimensional de la entalpía de formación de la especie j , dada por la expresión

$$\theta_j = \frac{h_j^0}{C_p T_f}$$

y ϵ_j^f es el valor de ϵ_j en los gases quemados.

En cuanto a las condiciones en los límites, éstas son, evidentemente, las siguientes:

$$\begin{aligned} \theta = 0: & \quad \epsilon_j = \epsilon_j^0; \quad Y_j = Y_j^0; \\ \theta = 1: & \quad \epsilon_j = \epsilon_j^f; \quad Y_j = Y_j^f, \end{aligned} \quad [91]$$

siendo de aplicación todas las consideraciones que se hicieron entonces respecto del problema del límite frío, de la redundancia de las mismas y del carácter singular de los extremos, así como respecto de la existencia de un valor propio para el parámetro m , el cual determina la velocidad de propagación de la llama (85).

En cuanto a los valores de Y_f y T_f , están determinados por la Teoría del Equilibrio Termoquímico de los productos de la combustión, que se comentó en el capítulo II.

Para algunos métodos de resolución resulta ventajoso utilizar la formulación en el plano físico equivalente a la del sistema [57]

(85) Campbell ha puesto de manifiesto que en algún caso de varias especies químicas independientes, especialmente en procesos con reacciones en cadena como las que comentaremos seguidamente, el problema puede ser de más de un valor propio. Ver, por ejemplo, E. S. CAMPBELL: *Theoretical Study of the Hydrogen-Bromine Flame*. «Sixth Symp. on Comb.», Reinhold Publ. Corp., 1957, págs. 213-22, así como F. S. CAMPBELL, F. J. HEINEN y L. M. SCHALIT: *A Theoretical Study of Some Properties of Laminar Steady State Flames as a Function of Properties of Their Chemical Components*. «Ninth Symp. on Comb.», Acad. Press, 1963, págs. 72-80. Para una discusión de este problema, ver también el comentario de F. A. WILLIAMS: *On the Erroneous Ascription of Multiple Eigenvalues to Laminar Flame Problems*. «Comb. and Flame», 1964, pág. 165.

y [58], la cual resulta de la anterior al eliminar las fracciones de flujo ϵ_j del sistema [86] y [87] mediante [85].

Utilizando la misma notación adimensional que se empleó entonces, se obtiene el siguiente sistema de $n + 1$ ecuaciones de segundo orden para el cálculo de la temperatura τ y de las n concentraciones Y_j :

$$\frac{d^2 \tau}{d \xi^2} - \frac{d \tau}{d \xi} - \frac{\lambda}{m^2 C_p} \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j}{1 - \theta_0} w_j = 0; \quad [92]$$

$$\frac{d^2 Y_j}{d \xi^2} - L_j \frac{d Y_j}{d \xi} + \frac{\lambda}{m^2 C_p} w_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad [93]$$

con las condiciones en los límites:

$$\left. \begin{aligned} \xi = -\infty: \quad \tau = 0, \quad \frac{d \tau}{d \xi} = 0; \quad Y_j = Y_j^0, \quad \frac{d Y_j}{d \xi} = 0; \\ \xi = +\infty: \quad \tau = 1, \quad \frac{d \tau}{d \xi} = 0; \quad Y_j = Y_j', \quad \frac{d Y_j}{d \xi} = 0; \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad [94]$$

Finalmente, para algunas cuestiones interesa también la expresión adimensional de las relaciones entre las ϵ_j e Y_j dadas por [86], las cuales se transforman en las siguientes:

$$\frac{d Y_j}{d \xi} = L_j (Y_j - \epsilon_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad [95]$$

Una vez establecidos, el sistema diferencial que debe emplearse en el caso en que existan varias especies químicas independientes y el conjunto de las condiciones en los límites que debe satisfacer la solución buscada, la cuestión consiste en extender a este caso los métodos de resolución anteriores que nos permitan calcular aproximadamente el valor propio m de la llama, así como las distribuciones a través de la onda de la temperatura y de las concentraciones de las diversas especies.

Al igual de lo que hemos visto para el caso de una única especie química, también aquí se han propuesto durante las dos últimas décadas aproximaciones analíticas, las cuales tienen la ventaja de

permitir estudiar la influencia de los diversos factores físico químicos en las propiedades de la llama, junto a métodos numéricos más precisos pero no resultan, en general, sumamente laboriosos.

6. LLAMAS CON REACCIONES EN CADENA

Ocurre que la mayoría de las llamas de interés práctico corresponden a reacciones en cadena, bien sea ramificada o no (86), por lo que vamos a considerar seguidamente este caso.

Entonces sucede que, junto a las especies principales (reactantes y productos) existen, como se vio, los centros activos (átomos y radicales) que propagan la cadena y cuya concentración en el interior de la llama es, en general, muy superior a la que existe no sólo en los gases frescos, donde es prácticamente nula, sino también en los productos de la combustión, donde las concentraciones de las diversas especies, incluidos los citados centros activos, están determinadas por las condiciones de equilibrio termodinámico.

Por ejemplo, la figura VI-12 muestra las distribuciones de la temperatura y de las concentraciones de las moléculas de ozono N_3 y de los átomos de oxígeno N en la llama de descomposición del ozono, que fue el primer caso real investigado por Lewis y von Elbe, en 1934, problema sobre el que volveremos más adelante.

Al tratar de extender los métodos analíticos anteriormente descritos al caso de las reacciones en cadena, la dificultad esencial estriba precisamente en el cálculo de la distribución de los centros activos en función de la temperatura, para llevar a cabo la integración de las ecuaciones, porque la distribución de las especies principales se determina más fácilmente.

En efecto; puede demostrarse que siguen siendo válidas en este caso las aproximaciones allí desarrolladas para expresar las distribuciones de las especies principales en función de la temperatura.

En particular; si los números de Lewis-Semenov de las especies principales son iguales a la unidad, se demuestra fácilmente que existe una relación lineal entre la temperatura y las concentraciones de dichas especies, que sustituye en este caso a la expresión [31].

Para ello basta, efectivamente, con multiplicar cada ecuación

(86) Ver, por ejemplo, la obra clásica de N. SEMENOFF: *Chemical Kinetics and Chain Reactions*. Clarendon Press, Oxford, 1935.

de [93] por $\frac{\theta_j}{1 - \theta_0}$ y sumar todas ellas a la ecuación de la energía [92], lo que proporciona la relación:

$$\frac{d^2 z}{d \xi^2} - \frac{d z}{d \xi} = 0, \quad [96]$$

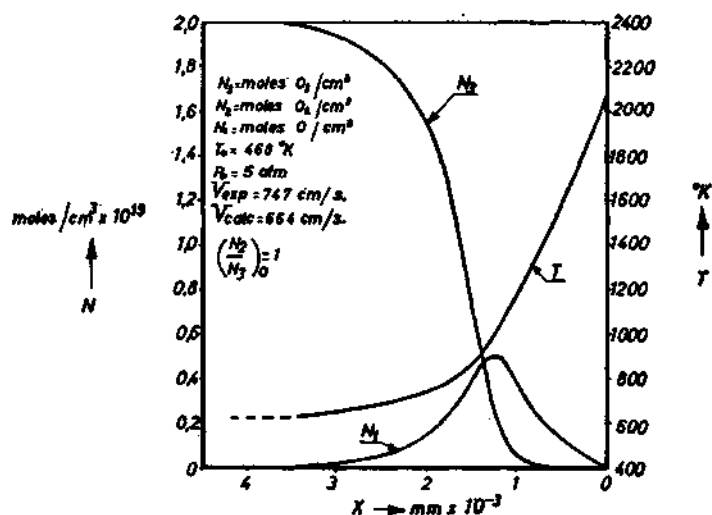


Fig. VI-12.—Estructura de la llama de descomposición del ozono, según cálculos de Lewis y von Elbe.

siendo

$$z \equiv \tau + \sum_{j=1}^n \frac{\theta_j}{1 - \theta_0} Y_j. \quad [97]$$

La solución de [96], habida cuenta de las condiciones en los límites [94] es, evidentemente:

$$Z = \text{const.},$$

expresión que proporciona la relación buscada

$$\tau + \sum_{j=1}^n \left[\frac{\theta_j}{1 - \theta_0} (Y_j - Y_j^*) \right] = 0. \quad [98]$$

Claro es que, en esta ecuación, la sumación hay que extenderla, en rigor, tanto a las especies principales como a los centros activos, pero como la concentración de éstos es siempre muy pequeña frente a las de aquéllas (reactantes o productos), la expresión [98] proporciona, en la práctica, la relación buscada entre las especies principales y ello cualquiera que sea el valor del número de Lewis-Semenov para los centros activos.

Si el de las especies principales es distinto de la unidad, la relación [98] puede sustituirse por alguna de las aproximaciones desarrolladas para ello en el caso de una única reacción global.

A título de ejemplo sencillo que ilustra muy bien la índole del problema de la combustión con reacciones en cadena, así como el orden de la aproximación que cabe esperar, empezaremos por considerar un método aproximado propuesto por Zeldovich en 1961 (87), el cual se basa en el esquema de la figura VI-13, análogo al que sirvió para el cálculo del modelo de difusión de Tanford y Pease.

En este modelo de Zeldovich se supone que la reacción tiene lugar en una pequeña zona situada en el entorno del punto $\xi = 0$ y a una temperatura muy próxima a la final $\tau = 1$. En consecuencia, para $\xi < 0$, la distribución de temperaturas es aproximadamente la correspondiente a un proceso de conducción y convección puras, sin reacción química, lo que permite determinarla por integración de la ecuación:

$$\frac{d^2 \tau}{d \xi^2} - \frac{d \tau}{d \xi} = 0, \quad [99]$$

que resulta de [92] al anular el último término, correspondiente a la reacción química. Con ello, la ecuación de la energía resulta integrable, obteniéndose la solución

$$\left. \begin{array}{ll} -\infty < \xi \leq 0: & \tau = e^{\xi}; \\ 0 \leq \xi < \infty: & \tau = 1; \end{array} \right\} \quad [100]$$

que satisface las condiciones en los límites exigidas, pero presenta una discontinuidad de la derivada en el origen, como consecuencia de suponer que la reacción se concentra en él.

(87) Y. B. ZELDOVICH: *Chain Reactions in Flames — An Approximate Theory of the Burning Velocity*. «Kinetika i Kataliz». URSS, 1961, págs. 305-318.

Con objeto de ilustrar el método comenzaremos por aplicarlo, en primer lugar, al caso ya resuelto con mayor precisión mediante los procedimientos descritos anteriormente, de una única reacción global que transforma el combustible en producto final y supondremos, como en todo lo que sigue, mientras no se diga lo contrario, que el número de Lewis-Semenov es igual a la unidad, en cuyo caso la distribución de la concentración Y del combustible está dada, como sabemos, por la expresión:

$$Y = 1 - \tau. \quad [101]$$

Si bien las ecuaciones [99] y [100] proporcionan las distribuciones de la temperatura y de la concentración de combustible a través de la llama, el problema no queda resuelto porque se desconoce su velocidad de propagación, la cual interviene en la longitud característica $l = \frac{\lambda}{m C_p}$ que se ha empleado para hacer adimensional la distancia ξ (88).

Para obtener el valor de dicha velocidad es necesario hacer intervenir, como se ha visto anteriormente, la cinética química del proceso.

En nuestro caso, supondremos que se trata de una reacción bimolecular, cuya velocidad de reacción es de la forma:

$$w = \rho^2 k Y e^{-\frac{\tau_a}{\tau}}, \quad [102]$$

donde τ_a es la temperatura adimensional de activación. Con ello, la ecuación [96] del flujo s de combustible puede expresarse en la forma:

$$\frac{ds}{d\xi} = -\Lambda (1 - \tau) e^{-\tau_a \frac{1-\tau}{\tau}}, \quad [103]$$

donde

$$\Lambda = \frac{\lambda \rho^2 k e^{-\tau_a}}{m^2 C_p} \quad [106]$$

(88) Ver [53].

es el parámetro cuyo valor propio hay que determinar para obtener la velocidad de propagación de la llama.

Puesto que se conoce, como hemos visto, la distribución de τ en función de ξ , la integración de [103] entre los extremos frío y caliente proporciona el valor de Λ buscado, el cual está dado por la expresión:

$$\Lambda = \frac{1}{I}, \quad [105]$$

siendo:

$$I = \int_{-\infty}^0 (1 - \tau) e^{-\tau} \frac{1-\tau}{\tau} d\xi = \int_0^1 (1 - \tau) e^{-\tau} \frac{1-\tau}{\tau} \frac{d\tau}{\tau} = \frac{1}{\tau_0^2}. \quad [106]$$

Por consiguiente, la velocidad de la llama resulta ser, finalmente:

$$V = \sqrt{\frac{\lambda \rho^2 k e^{-\tau_0}}{\rho_0^2 C_p \tau_0^2}}. \quad [107]$$

Al comparar esta expresión con la [41] de la solución de Zeldovich y Frank-Kamenetskii para el mismo caso, teniendo en cuenta la diferencia de notación, se comprueba que ambas fórmulas difieren solamente en el factor $\sqrt{2}$ que mide el error introducido al considerar el modelo simplificado de la figura VI-13.

Así, pues, si bien este error es numéricamente importante, vemos que el método predice correctamente, en cambio, la influencia de las variaciones de los diversos parámetros en la velocidad de la llama y proporciona una buena aproximación de su estructura.

Ilustrada así la forma de aplicación del método de Zeldovich, pasemos a continuación a considerar el caso más sencillo de una reacción en cadena no ramificada, en el que el combustible A se transforma en el producto de la combustión C a través de un centro activo B, mediante dos reacciones de la forma



De ellas, la primera es una reacción bimolecular que inicia la cadena por colisión de una molécula A de combustible con una molécula X de cualquier otra especie, originando dos radicales B, mientras que la segunda es la reacción de propagación de la cadena no ramificada (89).

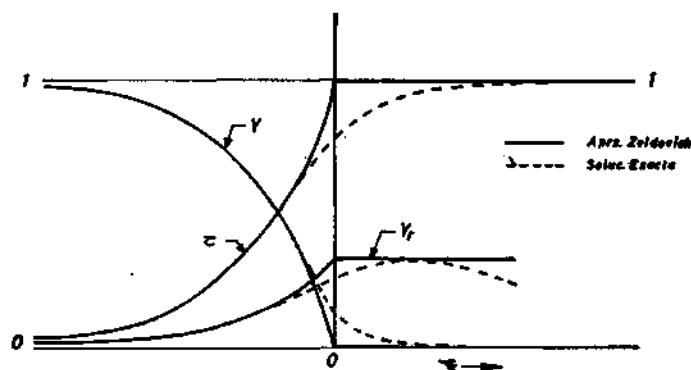


Fig. VI-13.—Modelo de Zeldovich para el cálculo de la estructura de la llama en el caso de una reacción en cadena no ramificada.

En el modelo de llama que estamos analizando, es claro que las distribuciones de la temperatura τ y de la concentración de combustible Y están dadas, como en el caso anterior, por las expresiones [100] y [101] respectivamente.

En cuanto a la distribución del radical Y_r , suponiendo que su número de Lewis-Semenov es también igual a la unidad, está dada por la expresión

$$\xi \leq 0: \quad Y_r = Y_r^m e^{\xi}, \quad [110]$$

en donde Y_r^m es la concentración de radicales en el punto de combustión $\xi = 0$, cuyo valor hay que determinar todavía.

Finalmente, los flujos del combustible ϵ y del radical ϵ_r están de-

(89) En el esquema considerado se prescinde de la reacción de destrucción de la cadena, que sería, por ejemplo, la inversa de la primera.

terminados, respectivamente, por las dos ecuaciones diferenciales (90):

$$\frac{d \epsilon}{d \xi} = - \Lambda Y Y_r e^{-\tau_b} \frac{1-\tau}{\tau}; \quad [111]$$

$$\frac{d \epsilon_r}{d \xi} = \Lambda_r Y e^{-\tau_a} \frac{1-\tau}{\tau}, \quad [112]$$

siendo

$$\left. \begin{aligned} \Lambda &= \frac{\lambda \rho^2 k_b e^{-\tau_b}}{m^2 C_p}, \\ \text{y} \\ \Lambda_r &= \frac{\lambda \rho^2 k_a e^{-\tau_a}}{m^2 C_p}, \end{aligned} \right\} \quad [113]$$

donde τ_a y τ_b son las temperaturas de activación de la primera y segunda reacciones respectivamente y k_a y k_b los correspondientes factores de frecuencia.

Al igual de lo que ocurría antes, si bien las distribuciones a través de la llama, tanto de la temperatura como de las concentraciones del combustible y del radical están determinadas por las expresiones [100], [101] y [110] respectivamente, en el presente caso, para que el problema quede resuelto es necesario determinar no sólo el valor propio de Λ (o, lo que es lo mismo, el de Λ_r , puesto que ambos son proporcionales) sino, además, la concentración máxima de radicales Y_m , lo cual, por el momento, se desconoce.

Ambos valores se obtienen también aquí mediante la integración de las dos ecuaciones de flujo [111] y [112].

En particular, la integración [112] entre $\xi = -\infty$ y $\xi = 0$, te-

(90) Debe advertirse que en [111] se ha prescindido de la influencia de la reacción [108] de iniciación de las cadenas en el consumo de combustible, porque la Cinética química enseña que su contribución es despreciable en los casos de interés práctico.

niendo presente que Y está dado por [101] y que para $\xi = 0$ es $Y_r = Y_r^* = v_r^*$, proporciona el valor de Y_r^* buscado:

$$Y_r^* = \Lambda_r \int_0^1 (1 - \tau) e^{-\tau_a \frac{1-\tau}{\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \approx \frac{\Lambda_r}{\tau_a^2}. \quad [114]$$

Conocido así el valor de Y_r^* , puede efectuarse, a su vez, la integración de [111]. Puesto que la reacción tiene lugar, según se ha dicho, en un entorno del punto $\xi = 0$, donde la concentración de radicales es muy próxima a Y_r^* , se obtiene una buena aproximación al sustituir en el integrando aquella concentración por este valor. Con ello y al expresar Y en función de τ , resulta, finalmente:

$$1 = \Lambda Y_r^* \int_0^1 (1 - \tau) e^{-\tau_a \frac{1-\tau}{\tau}} \frac{d\tau}{\tau} \approx \frac{\Lambda Y_r^*}{\tau_a^2}. \quad [115]$$

Al eliminar la concentración de radicales entre estas dos ecuaciones y habida cuenta de [113], se obtiene, finalmente, la siguiente expresión para la velocidad de propagación de la llama:

$$V = \sqrt{\frac{\lambda \rho^2}{\rho_0 C_p} \cdot \sqrt{k_a k_b} \cdot \frac{e^{-\frac{\tau_a + \tau_b}{2}}}{\tau_a \cdot \tau_b}}, \quad [116]$$

cuya comparación con [107] muestra que el resultado es análogo al de una llama con reacción única global cuya velocidad de reacción sea la media geométrica de las dos correspondientes a [108] y [109].

En cuanto a la concentración máxima de radicales, que constituye la otra incógnita del problema, se determina mediante la eliminación de $\frac{\lambda \rho^2}{m C_p}$ entre [114] y [115], con lo que resulta:

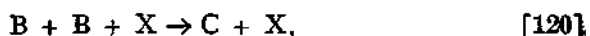
$$Y_r^* = \sqrt{\frac{k_a}{k_b} \cdot \frac{\tau_b^2}{\tau_a^2} \cdot \frac{e^{-\tau_a}}{e^{-\tau_b}}}; \quad [117]$$

es decir, que está determinada por la relación entre las velocidades de ambas reacciones químicas.

Debe advertirse que la concentración máxima así calculada para la zona de combustión es muy superior a la que resultaría del equilibrio químico en la región de los gases quemados, cuya determinación exigiría la inclusión de la reacción de destrucción de radicales. Esta es, precisamente, la diferencia fundamental con respecto a la teoría de Tanford y Pease, que se mencionó al comienzo de este capítulo.

Para terminar la exposición del método simplificado de Zeldovich, consideremos ahora una llama con reacción en cadena ramificada.

El caso de ramificación más sencillo, que es también el considerado por Zeldovich, está representado por el esquema cinético siguiente:



en el que la primera reacción es la de iniciación de la cadena; la segunda es la de ramificación y la tercera la de ruptura, la cual hay que tomar en consideración ahora, a diferencia de lo que ocurría en el caso de cadena no ramificada, porque es esta ecuación de ruptura, unida al proceso de difusión de radicales hacia las zonas fría y caliente de la llama, el mecanismo que permite controlar el proceso de ramificación.

Por el contrario, la reacción de iniciación de la cadena carece de significación en este caso, por lo que prescindiremos de ella en lo que sigue, reduciendo el esquema a las dos ecuaciones de reacción [119] y [120].

De acuerdo con lo que ocurre en muchos casos de interés práctico, supondremos que la energía de activación τ_a de la reacción de ramificación es muy elevada, mientras que la de ruptura es nula.

Con estas hipótesis, las velocidades w_a y w_b de ambas reacciones están dadas, respectivamente, por las expresiones:

$$w_a = \rho^2 k_a Y Y, e^{-\frac{\tau_a}{T}} \quad [121]$$

Y

$$w_b = \rho^3 k_b Y_r^2, \quad [122]$$

donde, como antes, Y e Y_r designan las concentraciones del combustible A y del radical B, respectivamente.

Asimismo, las velocidades de producción de ambas especies resultan ser, respectivamente:

$$\frac{d \epsilon}{d \xi} = - \frac{\lambda}{m^2 C_p} \cdot w_a \quad [123]$$

Y

$$\frac{d \epsilon_r}{d \xi} = \frac{\lambda}{m^2 C_p} (w_a - w_b). \quad [124]$$

Con estos datos y suponiendo, además, que todo el calor de la combustión se libera en la reacción [120] de recombinación de los radicales, que es la que genera el producto C de la combustión, así como que los números de Lewis-Semenov de todas las especies son iguales a la unidad, el sistema [92] [93] toma la forma:

$$\frac{d^2 \tau}{d \xi^2} - \frac{d \tau}{d \xi} - \frac{\lambda}{m^2 C_p} w_b = 0; \quad [125]$$

$$\frac{d^2 Y}{d \xi^2} - \frac{d Y}{d \xi} - \frac{\lambda}{m^2 C_p} w_a = 0; \quad [126]$$

$$\frac{d^2 Y_r}{d \xi^2} - \frac{d Y_r}{d \xi} + \frac{\lambda}{m^2 C_p} (w_a - w_b) = 0, \quad [127]$$

con las condiciones en los límites:

$$\left. \begin{aligned} \xi = -\infty: \quad \tau = 0, \quad \frac{d \tau}{d \xi} = 0; \quad Y = 1, \quad \frac{d Y}{d \xi} = 0; \quad Y_r = 0, \quad \frac{d Y_r}{d \xi} = 0. \\ \xi = +0: \quad \tau = 1, \quad \frac{d \tau}{d \xi} = 0; \quad Y = 0, \quad \frac{d Y}{d \xi} = 0; \quad Y_r = 0, \quad \frac{d Y_r}{d \xi} = 0. \end{aligned} \right\} \quad [128]$$

Además, al ser $L = L_r = 1$, es aplicable la relación [98], que permite sustituir la ecuación [125] por la expresión:

$$\tau = 1 - Y - Y_r, \quad [129]$$

con lo que el problema se reduce a la integración de las dos ecuaciones [126] y [127] que determinan respectivamente las distribuciones del combustible y del radical, puesto que la de la temperatura está dada en función de aquéllas por la expresión [129], así como a calcular el valor propio del parámetro m que permita satisfacer las condiciones en los límites [128] para Y e Y_r , ya que las de τ quedan entonces automáticamente verificadas.

Comenzando por la determinación del valor propio m , al igual de lo que se hizo en los casos anteriores éste se obtiene mediante la integración de la ecuación [123] entre los extremos de la llama, con lo que resulta, teniendo en cuenta que τ es igual a la unidad en el extremo frío y nulo en el caliente:

$$\frac{1}{\Lambda} \int_{-\infty}^{\infty} Y Y_r e^{-\tau} \frac{1-\tau}{\tau} d\xi, \quad [130]$$

siendo:

$$\Lambda = \frac{\lambda \rho^2 k_a e^{-\tau_a}}{m^2 C_p}. \quad [131]$$

Así, pues, el cálculo de la solución requiere el conocimiento de las distribuciones de Y e Y_r a través de la llama.

La figura VI-14, a) muestra el tipo de tales distribuciones que corresponde a un problema de esta naturaleza. En particular, a causa de la reacción de ramificación, la concentración de radicales alcanza en este caso un máximo muy pronunciado en un punto intermedio de la llama, que situamos en el origen de coordenadas, para una temperatura T_m menor que la temperatura T_f de los gases quemados.

Dicha figura sugiere el esquema utilizado por Zeldovich para el cálculo de aquellas distribuciones, el cual se muestra en la figura VI-14, b) y es análogo al que introdujeron Burke y Schumann (91) para el estudio de las llamas de difusión (combustión de

especies no premezcladas), al suponer que la reacción química tiene lugar en una zona de espesor nulo, a la que llegan el combustible y el oxidante procedente de uno y otro lado de la llama, mediante un proceso de difusión pura.

El el presente caso, la única reacción que se supone tiene lugar en la zona de espesor nulo es la de ramificación, lo cual da lugar a las discontinuidades en el origen que se muestra en la figura para las derivadas de las concentraciones, pero no para la de la temperatura, porque el calor liberado por la reacción de ramificación se supone nulo, como hemos dicho.

Mientras que las distribuciones de la concentración y de la temperatura son continuas, no ocurre así con las de los flujos ϵ y ϵ_r , puesto que el combustible A se consume íntegramente en el origen, lo que da lugar al salto de ϵ , que muestra la figura:

$$\xi = 0, \quad \epsilon^- - \epsilon^+ = 1. \quad [132]$$

La primera cuestión para el cálculo de las distribuciones correspondientes al modelo de la figura VI-14, b) es, pues, la de establecer las condiciones que resultan de aplicar los principios de conservación de las especies al salto a través de la discontinuidad en el origen.

La ecuación [95], escrita en forma adimensional y aplicada al combustible, da (92):

$$\frac{dY}{d\xi} = Y - \epsilon, \quad [133]$$

y puesto que Y tiene que ser continua, ya que la difusividad se supone finita, mientras que ϵ experimenta el salto [132], se obtiene la siguiente condición para el salto de la derivada:

$$\left(\frac{dY}{d\xi}\right)^- - \left(\frac{dY}{d\xi}\right)^+ = -1, \quad [134]$$

(91) S. P. BURKE y T. E. W. SCHUMANN: *Diffusion Flames*. «Ind. and Eng. Chem.», 1928, págs. 998 y sigts. Reimpreso por el Instituto de Combustión en el Primero y Segundo Simposia, 1965, pág. 2.

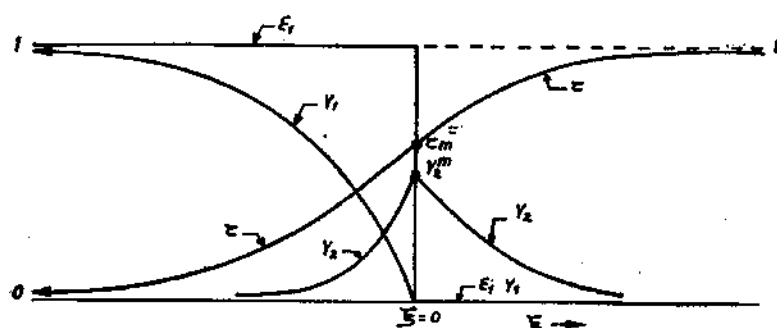
es decir,

$$\left(\frac{dY}{d\xi}\right)^- = -1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{dY}{d\xi}\right)^+ = 0, \quad [135]$$

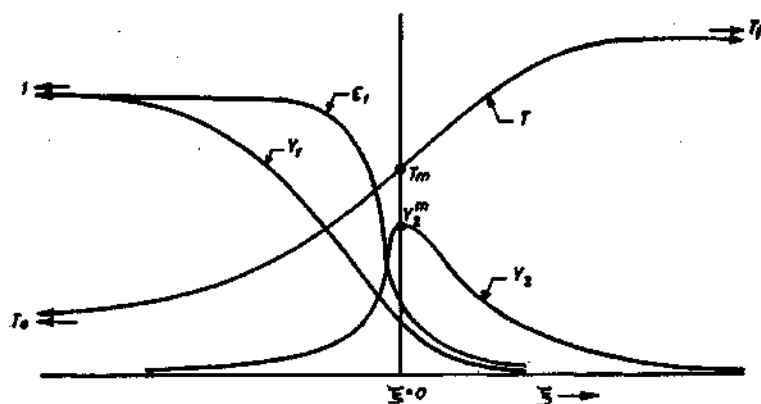
ya que para $\xi \gg 0$ es $Y \equiv 0$.

Por otra parte, al ser w_s nula fuera del origen, la ecuación [126] que determina la distribución de combustible, se reduce a la de difusión para Y , con lo que resulta:

$$\frac{d^2 Y}{d\xi^2} - \frac{dY}{d\xi} = 0, \quad [136]$$



b) Modelo de Zel'dovich



a) Distribución real

Fig. VI-14.—Estructura de una llama con cadena ramificada.

(92) Recuérdese que se ha supuesto que es $L = 1$.

cuya solución, con las condiciones en los límites [128] y [135] es:

$$-\infty < \xi < 0: \quad Y = 1 - e^{\xi}. \quad [137]$$

En cuanto a la distribución de radicales, está determinada, a su vez, por la ecuación [127], donde hay que hacer $w_s = 0$, con lo que se obtiene, al introducir además en ella la expresión de w_b dada por [122]:

$$\frac{d^2 Y_r}{d \xi^2} - \frac{d Y_r}{d \xi} - \gamma Y_r^2 = 0, \quad [138]$$

donde se ha hecho (93)

$$\gamma = \frac{\lambda \rho^2 k_b}{m^2 C_p}. \quad [139]$$

Se obtiene así una ecuación no lineal para el cálculo de la distribución de radicales, que Zeldovich linealiza sustituyendo Y_r^2 por el producto

$$Y_r^2 \simeq Y_r^m \cdot Y_r, \quad [140]$$

aproximación que está justificada porque la única región que interesa es la situada en el entorno de origen, donde Y_r debe diferir poco de su valor máximo Y_r^m .

Con ello, la solución de [138] que cumple las condiciones en los límites

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0: \quad Y_r &= Y_r^m; \\ \xi = \pm \infty: \quad Y_r &= 0, \quad \frac{d Y_r}{d \xi} = 0, \end{aligned} \right\} \quad [141]$$

es de la forma

$$Y_r = Y_r^m e^{\sigma \xi}, \quad [142]$$

(93) Excepcionalmente aquí γ no representa la relación de calores específicos, naturalmente.

donde

$$\sigma = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\gamma Y_r^m}}{2} \equiv \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1, \\ \sigma_2, \end{array} \right\} \quad [143]$$

son las raíces de la ecuación característica de la aproximación lineal de [138].

En particular, la raíz positiva corresponde a la región $\xi < 0^-$ y la negativa a la $\xi > 0^+$, con lo que resulta:

$$\left. \begin{array}{ll} -\infty < \xi < 0^-: & Y_r = Y_r^m e^{\sigma_1 \xi}; \\ 0^+ < \xi < +\infty: & Y_r = Y_r^m e^{\sigma_2 \xi}. \end{array} \right\} \quad [144]$$

El valor de la concentración máxima de radicales Y_r^m se determina calculando el salto de las derivadas de Y_r en el origen, análogamente a como se hizo para Y . Procediendo como allí, resulta:

$$\left(\frac{dY_r}{d\xi} \right)^- - \left(\frac{dY_r}{d\xi} \right)^+ = 1, \quad [145]$$

y al introducir aquí los valores que proporcionan las expresiones [143] y [144] se obtiene, finalmente:

$$Y_r^m (\sigma_1 - \sigma_2) = 1, \quad [146]$$

o bien, en virtud de [143]:

$$Y_r^m \sqrt{1 + 4\gamma Y_r^m} = 1. \quad [147]$$

En cuanto al valor de la temperatura τ_m en el punto de la máxima concentración de radicales, se obtiene de [129], teniendo presente que en él es $Y = 0$ e $Y_r = Y_r^m$, con lo que resulta:

$$\xi = 0: \quad \tau_m = 1 - Y_r^m. \quad [148]$$

Finalmente, conocidas las distribuciones de Y , Y_r y τ , las cuales están dadas respectivamente por [137], [144] y [129], la expresión [130] permite calcular el valor propio de Λ .

Puesto que, como se ha dicho, la temperatura de activación τ_m

es mucho mayor que la unidad, lo que significa que el valor de la integral está determinado por el del integrando en un entorno del origen, dentro del orden de aproximación del método está justificado introducir las siguientes aproximaciones para el cálculo de aquélla:

1.^a La concentración de radicales Y_r se sustituye por su valor máximo Y_r^m .

2.^a La concentración de combustible Y (ver figura VI-14, b) se aproxima mediante una expresión lineal de la forma:

$$Y = \beta \left(1 - \frac{\tau}{\tau_m} \right), \quad [149]$$

cuya pendiente β se calcula fácilmente en función de las de Y , Y_r y τ respecto de ξ , dadas por las respectivas distribuciones, con lo que se obtiene:

$$\beta = 2. \quad [150]$$

Al introducir estas aproximaciones en [130], teniendo presente, además, que Y es nulo para $\xi \gg 0$ y sustituir ξ por τ como variable de integración, resulta:

$$\frac{1}{\Lambda} = 4 Y_r^m e^{\tau_s - \tau'_s} \int_0^1 (1 - \tau) e^{-\tau'_s \frac{1 - \tau}{\tau}} d\tau \simeq \frac{4 Y_r^m e^{\tau_s - \tau'_s}}{\tau'_s{}^2}, \quad [151]$$

donde se ha hecho:

$$\tau'_s = \frac{\tau_s}{\tau_m}. \quad [152]$$

Por consiguiente, el valor de la velocidad V de propagación de la llama está dado, finalmente, por la expresión:

$$V = \sqrt{\frac{4 \lambda \rho^2 k_s e^{-\tau'_s} Y_r^m}{\rho_0^2 C_p \tau'_s{}^2}}. \quad [153]$$

En ella, además de las constantes termodinámicas de la mezcla

y de la reacción de ramificación, figuran la concentración máxima de radicales, dada por la expresión [147], donde también intervienen la velocidad de propagación V y, a través de τ'_s , la temperatura τ_m , la cual está dada por [148], en función de Y_r^m .

Por consiguiente, el problema queda completamente resuelto, dentro de la aproximación supuesta por Zeldovich.

En particular, como muestra el autor, el comportamiento de la llama con respecto a las variaciones de los parámetros termodinámicos y químicos, corresponde al que se observa experimentalmente en los procesos de esta naturaleza.

Para mejorar la aproximación de Zeldovich sería necesario sustituir la discontinuidad en el origen que reemplaza a la reacción de ramificación en el cálculo de las distribuciones de concentración por un estudio más detallado del comportamiento de aquéllas en el entorno del punto $\xi = 0$, como se ha hecho, por ejemplo, para las llamas de difusión (94). Esta investigación ha sido llevada a cabo por el profesor Liñán (95) y los resultados de su estudio serán publicados próximamente.

Hemos visto que en las llamas de mezclas combustible con reacciones en cadena, el problema para la integración de las ecuaciones se plantea al calcular la distribución de los radicales que aparecen como productos intermedios.

Ello se debe a que la concentración en el seno de la llama es, en general, muy superior a la que existe en los extremos frío y caliente de la misma y a que su distribución está determinada básicamente por las ecuaciones de reacción, a diferencia de lo que ocurre con las especies principales, para las que aquélla depende sobre todo de los efectos de la difusión.

Ello da lugar a que, mientras que la distribución de las especies principales se puede calcular aproximadamente sin necesidad de llegar a la integración de las ecuaciones de la llama, las de los radicales sólo pueden obtenerse a través de dicha integración.

Un problema similar se presenta en el caso de los reactores químicos homogéneos estudiados en la cinética química clásica, donde la

(94) A. LIÑÁN: *On the Internal Structure of Laminar Diffusion Flames*. INTA, Madrid, 1961. Idem INTA, «Tech. Rept.», FM 63-2, 1963.

(95) A. LIÑÁN. *A Theoretical Analysis of Premixed Flame Propagation on Exothermal Chain Reaction*. A publicar.

dificultad estriba también en el cálculo de las concentraciones de las especies intermedias que propagan las cadenas.

Para tales casos, Bodenstein propuso en 1913 un método (96), llamado habitualmente «hipótesis del estado estacionario», consistente en suponer que las concentraciones de los radicales están determinadas por las condiciones de equilibrio que resultan al anular sus ecuaciones de reacción y demostró que dicha hipótesis podrá aplicarse en aquellos casos en que las velocidades de reacción de los radicales son muy grandes con respecto a las de las especies principales.

La aplicación de este principio para cada radical r que cumpla la condición de estado estacionario se expresa en la forma:

$$w_r(Y_1, Y_2, \dots, Y_n; T) = 0, \quad [154]$$

siendo n el número de especies independientes.

La expresión anterior permite expresar la concentración Y_r del radical r en función de las $(n - 1)$ de las restantes especies, lo que introduce una importante simplificación en el problema.

En particular, si todos los radicales presentes satisfacen la condición de estado estacionario, sus concentraciones se expresan en función de las de las especies principales y el problema se reduce al de reacciones globales previamente tratado y para el que se dispone, como hemos visto, de métodos de solución satisfactorios, tanto analíticos como numéricos.

Una importante contradicción al estudio de las llamas con reacciones en cadena se debe a von Karman y Penner (97), quienes, en 1952, propusieron la extensión de la «hipótesis de estado estacionario» al estudio de la teoría de las llamas, aplicándola con resultados satisfactorios a la llama de descomposición del ozono, que había sido estudiada previamente por Hirschfelder y sus colaboradores, mediante integración numérica, lo que proporcionaba una posibilidad de comparación.

Esta comparación mostró una coincidencia completa para la distribución de átomos de oxígeno, excepto en un intervalo de temperaturas muy pequeño del extremo caliente de la llama, sin influencia

(96) Ver, por ejemplo, S. S. PENNER: *Chemistry Problems in Jet Propulsion*. Pergamon Press, Londres, 1957, págs. 224 y sigts., o bien F. A. WILLIAMS: *Combustion Theory*, ya citado, págs. 369 y sigts.

(97) Ver TH. VON KARMAN y S. S. PENNER, ya citado.

apreciable en el resto, confirmando la aplicabilidad de la hipótesis, al menos para este caso.

Posteriormente, el método se aplicó a otros varios, como el de la llama de descomposición de la hidracina y el de la de formación del ácido bromhídrico (98), comprobándose que mientras que aquella hipótesis aparece plenamente justificada para ciertos radicales, no lo está para otros, si bien, en general, proporciona valores aceptables para la velocidad de propagación de la llama.

Las discrepancias entre las distribuciones reales y las que proporciona la mencionada hipótesis se han atribuido a dos causas: una es, evidentemente, la influencia de la difusión de los mismos; la otra, el que su «tiempo de residencia» en el interior de la llama sea insuficiente para alcanzar la condición de equilibrio que corresponde al estado estacionario (99).

Por todo ello, las condiciones de aplicabilidad de la hipótesis fueron analizadas por Giddings y Hirschfelder (100) para varios modelos de cinética química correspondientes a reacciones en cadena ramificada o no, típicas de las llamas, comparando los resultados de la hipótesis con los de la integración numérica y proponiendo un criterio de decisión sobre bases físicas pero sin justificación matemática, en función del valor de un parámetro, mal definido, que es la relación entre un «tiempo de relajación», en esencia el tiempo para alcanzar el estado estacionario, y un tiempo característico de la reacción de las especies principales.

Por su parte, el grupo de Combustión del INTA abordó el problema sobre bases puramente matemáticas (101), obteniéndose un criterio, completamente general y que permite, además, desarrollar un método de aproximaciones sucesivas a partir de la solución del estado estacionario.

(98) Ver las referencias que se citan más adelante.

(99) S. W. BENSON: *The Induction Period in Chain Reactions*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1952, págs. 1005-12.

(100) J. C. GIDDINGS y J. O. HIRSCHFELDER: *Flame and the Kinetics of Chain-Branching Reactions*. «*Sixth Symposium on Combustion*». Reinhold Publishing Corp., 1957, págs. 109 y sigts. También E. S. CAMPBELL, J. O. HIRSCHFELDER y L. M. SCHALIT: *Deviation from Kinetic Steady-State Approximation in a Free Radical Flame*. «*Seventh Symposium on Combustion*», 1959, págs. 332-38.

(101) G. MILLÁN e I. DA RIVA: *Distribution of Radicals in Laminar Flames*. «*Eighth Symposium on Combustion*». The Williams and Wilkins Co. Baltimore, 1962, págs. 398-411. También, WILLIAMS, ya citado, págs. 125 y sigts.

Esta solución resulta ser, entonces, la primera aproximación en el desarrollo de las ecuaciones de la llama en serie de potencias de un parámetro Ω que combina los efectos de la reacción y difusión de los radicales, el cual se identifica físicamente como el primer número de Damköhler:

$$\Omega \equiv L \frac{\lambda b_m}{m^2 C_p}, \quad [155]$$

donde b_m es un coeficiente proporcional al factor de frecuencia de la reacción de los radicales, que definiremos después con mayor precisión, y todas las demás cantidades tienen los significados definidos con anterioridad.

A continuación exponemos brevemente los fundamentos del método para el caso en que haya un único radical, además de las especies principales, siguiendo las líneas del trabajo citado.

Llamando ϵ e Y , respectivamente, al flujo y concentración del radical y puesto que los flujos y las concentraciones de las demás especies pueden expresarse en función de la temperatura, como hemos visto, la aplicación de las ecuaciones [88] y [89] al caso, permite escribirlas en la forma:

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = \frac{\lambda}{m^2 C_p} \cdot \frac{w(\theta, Y)}{f(\theta)}, \quad [156]$$

$$\frac{dY}{d\theta} = L \frac{Y - \epsilon}{f(\theta)}, \quad [157]$$

donde se ha hecho, por brevedad:

$$f(\theta) \equiv \theta - 1 + \sum_{j=1}^n \theta_j (\epsilon_j - \epsilon_j'). \quad [158]$$

La eliminación de ϵ entre estas dos ecuaciones proporciona la siguiente ecuación de segundo orden para el cálculo de la concentración Y del radical que se trata de determinar:

$$f''(\theta) \frac{d^2 Y}{d\theta^2} + f(\theta) [f'(\theta) - L] \frac{dY}{d\theta} = -L \frac{\lambda}{m^2 C_p} w(\theta, Y). \quad [159]$$

Supongamos, por ejemplo, que la reacción de ruptura de la cadena es de primer orden en el radical (tipo de Semenov). Entonces la velocidad de reacción será de la forma:

$$v(\theta, Y) = a(\theta) - b(\theta) \cdot Y \equiv b_m \beta(\theta) [\alpha(\theta) - Y] \quad [160]$$

siendo b_m el valor máximo de $b(\theta)$ y

$$\left. \begin{aligned} \beta(\theta) &= \frac{b(\theta)}{b_m}, \\ \alpha(\theta) &= \frac{a(\theta)}{b(\theta)}. \end{aligned} \right\} \quad [161]$$

Con ello, la ecuación [159] toma la forma:

$$D(Y) = -\Omega \beta(\theta) [\alpha(\theta) - Y], \quad [162]$$

donde $D(Y)$ es el operador definido por el primer miembro de dicha ecuación y Ω es el parámetro que se introdujo en [155], el cual mide la relación entre el tiempo de residencia de la llama, dado a su vez por la relación entre la longitud característica $l = \frac{\lambda}{m C_p}$ previamente definida y la velocidad v de propagación de aquella, y el tiempo químico de reacción del radical, el cual es proporcional a $\frac{\rho}{b_m}$.

Así pues, el problema consiste en integrar la ecuación [162], con la doble condición de que Y tome en los extremos θ_0 y 1 del intervalo los respectivos valores de las concentraciones de equilibrio; por ejemplo, $Y = 0$ para $\theta = \theta_0$ y para $\theta = 1$.

Ahora bien; la hipótesis de estado estacionario consiste en suponer que el segundo miembro de [162] es nulo:

$$\alpha(\theta) - Y \simeq 0, \quad [163]$$

condición cuyo cumplimiento exige, a su vez, que sea

$$\frac{D(Y)}{\Omega \beta(\theta)} \ll 1, \quad [164]$$

lo que ocurrirá si el parámetro Ω es suficientemente grande. Por consiguiente, la condición para la validez del estado estacionario es que sea $\Omega \gg 1$.

Además, si se cumple esta condición, la solución $Y(\theta)$ de [162] puede desarrollarse por el método de Poincaré en serie de potencias de Ω^{-1} , de la forma:

$$Y(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\Omega^j} Y_j(\theta), \quad [165]$$

con lo que se obtiene:

$$Y_0(\theta) = \alpha(\theta); \quad [166]$$

$$Y_j(\theta) = \frac{f^2(\theta)}{\beta(\theta)} \frac{d^2 Y_{j-1}(\theta)}{d\theta^2} + \frac{f(\theta)}{\beta(\theta)} [f'(\theta) - L] \frac{d Y_{j-1}(\theta)}{d\theta} \quad [167]$$

es decir, la aproximación de orden cero corresponde al estado estacionario y la Y^j de orden j se expresa en función de las de órdenes inferiores mediante la ley de recurrencia.

$$Y^j(\theta) = Y^{j-1}(\theta) + \frac{1}{\Omega^j} Y_j(\theta). \quad [168]$$

Con objeto de analizar la convergencia del método, en el trabajo citado se comparan los resultados de su aplicación con las soluciones exactas obtenidas para un modelo de llama con fórmulas de reacción de tipo similar a las empleadas por Spalding, las cuales permiten una integración exacta de la ecuación [162].

La figura VI-15, tomada del citado trabajo, muestra el resultado del empleo de los dos primeros términos de la aproximación, para diversos valores de Ω , en un caso típico.

En ella, el valor $\Omega = \infty$ corresponde, evidentemente, al estado estacionario. Como puede verse, ya para $\Omega = 100$ la aproximación es muy satisfactoria, mientras que para $\Omega = 10$ exigiría el empleo de un mayor número de términos.

Con objeto de tener idea del orden de magnitud de Ω que corres-

ponde a casos prácticos, a continuación se dan sus valores para los radicales de algunas de las llamas que han sido investigadas.

L l a m a	Ω	Validez del estado estacionario
Descomposición de la hidracina	0,793	No
Combustión del hidrógeno	4.500	Si
Descomposición del ozono.....	1.800	Si
Formación de ácido bromhídrico	radical H	Si
	radical Br.....	No

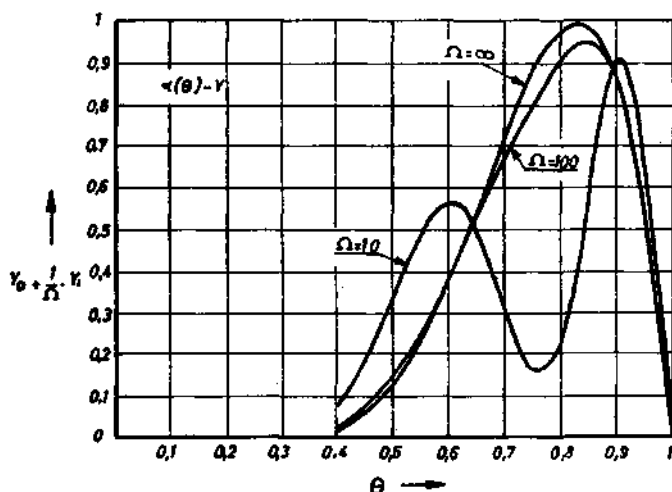


Fig. VI-15.—Distribución de radicales para diversos valores del parámetro Ω en un caso típico.

El hecho de que no siempre sea aplicable la hipótesis de estado estacionario para determinar la concentración de radicales, ha obligado a generalizar para las reacciones en cadena los métodos de integración numérica y de aproximación analítica desarrollados previamente para el caso de las reacciones globales.

Por lo que respecta a la extensión de los métodos numéricos de cálculo del grupo de Hirschfelder, Campbell (102) ha mostrado que al aplicarlos a reacciones en cadena pueden desarrollarse inestabili-

(102) E. S. CAMPBELL: *Theoretical Study of the Hydrogen-Bromine Flame*. «Sixth Symposium on Combustion», ya citado, págs. 213-222.

dades matemáticas del tipo estudiados por Fox y Mitchell (103), cuya eliminación ha llevado a la puesta a punto de un método propuesto por aquél (104).

También el método de la ecuación integral de Klein, anteriormente descrito, ha sido extendido por su autor y aplicado por Giddings y Hirschfelder (105) al estudio de las reacciones en cadena, en cuyo caso las ecuaciones [55] y [56] tienen que complementarse con dos ecuaciones más para el cálculo de Y , y ϵ , por cada radical de la mezcla.

Asimismo, el método de Spalding, que trata la llama estacionaria como solución asintótica de un régimen no estacionario, ha sido generalizado por su autor (106) y aplicado por él y por Zeldovich y Barenblatt (107), así como por Dixon-Lewis (108) al cálculo de esquemas con reacciones en cadena. La extensión consiste, naturalmente en incorporar por cada radical una ecuación más del tipo [84], con una distribución plausible para el mismo en el instante inicial.

Por otra parte, también se han generalizado algunos de los métodos analíticos anteriormente descritos, mediante el empleo de expresiones aproximadas para las distribuciones de las concentraciones de radicales que permitan integrar las ecuaciones de la llama.

Entre tales procedimientos, hay que señalar especialmente el que ha desarrollado el profesor Lovachev, del Instituto de Físicoquímica

(103) L. FOX y A. R. MITCHELL: *Boundary-Value Technique for the Numerical Solution of Initial-Value Problems in Ordinary Differential Equations*. «Quart. Jour. Mech. and Appl. Math.», 1957, págs. 232-243.

(104) E. S. CAMPBELL: *Solution of the Hydrodynamic Equations for Laminar, Time-Independent Flames with Arbitrarily Large Deviations from the Kinetic Steady-State*. «Comb. and Flame», 1965, págs. 43-52.

(105) J. C. GIDDINGS y J. O. HIRSCHFELDER: *Flame Properties and the Kinetics of Chain-Branching Reactions*. «Sixth Symp. on Com.», ya citado, páginas 199-212. También, de los mismos autores: *The Properties of Flames Supported by Chain Branching Reactions*, donde consideran el caso de una reacción de ruptura de la cadena de primer orden (tipo Semenov), representada por el esquema $A \rightarrow 2B$; $B \rightarrow C$; $A + C$; $A + B \rightarrow 2B + C$. «Jour. Phys. Chem.», 1967, págs. 738-43.

(106) D. B. SPALDING, 1956, antes citado; también J. ADLER y D. B. SPALDING: *Flame Propagation by Non-Branching Chain Reactions*. «Comb. and Flame», 1961, págs. 123-34.

(107) ZELDOVICH y BARENBLATT, ya citados.

(108) G. DIXON-LEWIS: *Flame Structure and Flame Reaction Kinetics. I. Solutions of Conservation Equations and Application to Rich Hydrogen-Oxygen Flames*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1967, págs. 495-513.

de la Academia de Ciencias de Moscú (109), quien propone un método semiempírico de integración de las ecuaciones que resultan de la generalización de [60] y [61] al caso de reacciones en cadena, en el que utiliza aproximaciones parabólicas para las distribuciones de radicales.

$$Y_r = Y_r^0 + \alpha \tau + \beta \tau^2, \quad [169]$$

cuyos coeficientes determina por condiciones de compatibilidad al introducir estas expresiones en las correspondientes ecuaciones de difusión, las cuales son del tipo [61].

Asimismo, el grupo de Combustión del INTA ha generalizado el método de von Karmann, aplicándolo especialmente a la llama de descomposición de la hidracina (110), mediante un procedimiento cuyo fundamento se expone a continuación para el caso de un único radical.

En tal caso, la composición de la mezcla queda descrita mediante dos únicas especies, el radical (ϵ , Y_r) y el combustible (ϵ , Y) y el sistema general [88], [89] se reduce a las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\frac{d\epsilon}{d\theta} = - \frac{\lambda}{m^2 C_p} \cdot \frac{w(Y, Y_r, \theta)}{\theta - 1 + (1 - \theta_0)\epsilon}; \quad [170]$$

$$\frac{d\epsilon_r}{d\theta} = - \frac{\lambda}{m^2 C_p} \cdot \frac{w_r(Y, Y_r, \theta)}{\theta - 1 + (1 - \theta_0)\epsilon}; \quad [171]$$

$$\frac{dY}{d\theta} = L \cdot \frac{Y - \epsilon}{\theta - 1 + (1 - \theta_0)\epsilon}; \quad [172]$$

$$\frac{dY_r}{d\theta} = L_r \cdot \frac{Y_r - \epsilon_r}{\theta - 1 + (1 - \theta_0)\epsilon}, \quad [173]$$

(109) L. A. LOVACHEV: *The Theory of Flame Propagation in Branched and Unbranched Chain Systems*. «Comb. and Flames», 1960, págs. 357-67; *On the Theory of Laminar Flame Propagation*. «Comb. and Flames», 1962, págs. 129-32; *The Theory of Flame Propagation in Systems Involving Branched Chain Reactions y Dependence of Laminar Flame Properties on the Mechanism of Chain Reaction*. «Eight Symp. on Combustion», ya citado, págs. 411-26.

(110) G. MILLÁN y S. SANZ: *Hydrazine Decomposition Flame*. INTA AF 61 (514)-734 C. Madrid, 1956. También G. MILLÁN y J. M. SENDAGORTA: *Hydrazine Decomposition Flame*. INTA AF, 61 (514) 997. Madrid, 1957. Un resumen del método puede encontrarse también en el trabajo de ADLER y SPALDING, anteriormente citado.

con las condiciones en los límites:

$$\left. \begin{aligned} \theta = \theta_0: \quad \epsilon = Y = 1; \quad \epsilon_r = Y_r = 0; \\ \theta = 1: \quad \epsilon = Y = 0; \quad \epsilon_r = Y_r = Y_r^{\infty}. \end{aligned} \right\} \quad [174]$$

Al aplicar ahora el método de Karman para la determinación del valor propio m mediante la integración de la ecuación [170] entre los extremos del intervalo, como se hizo en [33] para el caso de una reacción global, se obtiene:

$$\frac{\lambda}{m^2 C_p} = \frac{\frac{1 - \theta_0}{2} - \int_0^1 (1 - \theta) d\epsilon}{\int_{\theta_0}^1 w(Y, Y_r, \theta) d\theta} \quad [175]$$

Por consiguiente, el problema consiste en obtener, además de las aproximaciones de ϵ e Y que allí se buscaban, una aproximación satisfactoria para Y_r .

Con objeto de abreviar los cálculos, supondremos en lo que sigue que, tanto L como L_r son iguales a la unidad, porque la consideración de casos más generales no introduce problemas especiales después de lo que vimos para las reacciones globales y de lo que vamos a ver para los radicales.

Por otra parte, hay que advertir que si bien al aumentar el coeficiente de difusión de los radicales, es decir, al disminuir L_r , tiende a decrecer la velocidad de la llama (contrariamente a lo que ocurre con las especies principales, y ello porque la difusión reduce la concentración máxima de radicales en la zona de temperaturas elevadas que es la más sensible a sus efectos a causa del factor de Arrhenius) la influencia de la variación de L_r en la velocidad de la llama es mucho menor que la que tiene el número de Lewis-Semenov para las especies principales.

Al ser $L = 1$, el valor de Y en función de la temperatura está determinado, como vimos, por la expresión:

$$Y = \frac{1 - \theta}{1 - \theta_0} \quad [176]$$

En cuanto al de ϵ , la forma de su perfil que vimos en el caso de las reacciones globales, permite aproximarlos mediante una expresión lineal del tipo:

$$\epsilon = \alpha (1 - \theta), \quad [177]$$

cuyo coeficiente α habrá que determinar por el comportamiento de la ecuación [170] en el entorno del punto crítico $\theta = 1$, como allí se hacía.

Debe señalarse, no obstante, que si se desea, puede mejorarse esta aproximación mediante expresiones más satisfactorias como son, por ejemplo, la que realizan los propios autores en el trabajo citado o la de Sendagorda.

Resta, pues, obtener una aproximación conveniente de Y_r , la cual ha de derivarse del análisis de las ecuaciones [171] y [173].

Para ello, la figura VI-16 muestra una distribución esquemática de radicales correspondiente, por ejemplo, al caso de una reacción en cadena no ramificada como la representada por las dos ecuaciones [108] y [109], donde se ha prescindido de la ecuación de ruptura de la cadena, lo que hace que la concentración máxima Y_r^m , la cual tiene que ser igual a ϵ_r^m en virtud de [174], se dé en el extremo caliente.

Dicha figura sugiere aproximar el flujo de radicales ϵ_r mediante una recta de la forma:

$$\epsilon_r = Y_r^m - \beta (1 - \theta), \quad [178]$$

cuya pendiente β se determinará, como se hizo para α con el flujo ϵ de combustible, mediante el comportamiento de la ecuación [171] en el entorno del punto crítico $\theta = 1$.

En cuanto a la concentración Y_r del radical, el carácter del punto crítico $\theta = 1$ permite aproximarla en el tramo $\theta, < \theta < 1$ próximo a aquél mediante una recta de la forma:

$$Y_r = Y_r^m - \gamma_1 (1 - \theta), \quad [179]$$

donde γ_1 se determina por el mismo procedimiento de α y β .

Por otra parte, en el entorno del extremo frío $\theta \simeq \theta_0$, donde ϵ_r es nulo y ϵ es igual a la unidad, la ecuación diferencial [173] es la

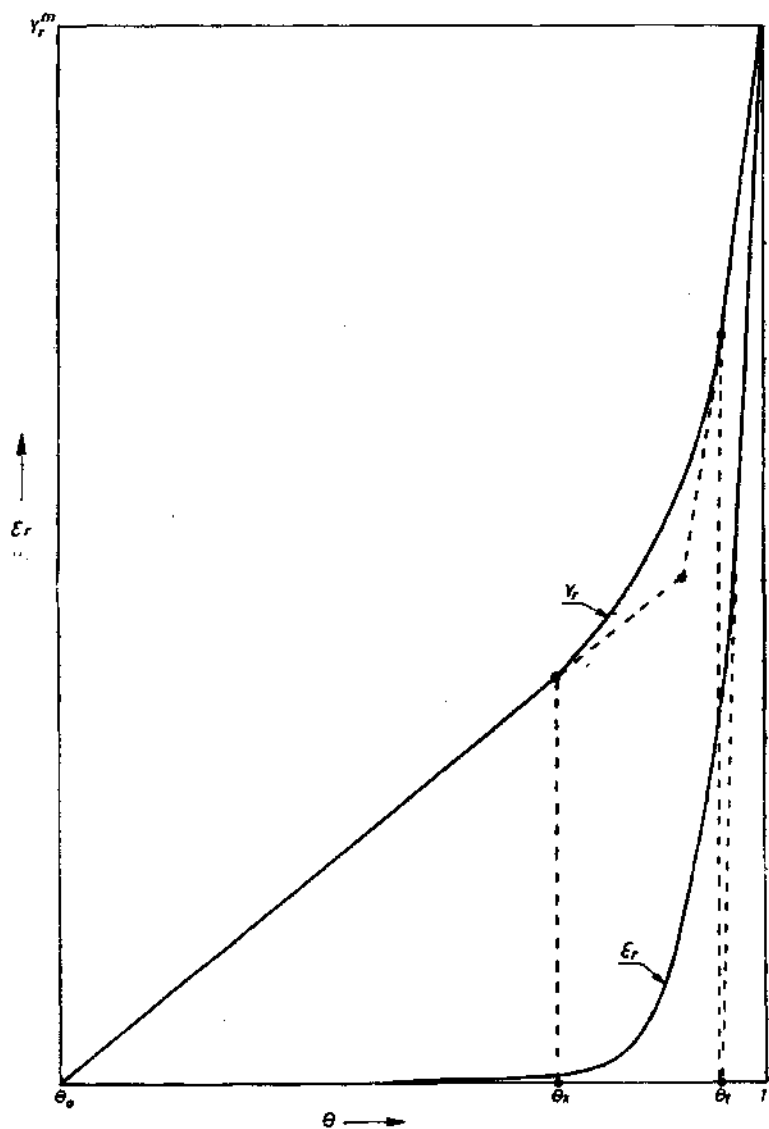


Fig. VI-16.—Esquema de la distribución de radicales en una llama con reacción en cadena y aproximaciones utilizadas para la integración de las ecuaciones.

de difusión pura, la cual, para $L_r = 1$, tiene una solución de la forma:

$$Y_r = \gamma_2 (\theta - \theta_0), \quad [180]$$

que se utilizará como aproximación en el tramo $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_x$.

Pero, a diferencia de lo que ocurre con γ_1 , α o β , la pendiente γ_2 no queda determinada, en cambio, por el comportamiento de la ecuación diferencial en el entorno del origen $\theta \simeq \theta_0$.

Finalmente, en el tramo intermedio $\theta_x \leq \theta \leq \theta_t$ es $\epsilon_r = 0$ mientras que ϵ es distinto de cero. Empleando para éste la aproximación lineal [177], la ecuación diferencial [173] que determina Y_r se reduce a la siguiente:

$$\frac{d Y_r}{d \theta} = \frac{-Y_r}{[1 - (1 - \theta_0) \alpha] (1 - \theta)}, \quad [181]$$

cuya solución es de la forma:

$$Y_r = Y_r^t \left(\frac{1 - \theta_t}{1 - \theta_0} \right)^{\frac{1}{(1 - \theta_0)^{\alpha - 1}}}, \quad [182]$$

siendo Y_r^t el valor de Y_r , en el punto $\theta = \theta_t$ de unión de los tramos central y superior.

Así, pues, Y_r está determinada en la totalidad del intervalo de temperaturas $\theta_0 \leq \theta \leq 1$ por las tres aproximaciones [179], [180] y [182], las cuales dependen de los ocho parámetros α , β , γ_1 , γ_2 , θ_0 , θ_x , Y_r^m e Y_r^t , cuyos valores es necesario calcular.

De ellos, α , β y γ_1 se obtienen, como hemos visto, mediante el comportamiento de las ecuaciones [170], [171] y [173], en el entorno del extremo caliente.

Conocidos β y γ_1 , las expresiones [178] y [179] determinan θ_t e Y_r^t en función de Y_r^m :

$$\theta_t = 1 - \frac{Y_r^m}{\beta}, \quad [183]$$

$$Y_r^t = Y_r^m - \gamma_1 (1 - \theta_t). \quad [184]$$

Análogamente, conocidos α , θ_i e Y_r^i , los valores de θ_x y γ_2 se determinan mediante la condición de que las dos aproximaciones [180] y [182] sean tangentes en el punto θ_x de intersección.

Finalmente, Y_r^* se obtiene por integración de la ecuación [171] entre $\theta = \theta_i$ y $\theta = 1$, empleando para Y_r y ϵ las aproximaciones [179] y [180], respectivamente, puesto que se está operando en el tramo próximo al extremo caliente.

Con ello queda determinada Y_r en función de θ para todo el intervalo de temperaturas y puede calcularse la integral del denominador de [175] que resuelve el problema.

Debe advertirse que dicha integral, al igual de lo que ocurre con

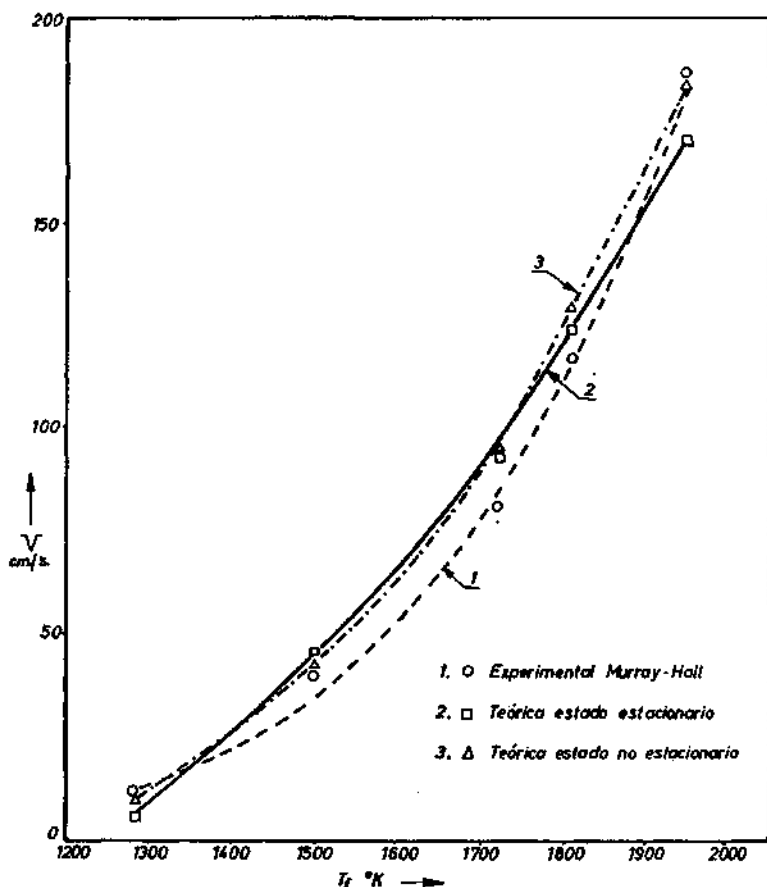


Fig. VI-17.—Velocidad de la llama de descomposición de la hidracina. Comparación entre resultados teóricos y experimentales.

la del numerador, contiene el valor propio buscado m , puesto que los parámetros anteriores se expresan en función de él, por lo que el cálculo de m , es decir, de la velocidad V de propagación de la llama, hay que efectuarlo por aproximaciones sucesivas, empleando métodos de iteración.

La figura VI-17, tomada del trabajo que estamos comentando, muestra la comparación entre los resultados experimentales y los que se obtienen al aplicar la hipótesis de estado estacionario así como el método propuesto, para el caso de la llama de descomposición de la hidracina.

En ella se ve que la aproximación con que permiten calcular el valor de la velocidad de propagación de la llama, tanto la hipótesis de estado estacionario como el método analítico, es excelente para todo el intervalo de temperaturas de combustión considerado.

Sin embargo, hay que advertir que si bien la hipótesis de estado estacionario proporciona un valor satisfactorio para la velocidad de la llama, no ocurre lo mismo con la distribución de radicales en el seno de aquélla, como puede comprobarse en el mencionado trabajo o en la publicación de Karman y Penner, ya citada.

7. APLICACIÓN A LLAMAS REALES

Una vez expuestos en el epígrafe precedente los diversos métodos de cálculo de la estructura de las llamas y, en especial, de su velocidad de propagación, es necesario ver la forma en que tales métodos se han aplicado al estudio de casos reales, del que el de la llama de descomposición de la hidracina, ya citada, es un ejemplo sencillo.

Debiendo señalarse que, si bien los métodos matemáticos cuyo fundamento acabamos de exponer han proporcionado una clara comprensión de los mecanismos que dan lugar a la propagación de la llama y de la forma en que actúan cada uno de los diversos factores que participan en este complejo fenómeno, a la hora de aplicar la teoría al estudio de casos reales se está todavía en una fase de desarrollo mucho más prematura, de tal modo que, como vamos a ver, el número de casos que ha podido tratarse de modo satisfactorio, hasta el momento, resulta mucho más limitado.

La principal dificultad con que se tropieza para ello es, en primer lugar, la falta de conocimientos suficientemente precisos sobre la

cinética química de los procesos de combustión, tanto por lo que respecta al esquema de reacciones elementales que lo forman, el cual suele ser sumamente complejo incluso para los casos presumiblemente más sencillos, como en cuanto a la determinación de la constante fisicoquímica de los mismos; factores de frecuencia, energías de activación, etc.

Por ello, una parte muy importante de las investigaciones en curso se orientan desde hace años al esclarecimiento de esta cuestión fundamental sobre la que se viene produciendo una bibliografía muy abundante, de la que se encontrarán numerosos ejemplos en las referencias y publicaciones que hemos citado (111).

A título de ejemplo sobre la cinética química de las llamas que hemos mencionado, pueden consultarse el trabajo de Gilbert (112) sobre la descomposición de la hidracina; los de Dixon-Lewis (113) y de Eberius, Hayerman y Wagner (114) sobre la combustión del hidrógeno; el de Neiman y Gal (115) sobre la combustión de hidrocarburos, etc.

Una segunda dificultad, aunque de menor consideración, procede también de la insuficiencia de conocimientos sobre las propiedades termodinámicas de las mezclas en las condiciones de las llamas y sobre los valores de los coeficientes de transporte de aquéllas y de sus componentes (116).

(111) En especial, ver la obra de S. S. Penner, ya citada al tratar de la hipótesis de estado estacionario, así como las siguientes: G. J. MINKOFF y C. F. H. TIPPER: *Chemistry of Combustion Reactions*. Butterworths, Londres, 1962; C. P. FENIMORE: *Chemistry of Premixed Flames*. Pergamos Press, 1964, así como la obra de Fristom mencionada al comienzo.

(112) M. GILBERT: *The Hydrazine Flame*. «Comb. and Flames», 1968, páginas 137-48.

(113) G. DIXON-LEWIS, ya citado, así como *Some Observations on the Structure of Slow Burning Flame Supported by the Reaction between Hydrogen and Oxygen at Atmospheric Pressure*. «Ninth Symp. on Comb. Acad. Press. Nueva York, 1963, págs. 576-86, y *Burning Velocities in Hydrogen-Air Mixtures*. «Comb. and Flames», 1970, págs. 197 y sigts.

(114) K. H. EBERIUS, K. HAYERMANN y H. G. WAGNER: *Experimental and Mathematical Study of a Hydrogen-Oxygen Flame*. «Thirteenth Symp. on Comb.». The Comb. Instit., 1971, págs. 713-21.

(115) M. B. NEIMAN y D. GAL: *On the Sequence of Elementary Steps in Gas Phase Hydrocarbon Oxidation*. «Comb. and Flames», 1968, págs. 371-79.

(116) Ver, por ejemplo, la obra de HIRSCHFELDER, CURTISS y BIRD, ya citada, así como J. HILSENATH: *Sources of Transport Coefficients and Correlations of Thermodynamic and Transport Data*. AGARD. Coloquio sobre Combustión. Lieja,

Finalmente, hay que tener en cuenta la complejidad matemática de los sistemas de ecuaciones de la llama y la rápida variación de algunas de las incógnitas en el intervalo de integración, así como el tipo de problema de cálculo del valor propio, que dificultan notablemente tanto los métodos analíticos de aproximación como los de cálculo numérico de las soluciones, incluso contando con las poderosas calculadoras electrónicas de que hoy se dispone.

Por todo lo cual resulta imprescindible pretender incorporar al modelo matemático todas las complejidades del problema real, debiendo limitarse a emplear esquemas simplificados que retengan los escalones que controlan el proceso en la cinética química y valores medios aproximados para los coeficientes de transporte y para los otros parámetros fisicoquímicos.

Por ello también se ha intentado, en primer lugar, agotar las posibilidades de los métodos de reacción global para establecer correlaciones como la que vimos al aplicar los métodos de Zeldovich y Frank-Kamenetskii o de Tanford y Pease a la combustión de hidrocarburos (117).

Los primeros intentos del cálculo de casos reales se orientaron hacia llamas con cinética química determinada por una única reacción, como ocurre, por ejemplo, con la descomposición de algunos productos.

Tal es el caso de la llama de descomposición de los vapores de nitroglicol, que estudió Belayev (118) mediante la aplicación del método de Zeldovich y Frank-Kamenetskii, obteniendo buena conciencia entre los valores teórico y experimental.

Asimismo, el grupo de Hirschfelder (119) y sus colaboradores

diciembre 1955. Butherworths Sci. Publ. Londres, 1956. También el «Tech. Rep. de NACA», núm. 1.383, ya citado, y el de R. A. SVEHLA: *Estimated Viscosities and Thermal Conductivities of Gases at High Temperature*. «NASA Tech. Rept.», R-132, Washington, 1962. Finalmente, el trabajo de Dixon-Lewis, que se menciona más adelante en relación con la combustión del hidrógeno.

(117) Ver, también a este respecto: J. B. FENN y H. F. CALCOTE: *Activation Energies in High Temperature Combustion*. «Fourth Symp. Comb.», págs. 231-38, así como S. S. PENNER y T. H. GROVE: *Theoretical Studies of Laminar Flame Propagation*. «Proceedings of the Gas Dynamics Symposium on Aerothermochemistry», págs. 113-131, Northwestern Univ. Evanston, 1956.

(118) A. TH. BELAYEV: «Acta Fisicoquímica de la URSS», vol. 8, año 1938, pág. 763.

(119) M. J. HENKEL, W. P. SPAULDING y H. HUMMEL: *Theory of Propaga-*

calcularon las llamas de descomposición del azometano $[(\text{CH}_3)_2\text{N}_2 \rightarrow \text{C}_2\text{H}_6 + \text{N}_2]$ y la del monóxido de nitrógeno $(2\text{NO} \rightleftharpoons \text{N}_2 + \text{O}_2)$, cuya existencia experimental fue comprobada posteriormente para esta última por Gaydon y Wolfhard (120).

Otro ejemplo del mismo tipo, que ha podido calcularse en detalle y comparar los resultados con los de las mediciones experimentales, obteniendo una coincidencia muy satisfactoria, es el de la llama de descomposición del óxido de etileno $(\text{C}_2\text{H}_4\text{O} \rightarrow \text{CH}_4 + \text{CO})$ (121).

En este caso, la velocidad experimental de la llama es de 12,5 cm/seg., mientras que los valores que se obtienen por los diversos procedimientos de cálculo descritos oscilan entre 8 y 12 cm/seg., lo que muestra una coincidencia realmente excelente para este tipo de problemas.

El grupo ruso de Zeldovich, Frank-Kamenetskii y Semenov, aplicó su teoría de la estructura de la llama al caso de la combustión del monóxido de carbono (122), obteniendo resultados para la velocidad de propagación que muestran un razonable acuerdo con los que dan las mediciones experimentales.

El problema resulta, sin embargo, demasiado difícil a causa de la complejidad del conjunto de reacciones químicas en cadena que se producen en este tipo de mezclas, cuyo estudio ha dado lugar a abundante literatura y algunos de cuyos aspectos están todavía pendientes de esclarecimiento (123).

Entre los casos estudiados con mayor detalle tiene gran interés, especialmente porque se conocen con bastante precisión tanto el esquema cinético del proceso como los valores de las constantes fisicoquímicas y de los coeficientes de transporte de las diversas especies, el de la llama de descomposición del ozono, al que hemos

tion of Flames. Part II: Approximate Solutions. Part III: Numerical Integrations. «Third Symp. on Comb.», págs. 127-40.

(120) A. G. GAYDON y H. G. WOLFHARD, ya citado, pág. 324.

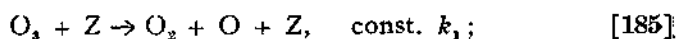
(121) M. GERSTEIN, GL. E. McDONALD y R. L. SCHALLA: *Decomposition Flame Studies with Ethylene Oxide.* «Fourth Symp. on Comb.», págs. 375-83.

(122) N. N. SEMENOV: «Prorr. Ciencias Físicas URSS», vol. 24, año 1940, págs. 439-86. Traducido al inglés como «NACA Tech. Mem.», núm. 1.026. Ver también K. SCHELLER: *On the Burning Velocity of Moist Carbon Monoxide-Oxygen-Nitrogen Mixtures.* «Sixth Symp. on Comb.», págs. 280-88.

(123) Ver, por ejemplo, V. GRIFFING y K. J. LAIDLER: *The Mechanisms of some Elementary Reactions Occurring in Flames. I. The Carbon Monoxide Flame.* «Third Symp. on Comb.», págs. 432-41. También G. J. MINKOFF y C. F. H. ya citado, capítulo 2: *The Oxidation of Carbon-Monoxide*, págs. 58-85.

aludido anteriormente y cuyo primer análisis, efectuado por Lewis y von Elbe, se remonta, como indicamos, a 1934 (124).

El esquema cinético de esta llama está perfectamente determinado y es el siguiente (125):



siendo Z una cualquiera de las especies de la mezcla.

Como se ve, se trata de una reacción en cadena no ramificada, con un solo tipo de radical: el átomo de oxígeno.

Al parecer no se ha publicado un estudio crítico del tratamiento matemático dado por Lewis y von Elbe al problema, por lo que puede ser de interés comentar dicho trabajo a la luz de la formulación actual de las ecuaciones de la llama, con objeto de poner de manifiesto los aciertos y errores del análisis de Lewis y von Elbe, pero dejando previamente sentado que el mismo constituye un paso importante en el estudio de las llamas laminares y contiene los elementos básicos de los desarrollos que le han seguido más tarde.

El esquema cinético [185] a [190] muestra la necesidad de operar con tres especies distintas: el oxígeno atómico O, el oxígeno molecular O_2 y el ozono O_3 .

Por consiguiente, el problema es de cinco ecuaciones para las cinco incógnitas $e_1, e_2; Y_1, Y_2$ y la temperatura T, donde con los subíndices 1 y 2 se designan, respectivamente, el oxígeno atómico, que es el radical y el oxígeno molecular, que es el producto (126).

(124) Ver V. LEWIS y VON ELBE, ya citados, al tratar de la entalpía constante.

(125) Ver, por ejemplo, la obra de PENNER citada, págs. 339 y sigts.

(126) Basta con dos especies para e e Y, puesto que, evidentemente, se cumplen las dos condiciones $e_1 + e_2 + e_3 = 1; Y_1 + Y_2 + Y_3 = 1$.

Dichas ecuaciones son las siguientes (127):

$$m \frac{d \epsilon_1}{d x} = w_1 \equiv \rho^2 \frac{M_1}{M M_3} k_1 Y_3 - \frac{\rho^3}{M M_3} k_2 Y_1 Y_2 - \left. \begin{aligned} & - \frac{\rho^2}{M_3} k_3 Y_1 Y_3 + \rho^2 \frac{M_1}{M_3^2} k_4 Y_2^2 + \\ & + 2 \rho^2 \frac{M_1}{M M_2} k_5 Y_2 - 2 \frac{\rho^3}{M M_1} k_6 Y_1^2; \end{aligned} \right\} \quad [191]$$

$$m \frac{d \epsilon_2}{d x} = w_2 \equiv \rho^2 \frac{M_2}{M M_3} k_1 Y_3 - \frac{\rho^3}{M M_1} k_2 Y_1 Y_2 + \left. \begin{aligned} & + 2 \rho^2 \frac{M_2}{M_1 M_3} k_3 Y_1 Y_3 - 2 \frac{\rho^2}{M_3} k_4 Y_2^2 - \\ & - \frac{\rho^2}{M} k_5 Y_2 + \rho^3 \frac{M_2}{M M_1^2} k_6 Y_1^2; \end{aligned} \right\} \quad [192]$$

$$\rho D_1 \frac{d Y_1}{d x} = m (Y_1 - \epsilon_1); \quad [193]$$

$$\rho D_2 \frac{d Y_2}{d x} = m (Y_2 - \epsilon_2); \quad [194]$$

$$\lambda \frac{d T}{d x} = q_1 \epsilon_1 + q_2 \epsilon_2 + m C_p (T - T_0) \quad [195]$$

y el problema consiste, como es sabido, en determinar el valor de m que permita satisfacer las condiciones en los límites, las cuales, si el gas inicial es ozono puro (128) y se desprecia la concentración de átomos de oxígeno en el producto final, son:

$$\left. \begin{aligned} \text{Extremo frío } x = -\infty: \epsilon_1 = Y_1 = 0; \epsilon_2 = Y_2 = 0; T = T_0. \\ \text{Extremo caliente } x = +\infty: \epsilon_1 = Y_1 = 0; \epsilon_2 = Y_2 = 1; T = T_f. \end{aligned} \right\} \quad [196]$$

(127) En ellas, M es el peso molecular de la mezcla y M_i los de las diversas especies. Asimismo, se escribe Y_i por brevedad, pero en rigor debe sustituirse por $(1 - Y_1 - Y_2)$.

(128) Cualquier otro caso puede reducirse fácilmente a éste.

Antes de seguir adelante debe advertirse que Lewis y von Elbe no operan con las fracciones másicas Y_i o de flujo ϵ_i , sino con las concentraciones molares n_i , en número de moles de las diversas especies por unidad de volumen.

No obstante, en lo que sigue vamos a reproducir su proceso de cálculo con la notación empleada por nosotros con objeto de facilitar su interpretación.

Para el cálculo de la velocidad de la llama utilizan la ecuación [192], que integran entre los extremos del intervalo $-\infty, +\infty$, con lo que resulta:

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} w_2 dx = \int_{T_0}^T \frac{w_2}{\left(\frac{dT}{dx}\right)} dT. \quad [197]$$

Esta ecuación muestra que el problema se reduce a obtener expresiones adecuadas de la velocidad de reacción w_2 y del gradiente de temperaturas $\frac{dT}{dx}$ como funciones de T , que permitan el cálculo numérico de la integral anterior.

Por lo que respecta a w_2 , en 1934 no se conocía suficientemente bien el esquema de reacciones [185] a [190], que Lewis y von Elbe suponen se reduce a las tres primeras, con lo que se obtiene para w_2 :

$$w_2 = \rho^2 \frac{M_2}{M M_3} k_1 Y_3 - \frac{\rho^3}{M M_1} k_2 Y_1 Y_2 + 2 \rho^2 \frac{M_2}{M_1 M_3} k_3 Y_1 Y_3. \quad [198]$$

Por otra parte, también se desconocían entonces los valores de las constantes k_1 y k_2 de las dos primeras reacciones, dificultad que soslayan los autores suponiendo que ambas reacciones están en equilibrio químico. Ello equivale a anular los dos primeros términos de [198], con lo que esta expresión se reduce a la siguiente:

$$w_2 = 2 \rho^2 k'_3 Y_1 Y_3, \quad [199]$$

donde, para abreviar, se ha hecho $k'_3 = \frac{M_2}{M_1 M_3} k_3$.

Además, la condición de equilibrio supuesta entre las dos primeras

reacciones, proporciona la siguiente expresión, para la concentración de radicales:

$$Y_1 = k_s \frac{Y_3}{Y_2}, \quad [200]$$

la cual es función de las especies principales y de la constante de equilibrio $k_s = \frac{M_1 M_2}{\rho M_3} \cdot \frac{k_1}{k_2}$ del par de relaciones [185], [186] que, como se sabe, es una función conocida de la temperatura (129).

Con ello se puede eliminar la concentración de radicales de w_2 , y se obtiene finalmente para la velocidad de formación del oxígeno molecular:

$$w_2 = k \frac{Y_3^2}{Y_2}, \quad [201]$$

siendo

$$k = 2 \rho^2 k' k_s. \quad [202]$$

Lewis y von Elbe calculan el valor de k' , mediante la aplicación de la Cinética Química clásica al estudio de la reacción bimolecular [187], con lo que la expresión [202] resulta ser una función conocida de la temperatura (131), por lo que tan sólo resta expresar las concentraciones de las especies principales en función de aquélla, para que w_2 resulte ser también una función conocida de T .

Es aquí precisamente donde los autores introducen la célebre hipótesis de que la entalpía de la mezcla es constante, lo cual equivale a suponer, como se ha visto después, que el número de Lewis-Semenov de la mezcla es igual a la unidad.

Con ello y teniendo presente que siempre es $Y_1 \ll 1$, se obtiene:

$$Y_2 = 1 - Y_3 = \frac{T - T_u}{T_f - T_0} = \tau, \quad [203]$$

(129) Obsérvese que Y_1 se determina por una especie de condición de estado estacionario similar a la propuesta por von Karman y Penne años más tarde.

(130) O de ésta y de las concentraciones Y_2 e Y_3 , si se desea tener en cuenta la influencia de las diferencias entre los pesos moleculares del oxígeno molecular y del ozono

lo que permite finalmente expresar la velocidad w_2 de formación del oxígeno molecular en función de la única variable T :

$$w_2 = f(T), \quad [204]$$

para el cálculo de la integral [197].

Para poder calcular el valor de esta integral se necesita expresar también el gradiente de temperaturas $\frac{dT}{dx}$ en función de T , lo que consiguen los autores recurriendo a las ecuaciones de difusión, que no han sido empleadas todavía.

Ahora bien; no conociéndose debidamente en aquella fecha, como señalan los propios autores, las ecuaciones de difusión de mezclas con más de dos componentes y en las condiciones de temperatura variable que se dan en el seno de la llama, utilizan una expresión inadecuada de la Ley de Fick que, aplicada al oxígeno molecular y con nuestra notación, se expresa en la forma:

$$\frac{d}{dx} \left[D_2 \frac{d(\rho Y_2)}{dx} \right] = m \frac{dY_2}{dx} - w_2, \quad [205]$$

en lugar de emplear la expresión correcta:

$$\frac{d}{dx} \left(\rho D_2 \frac{dY_2}{dx} \right) = m \frac{dY_2}{dx} - w_2, \quad [206]$$

que resultaría de la eliminación de ϵ_2 entre [192] y [193] (131).

Por otra parte, un conjunto de simplificaciones de [205] no justificadas y que, entre otras cosas, eliminan de ella el valor propio m que se busca, así como la sustitución de la variable independiente

(131) Al ser la presión constante a través de la llama, las expresiones [205] y [206] coinciden cuando la temperatura es también constante, porque entonces lo es ρ para un peso molecular constante, que es la hipótesis de validez rigurosa de [206]. Fue precisamente la generalización al caso de la llama de la ley de Fick en sistemas a presión y temperatura constantes, lo que llevó a Lewis y von Elbe a adoptar la expresión errónea [205].

x por T , les permite obtener una ecuación diferencial de la forma :

$$\frac{D_2^2}{T^4} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 = 2 \int_{T_0}^T \frac{D_2}{T^3} f(T) dT \quad [207]$$

para el cálculo de $\frac{dT}{dx}$ la cual, llevada a [197], proporciona el valor buscado de m mediante una integración numérica, así como las distribuciones de las concentraciones y de la temperatura a través de la llama.

En particular Lewis y von Elbe obtienen la siguiente tabla de valores para la velocidad de propagación de la llama en cuatro casos típicos que comparan con los resultados de las mediciones experimentales :

Caso	Vexp. cm/seg.	Vteor. cm/seg.
1	55	253
2	158	451
3	160	333
4	747	664

Debe señalarse, no obstante, que el empleo de la expresión correcta de la ecuación de difusión para el cálculo de $\frac{dT}{dx}$ con objeto de obtener el valor de la integral [197], o bien no permite utilizar el método de Lewis y von Elbe o conduce a una identidad que impide efectuar dicho cálculo, como se comprueba fácilmente.

En efecto ; haciendo

$$\zeta = \rho D_2 \frac{dT}{dx} , \quad [208]$$

donde τ ha sido definido en [203], se obtiene para el cálculo de ζ , es decir, de $\frac{dT}{dx}$, la conocida ecuación diferencial (132).

$$\zeta \frac{d\zeta}{dx} = m\zeta - \rho D_2 w_2, \quad [209]$$

cuya integración proporciona la ecuación de Klein:

$$\frac{\zeta^2}{2} = m \int_0^1 \zeta d\tau - \int_0^1 \rho D_2 w_2 d\tau \quad [210]$$

para el cálculo de ζ y del valor propio m , como se vio anteriormente. Por el contrario, si la ecuación [209] se divide por ζ antes de efectuar la integración y ésta se lleva a cabo seguidamente entre los extremos del intervalo, teniendo en cuenta que es $\zeta = 0$ en ambos, resulta:

$$m = \int_0^1 \frac{\rho D_2 w_2}{\zeta} d\tau, \quad [211]$$

expresión que, evidentemente, coincide con la [197] de Lewis y von Elbe.

La conclusión es, pues, que el valor del gradiente de temperaturas $\frac{dT}{dx}$ no está dado por la ecuación [207], sino por la [210], y que si se conoce esta expresión no es necesario recurrir a la [197] para obtener el valor de m , puesto que entonces dicho valor está determinado por la propia ecuación [210] al hacer en ella $\tau = 1$, como se vio en el método de Klein.

Años más tarde, la llama de descomposición del ozono fue analizada de nuevo por Hirschfelder y sus colaboradores (133), mediante

(132) Ver la expresión [60], con la cual se puede identificar fácilmente la [209].

(133) J. O. HIRSCHFELDER, C. F. CURTISS y D. E. CAMPBELL: *The Theory of Flame Propagation*. IV. «*Jour. Phys. Chem.*», 1953, págs. 403-14.

la integración numérica del sistema correcto de ecuaciones diferenciales de la llama y empleando el esquema cinético [185] a [190] completo, cuyos factores de frecuencia habían sido determinados previamente con mayor precisión, así como los coeficientes de transporte.

La figura VI-18 muestra las distribuciones de Y_1 , Y_2 y ϵ_2 en función de la temperatura T , obtenidas por Hirschfelder y sus colaboradores para el primero de los cuatro casos estudiados por Lewis y von Elbe.

La velocidad teórica de propagación de la llama resulta ser, en dicho caso, de 47 cm/seg., lo que constituye una excelente aproxi-

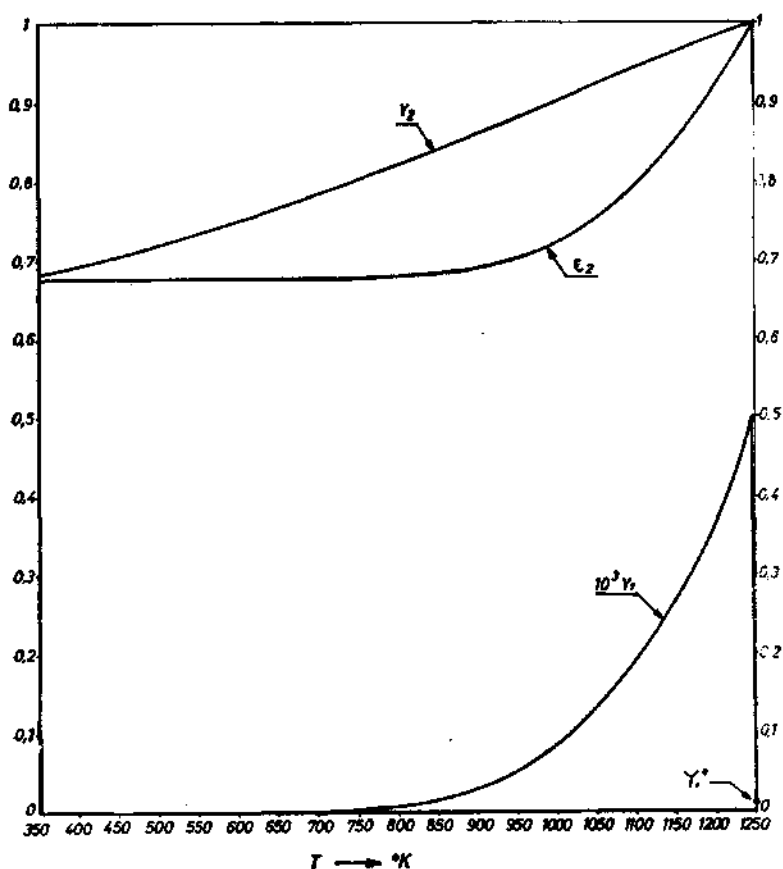


Fig. VI-18.—Llama de descomposición del ozono. Cálculo de Hirschfelder et al.
Distribución másica de la especie.

mación al valor experimental de 55 cm/seg. frente a los 253 cm/seg. obtenidos por Lewis y von Elbe.

Como se ha dicho, el cálculo numérico hay que efectuarlo a partir del extremo caliente, postulando un valor de m y aplicando primero una aproximación de Taylor y más tarde el método de integración numérica de Milne, para la obtención de Y_2 y ϵ_2 , lo que plantea un problema de inestabilidad en el entorno del extremo caliente.

Pero este método no puede aplicarse al cálculo de los valores de Y_1 y ϵ_1 del radical porque las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d \epsilon_1}{d T} = \frac{\lambda}{m^2 C_p} \cdot \frac{w_2(Y_1, Y_2, T)}{T - T_0 + \frac{q_1}{C_p} \epsilon_1 + \frac{q_2}{C_p} \epsilon_2} \quad [212]$$

y

$$\frac{d Y_1}{d T} = \frac{\lambda}{L m^2 C_p} \cdot \frac{Y_1 - \epsilon_1}{T - T_0 + \frac{q_1}{C_p} \epsilon_1 + \frac{q_2}{C_p} \epsilon_2} \quad [213]$$

de variación del flujo y de la concentración del radical son del tipo llamado por Hirschfelder y sus colaboradores *rígido* («stiff»), las cuales se caracterizan por la condición de que el módulo de la pendiente $\left| \frac{d \epsilon_1}{d T} \right|$ es muy grande excepto en un estrecho corredor del espacio ϵ_1, T por el que discurre la solución buscada.

Para la integración numérica de este tipo de ecuaciones Curtiss y Hirschfelder propusieron el método especial de cálculo citado con anterioridad y cuya aplicación permite eludir las dificultades derivadas de la rigidez.

Poco después (134), von Karman y Penner calcularon la llama de descomposición del ozono mediante la aplicación del método analítico de von Karman descrito anteriormente y utilizando un esquema cinético simplificado, que reducen a las dos ecuaciones [185] y [187], mediante un análisis de las contribuciones de las otras cuatro ecuaciones de reacción las cuales resultan ser despreciables, excepto en

(134) TH. von Karman y S. S. Penner, ya citados.

condiciones especiales o en una zona muy reducida de la llama, que no altera fundamentalmente ni sus características ni su velocidad de propagación.

Además, para el cálculo de la concentración Y_1 del radical oxígeno atómico introdujeron, como también se ha dicho, la hipótesis de estado estacionario $w_1 = 0$, la cual, en el esquema cinético propuesto, se expresa en la forma:

$$Y_1 = \frac{M_1}{M} \cdot \frac{k_1}{k_2}, \quad [214]$$

que sustituye a la condición [200] empleada por Lewis y von Elbe.

La figura VI-19 compara la distribución de Y_1 dada por la condición [214] con el resultado de la integración numérica de Hirschfelder. En ella puede verse que la coincidencia es excelente, excepto en un reducido entorno de la temperatura máxima sin influencia sensible en la velocidad ni en la estructura de la llama, en donde, en la solución de Hirschfelder Y_1 cae muy rápidamente a su valor Y_1^e de equilibrio en los gases quemados.

Para que este comportamiento se diese también en la solución de Karman y Penner, habría que tomar en consideración la ecuación de reacción [186], perfeccionamiento que complicaría innecesariamente los cálculos. Por consiguiente, puede concluirse que en este caso parece plenamente justificado el empleo de la célebre hipótesis del estado estacionario para el cálculo de la distribución del radical.

Finalmente, la figura VI-20 (135) compara la velocidad de la llama calculada por el método de Karmann y Penner que acabamos de describir con el resultado de las mediaciones experimentales llevadas a cabo por Streng y Grosse (136). Como se ve, la aproximación que se obtiene para todo el intervalo de concentraciones analizado debe considerarse excelente, particularmente si se tiene en cuenta la sencillez del procedimiento de cálculo utilizado.

Recientemente, Campbell (137) ha llevado a cabo un riguroso y

(135) S. S. PENNER: *Chemistry Problems in Jet Propulsion*, ya citado, página 342.

(136) A. G. STRENG y A. V. GROSSE: *The Ozone to Oxygen Flame*. «Sixth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 264-73.

(137) E. S. CAMPBELL: *A Theoretical Analysis of Chemical and Physical Processes in an Ozone Flame*. «Chem. Eng. Sci.», 1965, págs. 311-29.

profundo estudio teórico de la combustión de descomposición del ozono, cuya solución obtiene por integración numérica del sistema diferencial de la llama en un trabajo crítico que analiza tanto la formulación matemática del problema y los métodos de cálculo empleados para resolverlo, como la cinética química y los procesos de transporte que intervienen en el fenómeno, como la influencia de los diversos factores y aproximaciones en las distintas regiones de la llama como, finalmente, las desviaciones con respecto a los resultados experimentales.

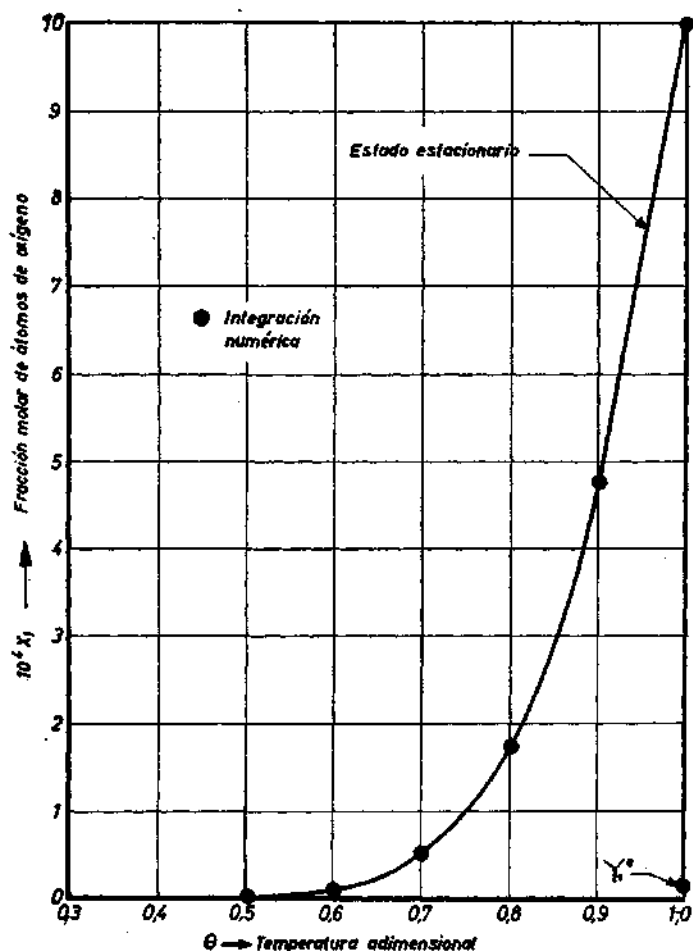


Fig. VI-19.—Distribución de los átomos de oxígeno en función de la temperatura en la llama de descomposición del ozono.

Campbell señala que para concentraciones de ozono altas en la mezcla inicial, la velocidad de la llama es elevada, lo que obliga a tomar en consideración la energía cinética de la mezcla en el balance energético de la onda, pero no consigue obtener una solución numérica del sistema diferencial modificado para incorporar en él los términos correspondientes a la citada energía cinética, advirtiendo que

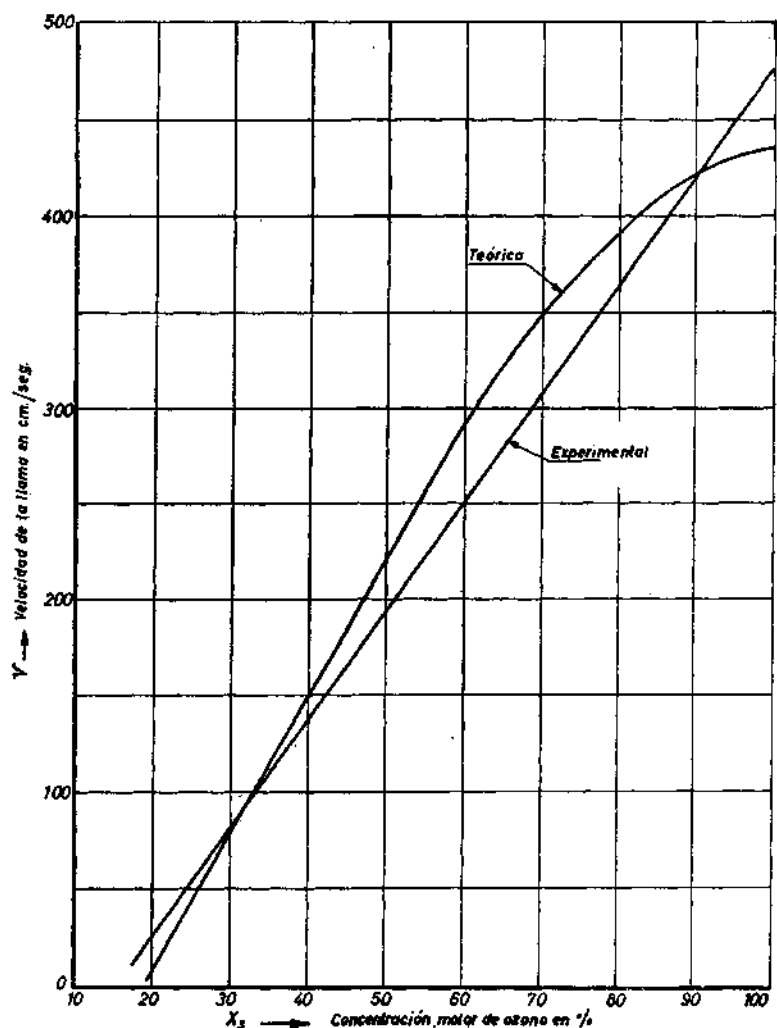


Fig. VI-20.—Velocidad de propagación de la llama de descomposición del ozono, en una mezcla de oxígeno y ozono.

en tales circunstancias cambia el carácter del valor propio del problema.

Por otra parte, la llama resulta experimentalmente inestable para concentraciones iniciales de ozono altas, lo que se atribuye a efectos dinámicos, puesto que un estudio teórico de la estabilidad interna de la onda (138) llevado a cabo por Rosen (139) muestra que aquélla es estable, especialmente para valores elevados de la concentración de ozono.

Muy recientemente, Cramarossa y Dixo-Lewis (140) han aplicado el método no estacionario de Spalding al cálculo de esta llama, para concentraciones iniciales de ozono de hasta el 100 por 100, llegando en todos los casos a obtener soluciones estacionarias.

Finalmente, uno de los casos calculados por K. A. Wilde, en el trabajo a que nos hemos referido anteriormente, al tratar de los métodos recientes de integración numérica de las ecuaciones de la llama, es el de la de descomposición del ozono, cuya solución obtiene por integración de las ecuaciones estacionarias y para concentraciones iniciales de ozono de hasta el 100 por 100, como un problema de valor propio único y sin que se presenten las dificultades señaladas por Campbell para las llamas ricas.

Nos hemos detenido en el estudio de esta llama por su interés intrínseco y porque es un ejemplo muy representativo para ilustrar las dificultades y los métodos de tratamiento de un caso práctico.

Pero hay otros varios que han sido tratados con profundidad comparable, para lo que nos limitaremos aquí a remitir a alguna bibliografía básica para cada uno de ellos, con objeto de no prolongar excesivamente la exposición.

Entre tales casos se encuentra, en primer lugar, el ya citado de la llama de descomposición de la hidracina (141); asimismo, el de la formación del ácido bromhídrico, una de las llamas mejor conocidas

(138) Ver más adelante la teoría de la estabilidad de las llamas.

(139) J. B. ROSEN: *Stability of the Ozone Flame Propagation*. «Sixth. Symp. on Comb.», 236-41.

(140) F. CRAMAROSSA y G. DIXON-LEWIS: *Ozone Decomposition in Relation to the Problem of the Existence of Steady-State Flames*. «Comb. and Flames», 1971, págs. 243-51.

(141) Ver, además de los trabajos del grupo del INTA citados y del de M. Gilbert de 1958, donde se encontrará abundante bibliografía, el de G. K. ADAMS y G. B. COOK: *The Effect of Pressure on the Mechanism and Speed of the Hydrazine Decomposition Flame*. «Comb. and Flames», 1960, págs. 9-18.

en los aspectos físico químicos (142), de cuyo estudio se han ocupado, entre otros, el Grupo de Hirschfelder, Karman y Penner y el del INTA, a cuyas referencias previamente citadas remitimos.

Una llama de cinética química muy compleja pero que ofrece un gran interés científico y técnico es la de combustión de la mezcla de hidrógeno, oxígeno y nitrógeno. A su estudio se han consagrado, especialmente durante los últimos años, un gran esfuerzo de investigación teórica y experimental, al amparo de los métodos de cálculo descritos y de las nuevas técnicas de medición de las distribuciones de composición y temperatura a través de la llama, esfuerzo que ha permitido alcanzar ya una comprensión muy completa del proceso.

En lo que sigue nos limitaremos a señalar los aspectos más destacados de la cuestión, remitiendo a la bibliografía que se cita para un estudio más detallado del problema, y empezaremos por considerar la medición experimental de la velocidad de propagación de esta llama.

La figura VI-21, tomada de un trabajo de Drell y Belles sobre las propiedades de la combustión de hidrógeno (143) muestra la influencia de la composición de la mezcla en la velocidad de propagación de la llama, a la presión atmosférica y a la temperatura de 300° K para los gases frescos. En el citado trabajo se encontrará, además, bibliografía sobre las mediciones experimentales llevadas a cabo antes de 1958, mientras que referencias posteriores se hallarán en las que se citan más adelante del profesor Dixon-Lewis de la Universidad de Leeds, quien se ha ocupado seguramente con mayor profundidad que nadie del estudio de esta llama.

En segundo lugar, está la determinación de las condiciones de equilibrio termodinámico en los gases quemados, para lo que también se encontrará información suficiente en el trabajo de Drell y Belles, así como en los de Dixon-Lewis. Por ejemplo; la figura VI-21 in-

(142) Ver, a este respecto, los excelentes trabajos llevados a cabo por Campbell y Fristrom, los cuales ilustran muy bien, además, el empleo de las llamas para el estudio de la Cinética química, cuestión a la que ya nos hemos referido con anterioridad. E. S. CAMPBELL y R. M. FRISTROM: *Reaction Kinetics, Thermodynamics and Transport in the Hydrogen-Bromine System*. «Chem. Rev.», vol. 58, 1958, págs. 173-234.

(143) I. L. DRELL y F. E. BELLES: *Survey of Hydrogen Combustion Properties*. «NASA Tech. Rep.», núm. 1.388, año 1958. Ver también H. EDMONSON y M. P. HEAP: *The Burning Velocity of Hydrogen-Air Flames*. «Comb. and Flames», 1971, págs. 161-65.

cluye también la variación de la temperatura de los gases quemados en función de la composición de la mezcla, según valores tomados de la referencia citada por Drell y Belles.

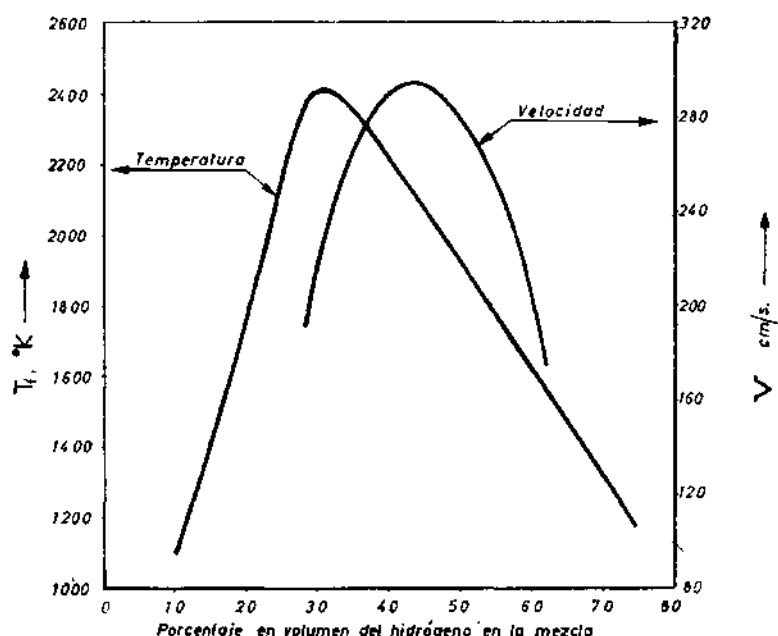


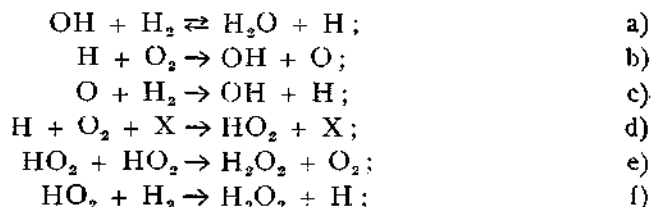
Fig. VI-21.—Llama de combustión del hidrógeno en el aire. Velocidad de propagación y temperatura de los gases quemados.

En tercer lugar, está la determinación de los valores de los coeficientes de transporte (conductividad y difusión) y de su variación a través de la llama, en función de la temperatura y composición de la mezcla en cada punto. Aquí, según el orden de aproximación que se desee obtener, pueden utilizarse los valores medios que resultan de suponer, por ejemplo, coeficientes de difusión binaria de cada especie a través de la mezcla de todas las demás, como hemos hecho nosotros o, por el contrario, utilizar datos más precisos y sustituir las ecuaciones aproximadas de difusión por las correctas para mezclas de más de dos componentes, formuladas por Hirschfelder y a las que nos hemos referido con anterioridad. El que se utilice una u otra aproximación depende, en esencia, del objeto que se persiga en el cálculo de la llama, como veremos a continuación.

Para la determinación de los valores correctos de los coeficientes de transporte a emplear en la formulación de Hirschfelder, incluida la difusión térmica que hay que tomar en consideración entonces, Dixon-Lewis (144) ha desarrollado un método para el cálculo con ordenador basado en la extensión de la Teoría de Chapman y Enskog llevada a cabo por Wang Chang, Uhlenbeck y De Boer para el caso de gases poliatómicos.

A continuación está la cuestión de la Cinética Química, en el doble aspecto del esquema de reacciones y de los valores de los factores de Arrhenius correspondientes a cada una de ellas. La oxidación del hidrógeno es una de las reacciones más estudiadas (145), si bien bajo condiciones en general estáticas y, por tanto, distintas de las que se dan en la llamada.

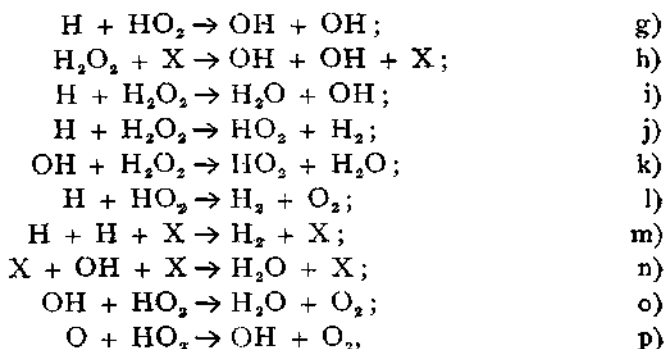
Se trata de un caso muy complejo de reacción en cadena ramificada, con un gran número de radicales distintos, para el que Dixon-Lewis (146) utiliza en su análisis el siguiente esquema de posibles reacciones:



(144) G. DIXON-LEWIS: *Flame Structure and Flame Reaction Kinetics. II. Transport Phenomena in Multicomponent Systems*. «Proc. Roy. Soc. Londres», 1968, págs. 111-35.

(145) Ver, por ejemplo, MINKOFF y TIPPER, ya citados, capítulo primero: *The Oxidation of Hydrogen*, especialmente el apartado D, págs. 36-57.

(146) G. DIXON-LEWIS: *Flame Structure and Flame Reaction Kinetics. I. Solution of Conservation Equations and Application to Rich Hydrogen-Oxygen Flames*. Proc. Roy. Soc. Londres, 1967, págs. 495-513. También, del mismo autor: V. *Investigation of Reaction Mechanism in a Rich Hydrogen + Nitrogen + Oxygen Flame by Solution of Conservation Equations*. «Proc. Roy. Soc. Londres», 1970, págs. 235-63, así como *Burning Velocities in Hydrogen-Air Mixtures*. «Comb. and Flame», 1970, págs. 197-98. Ver también G. DIXON-LEWIS, M. M. SUTTON y A. WILLIAMS: *Some Reactions of Hydrogen Atoms and Simple Radicals at High Temperatures*. «Tenth Symp. on Comb. The Comb. Inst.», 1965, páginas 495-502, así como C. J. HALSTEAD y D. R. JENKINS: *Radical Recombustion in Rich Premixed Hydrogen-Oxygen Flames*. «Twelfth Symp. on Comb. The Comb. Inst.», 1969, págs. 979-87, donde, además se describen algunas técnicas experimentales.



donde X designa cualquier especie de la mezcla.

Es claro que un esquema tan complejo como éste resulta inabordable para el actual estado de conocimientos de la Teoría de las Llamas, teniendo además en cuenta que se desconocen los factores de Arrhenius de muchas de estas reacciones.

Por ello, Dixon-Lewis, que ya hace años se había ocupado del cálculo de la velocidad de esta llama (147) empezando con una cinética química global y aplicando los métodos semiempíricos de Lovachev y del «centroide» de Spalding, emplea en sus análisis posteriores algunos esquemas simplificados basados en hipótesis sobre las reacciones que deben controlar el proceso según la información disponible a partir de la Cinética Química, y utiliza la Teoría de las Llamas precisamente para tratar de esclarecer cuál de todos ellos es el que más se aproxima a la realidad del fenómeno, observada experimentalmente.

Como el objeto de este trabajo no es entrar en análisis detallados de Cinética Química, remitimos al lector a la bibliografía (148) para un estudio más completo de la cuestión.

Sí nos interesa, en cambio, ver cuál es el método de cálculo que emplea Dixon-Lewis y cómo lo utiliza, en combinación con las mediciones experimentales, para profundizar en la naturaleza del proceso.

(147) G. DIXON-LEWIS y A. WILLIAMS: *Laminar Flame Propagation Velocities in Terms of Flame Parameters in a Hydrogen-Oxygen Flame*. «Comb. and Flames», 1961, págs. 302-4.

(148) Ver, también, además de las referencias citadas, la siguiente: G. DIXON-LEWIS y A. WILLIAMS: *Some observations on the Structure of a Slow Burning Flame Supported by the Reaction Between Hydrogen and Oxygen at Atmospheric Pressure*. «Ninth Symp. on Com. Acad. Press.», 1963, págs. 576-83.

En primer lugar, aplica el método no estacionario de Spalding, que integra por diferencias finitas en la forma que se explicó al tratar de aquél, empleando valores aproximados, como hemos dicho, para los coeficientes de transporte y dejando un único parámetro indeterminado de la Cinética Química, como, por ejemplo, el factor de Arrhenius de una reacción que controle el proceso; parámetro cuyo valor ajusta finalmente para reproducir teóricamente la velocidad experimental de propagación de la llamada que corresponde a las condiciones iniciales de la mezcla.

Una vez efectuado este ajuste, la variación de las condiciones iniciales o de los valores de otros parámetros como, por ejemplo, los coeficientes de transporte, permiten comparar otras soluciones teóricas con las correspondientes mediciones experimentales.

Ahora bien, si se desea penetrar en un análisis más fino de la estructura de la llama, lo cual puede ser necesario para separar la influencia de esquemas cinéticos alternativos, entonces la aproximación del método de Spalding resulta insuficiente y hay que recurrir a la formulación completa dada por Hirschfelder para el sistema diferencial de la llama, con valores más precisos de los coeficientes de transporte de las diversas especies, los cuales se pueden calcular por el método anteriormente citado.

Dixon-Lewis procede así en su estudio de la llama de combustión del hidrógeno, efectuando una integración numérica de las ecuaciones de Hirschfelder por el método de Runge-Kutta con intervalos de ancho variable (modificación de Merson), a partir del extremo caliente y utilizando como valor conocido de la velocidad de propagación de la llama el que resulta de las mediciones experimentales y para los parámetros no conocidos de la Cinética Química los proporcionados por el ajuste que hemos descrito mediante la aplicación del método de Spalding.

Con ello, la observación experimental, combinada con el método de Spalding, elimina el problema de valor propio y conocido éste, la integración numérica de las ecuaciones de Hirschfelder, que es realmente laboriosa, es la correspondiente a un problema de valores iniciales.

A título de ejemplo de la información que puede obtenerse por este procedimiento, la figura VI-22, tomada de uno de los citados trabajos de Dixon-Lewis, muestra los perfiles teóricos de temperaturas correspondientes a dos esquemas cinéticos distintos y su com-

paración con la distribución real, medida experimentalmente (149). Claramente se aprecia que el esquema correspondiente a la línea de trazo continuo, el cual resulta de tomar en consideración la influencia del radical HO_2 , se ajusta mejor a la realidad para describir la estructura fina de la onda.

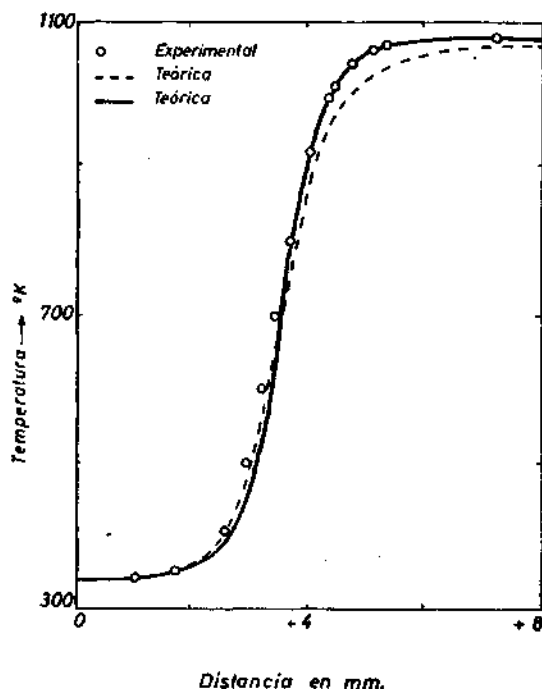


Fig. VI-22.—Comparación de las distribuciones experimental y teórica de la temperatura en una llama de hidrógeno-aire, según Dixon-Lewis.

Asimismo, la figura VI-23 tomada de un trabajo muy reciente de Günther y Janisch (150) compara los más recientes valores experimentales para la mezcla hidrógeno-aire, con los que resultan del cálculo de Dixon-Lewis. Como puede verse, también aquí, como en el caso de la temperatura, la aproximación es excelente para todo el

(149) Para la técnica de medición experimental de la distribución de temperatura, ver G. DIXON-LEWIS y G. L. ISLES: *Flame Structure and Flame Reaction Kinetics*. III. *Measurement of Temperature Profiles in Flames at Atmospheric Pressure*. «Proc. Roy. Soc. Londres», 1969, págs. 517-36.

(150) R. GÜNTHER y G. JANISCH: *Measurements of Burning Velocity in a Flat Flame Front*. «Comb. and Flames». 1972, págs. 49-53.

intervalo de composición calculado, evidenciando el nivel de precisión que se está alcanzando con las nuevas técnicas de cálculo y experimentación en la Teoría de la Estructura de las Ondas de Combustión, incluso en un caso tan complejo como hemos visto que es el de la llama de hidrógeno.

Para terminar con esta llama hay que mencionar los trabajos teóricos y experimentales llevados a cabo por Eberius y colaboradores (151) sobre mezclas de hidrógeno y oxígeno a presión reducida, cuya llama estabilizan mediante un tabique poroso del tipo de Hirschfelder.

Para el cálculo teórico de la estructura de la llama, estos autores utilizan también el método de Spalding y, en la referencia citada, ilustran muy claramente, mediante un sencillo ejemplo, el efecto amplificador de los pequeños errores iniciales en el resultado de la integración numérica de las ecuaciones de Hirschfelder correspondientes al régimen estracionario, tanto si la integración se lleva a cabo a partir del extremo frío como si se inicia en la forma habitual desde los gases quemados, amplificación causada por el tipo de las ecuaciones y por el acoplamiento entre las diversas variables.

Finalmente, uno de los ejemplos tratados por K. A. Wilde, en el trabajo reiteradamente citado es precisamente el de la combustión de la mezcla de hidrógeno y aire. Los poderosos métodos de cálculo desarrollados por Wilde le permiten tomar en consideración esquemas cinéticos más complejos que los simplificados que usa Dixon-Lewis, llegando en uno de los casos a incluir hasta 15 ecuaciones de reacción.

En este caso concreto, el valor teórico que obtiene para la velocidad de propagación de la llama es de 241 cm/seg. frente a un valor experimental de 250 cm/seg.

Para terminar esta parte de la exposición hay que mencionar las llamas de combustión de los hidrocarburos mezclados con el oxígeno o el aire, cuyo estudio concentra en estos momentos una gran parte del esfuerzo investigador, pero sin que, hasta ahora, se haya alcanzado un grado de conocimientos comparable al de las llamas que acabamos de comentar.

Por ejemplo; en el caso de la llama de combustión del metano, mezclado con el oxígeno o el aire, se dispone, en primer lugar, de mediciones precisas y recientes de la velocidad de propagación de la

(151) Véase la referencia citada al comienzo de este epígrafe.

llama (152), así como de mediciones experimentales de la estructura de la onda a presión reducida, efectuadas por el profesor Fristrom y sus colaboradores de la Universidad de John Hopkins, primero para las variables termodinámicas y las concentraciones de las especies principales (153) y más tarde también para los productos intermedios (átomos y radicales) (154), lo cual representa un importante progreso.

Tales observaciones han puesto de manifiesto que en este caso, al igual de lo que ocurre con otras llamas de hidrocarburos, se pueden diferenciar claramente tres regiones distintas en el seno de la onda: una primera, sin reacción química, en que tanto la temperatura como la composición de la mezcla varían fuertemente por efecto de la conductividad térmica y de la difusión respectivamente; una segunda, de reacción química del metano, en que se consume la mayor parte de éste, para transformarse en formaldehído o en monóxido de carbono: finalmente, una tercera, de oxidación de este último, para transformarse en el producto final CO_2 (155).

(152) Ver por ejemplo, además del trabajo de Günther y Janisch ya citado, el de Andrews y Bradley, que se mencionó al comienzo en relación con las técnicas de medición de la velocidad, donde se encontrará información sobre las mediciones de la mezcla metano-oxígeno efectuada desde 1916, así como las referencias siguientes: T. G. SCHOLTE y P. B. VAAGS: *The Burning Velocity of Hydrogen-Air and Mixtures of Some Hydrocarbons with Air*. «Comb. and Flame», 1959, págs. 495-501; H. PESCKEL y F. FETTINGH: *The Laminar Flame Speed of Methane-Oxygen Mixtures and Some Remarks on Flame Pressure*. «Comb. and Flame», 1972, págs. 138-40; D. BRADLEY y G. F. HUNDY: *Burning Velocities of Methane-Air Mixtures Using Hot-Wire Anemometers in Closed-Vessel Explosions*. «Thirteenth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 575-83.

(153) R. M. FRISTROM, C. GOMFELDER, S. FAVIN y A. A. WESTENBERG: *Methane-Oxygen Flame Structure*. I. Characteristic Profiles in a Low-Pressure Laminar, Lean Premixed Methane-Oxygen Flame. II. Conservation of Matter and Energy in the One-Tenth Atmosphere Flame. III. Characteristic Profiles and Matter and Energy Conservation in a One-Twentieth Atmosphere Flame. IV. Chemical Kinetic Considerations. «Jour. Phys. Chem.», 1960, págs. 1836-98, y 1961, págs. 587-601. También R. M. FRISTROM y A. A. WESTENBERG: *Experimental Chemical Kinetics from Methane-Oxygen Laminar Flame Structure*. «Eighth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 438-448; A. DI LORENZO, A. D'ALESSIO, F. BERETTA y C. VENITTOZZI: *Optical and Chemical Investigations of Fuel-Rich Methane-Oxygen Premixed Flames at Atmospheric Pressure*. «Fourteenth Symp. on Comb.» The Comb. Inst., 1973, págs. 941-53.

(154) R. M. FRISTROM: *Radical Concentration and Reactions in a Methane-Oxygen Flame*. «Ninth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 500-75.

(155) Ver, por ejemplo, el trabajo de FRISTROM y WESTENBERG, ya citado, en el VIII Simposio sobre Combustión.

Asimismo, la compleja cinética química de la oxidación del metano (156), que es el más sencillo de los hidrocarburos, ha sido estudiada muy exhaustivamente hasta establecer algunos esquemas simplificados, cuya validez pueda intentar confirmarse por vía teórica y experimental (157).

También se dispone de mediciones experimentales y de cálculos teóricos sobre los coeficientes de transporte de esta llama a temperaturas altas (158).

Por consiguiente, es de esperar que durante los próximos años se trate también teóricamente este caso con un detalle comparable al que hemos visto para la llama de la mezcla de hidrógeno y oxígeno.

Sin embargo, en este aspecto la situación es, hasta el momento, mucho menos satisfactoria para la llama del metano, cuyos únicos cálculos teóricos publicados son muy rudimentarios y se reducen a considerar una reacción global que controla el proceso y a aplicar el método de Zeldovich, Frank-Kamenetskii, Semenov (159) o la regla

(156) FRISTROM, en el trabajo citado del IX Simposio sobre la Combustión, señala que las quince especies a que da lugar el proceso pueden combinarse en un centenar de reacciones, las cuales se reducen rápidamente a unas cincuenta que merecerían consideración.

(157) Ver, además de la bibliografía que acabamos de citar, así como de la que se menciona después en relación con el trabajo de DE GROAT y ABBETT y de la genérica sobre la Cinética Química de la Combustión que se dio al comienzo, especialmente la obra de FRISTROM y WESTENBERG que allí se cita, los siguientes trabajos: C. P. FENIMORE y G. W. JONES: *Rate of Reaction of Methane with H Atoms and OH Radicals in Flames*. «*Jour. Phys. Chem.*», 1961, págs. 2200 y siguientes; W. E. WILSON: *Structure, Kinetics and Mechanism of Methane-Oxygen Flame Inhibited with Methyl Bromide*. «*Tenth Symp. on Comb.*», ya citado, páginas 47-54; R. V. BLUNDELL, W. G. A. COOK, D. E. HOARE y G. S. MILNE: *Rates of Radical Reactions in Methane Oxidation*. «*Tenth Symp. on Comb.*», págs. 445-52; G. P. GLASS, G. B. KISTIAKOWSKY, J. V. MICHAEL y H. NIKI: *The Oxidation Reactions of Acetylene and Methane*. «*Tenth Symp. on Comb.*», págs. 513-522; F. I. DRYER e I. GLASMAN: *High Temperature Oxidation of Carbon Monoxide and Methane*. «*Fourteenth Symp. on Comb.*», The Comb. Inst., 1973, págs. 987-1003; J. PEETERS y G. MAHNEN: *Reaction Mechanisms and Rate Constants of Elementary Steps in Methane-Oxygen Flames*. *Idem id.*, págs. 133-46.

(158) Ver los trabajos de FRISTROM et al., ya citados, del «*Jour. Phys. Chem.*». También, R. E. WALKER y A. A. WESTENBERG: *Molecular Diffusion Studies in Gases at High Temperature*. IV. *Interpretation of the $\text{CO}_2\text{--O}_2$, $\text{CH}_4\text{--O}_2$, $\text{H}_2\text{--O}_2$, CO--O_2 and $\text{H}_2\text{O--O}_2$ Systems*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1960, págs. 486-42.

(159) G. I. KOZLOV: *On High-Temperature Oxidation of Methane*. «*Seventh Symp. on Comb.*», ya citado, págs. 142-49.

del «centroide» de Spalding (160), sin que se haya dado a conocer un análisis con cinética química más realista en las condiciones de la llama, si bien existe un cálculo de De Groat y Abbett (161) con un esquema cinético complejo, pero bajo las condiciones de una mezcla homogénea que se darían en un reactor perfectamente mezclado, como el que correspondería, por ejemplo, a un caso de combustión supersónica (162).

El ejemplo tiene interés porque utiliza un esquema que incluye 13 especies químicas distintas y 13 ecuaciones de reacción que pueden producirse en las dos direcciones opuestas y con velocidades distintas (lejos del estado de equilibrio).

Además en él se propone un método de integración numérica del sistema diferencial correspondiente al proceso, el cual constituye un perfeccionamiento importante sobre la aplicación propuesta por Moretti (163) del método de Runge-Kutta para el tratamiento de este tipo de problemas, donde aparecen inestabilidades matemáticas de naturaleza similar a las que hemos descrito para las llamas.

Finalmente; una llama de hidrocarburo sobre la que se está trabajando también intensamente, mediante una combinación de observaciones experimentales y de cálculos teóricos análogos a los descritos para la del hidrógeno, es la de combustión del acetileno (164).

(160) Ver el trabajo de BRADLEY y HUNDY del 13.º Simposio sobre Combustión, citado al tratar de la medición experimental de la velocidad de propagación de esta llama.

(161) J. J. DE GROAT y M. ABBETT: *A Computation of One-Dimensional Combustion of Methane*. «AIAA Jour.», 1965, págs. 381-83.

(162) H. C. WILLIAMS, H. C. HOTTEL y A. C. MORGAN: *The Combustion of Methane in a Jet-Mixed Reactor*. «Twelfth Symp. on Comb.», ya citado, páginas 913-24. También, R. M. R. HIGGIN y A. WILLIAMS: *A Shock-Tube Investigation of the Ignition of Lean Methane and n-Butane Mixtures with Oxygen*. «Twelfth Symp. on Comb.», págs. 579-90.

(163) G. MORETTI: *A New Technique for the Numerical Analysis of Nonequilibrium Flows*. «AIAA Jour.», 1964, págs. 223-29.

(164) Ver, por ejemplo, además del trabajo de MICHAEL y NIKI, ya citado, los siguientes: W. G. BROWNE, R. P. PORTE, J. D. VERLIN y A. H. CLARK: *A Study of Acetylene-Oxygen Flames*. «Twelfth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 1035-47, donde se encontrará además bibliografía complementaria, así como EBERIUS et al., previamente citados en relación con la llama de combustión del hidrógeno: *Structure of Lean Acetylene-Oxygen Flames*. «Fourteenth Symp. on Comb.», 1973, páginas 147-56.

8. LLAMAS ADIABÁTICAS

Hasta aquí se han considerado solamente llamas adiabáticas; pero existen casos en que es necesario tomar en consideración las pérdidas de calor que se pueden producir, no sólo en forma localizada, como ocurre en el caso del estabilizador de Hirschfelder y en algunos otros modelos considerados después (165) sino también y, especialmente, cuando se trata de pérdidas distribuidas a lo largo de la onda como son, por ejemplo, las debidas a un transporte de calor transversal motivado por la propiedad de una pared fría, o las originadas por la radiación de la llama.

La cuestión tiene interés práctico en relación con la existencia de los llamados «límites de inflamabilidad» de las mezclas combustibles (166).

El hecho experimental que plantea el problema es el siguiente (167):

Cuando se determina experimentalmente por algún procedimiento normalizado la velocidad de propagación de la llama de una mezcla combustible y se estudia la variación de aquélla en función de la composición de la mezcla, se obtiene una curva como la de la figura VI-23, según la cual la velocidad es máxima en un punto que coincide o está próximo al de la relación estequiométrica y disminuye al variar la composición, tanto para mezclas ricas como pobres, de acuerdo, hasta este punto, con las predicciones de la teoría de las llamas adiabáticas que hemos desarrollado hasta aquí.

Pero ocurre, sin embargo, que mientras que esta teoría predice la existencia de una velocidad de propagación de la llama para cualquier valor de la composición, la cual varía de modo continuo con ésta y tiende a cero cuando el porcentaje inicial del combustible tiende a cero o al 100 por 100, experimentalmente se observa la imposibilidad de mantener una llama que se propague a través de la mezcla cuando su riqueza queda por debajo de un límite inferior, mayor que cero (límite inferior de inflamabilidad) o por encima de un límite superior,

(165) J. ADLER y D. B. SPALDING: *One-Dimensional Laminar Flame Propagation with an Enthalpy Gradient*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1961, págs. 53-78.

(166) Ver, por ejemplo, B. P. MULLINS y S. S. PENNER: *Explosions, Detonations, Flammability and Ignition*. Pergamon Press, 1958.

(167) Ver, por ejemplo, L. A. LOVACHEV et al.: *Flammability Limits: An Invited Review*. «Comb. and Flame», 1973, págs. 259-89.

menor que 100 por 100 (límite superior de inflamabilidad). Además, como muestra la figura VI-23, al aproximar la composición a cada uno de los límites citados, la llama cesa de propagarse para una velocidad límite que no es nula.

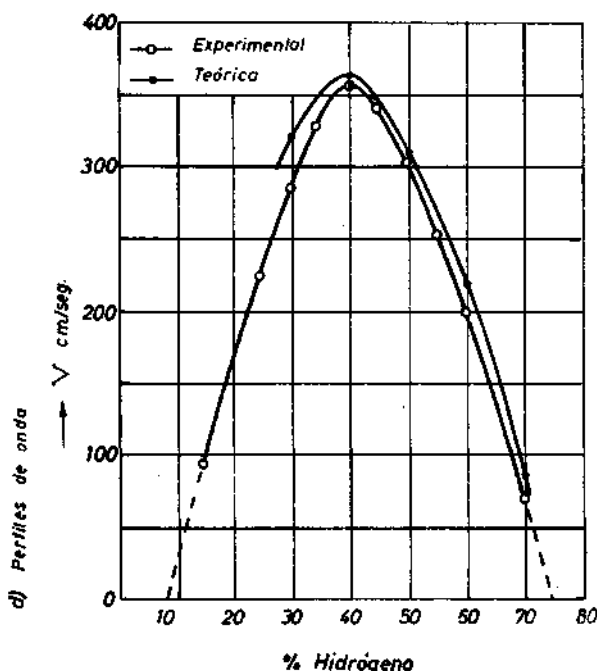


Fig. VI-23.—Curvas teórica y experimental de la velocidad de propagación de la llama de la mezcla hidrógeno-aire, en función de la composición de la mezcla, según Günther y Janish.

Si bien, tanto las composiciones como las velocidades de propagación correspondientes a los dos límites de inflamabilidad citados dependen un tanto de las condiciones experimentales (168), lo que impide obtener unos valores absolutos bien definidos, el hecho de que se observe la presencia sistemática de tales límites plantea la cuestión de investigar si los mismos son atribuibles a la estructura intrínseca de la llama, en cuyo caso debiera poder justificarse su existencia me-

(168) Ver J. W. LINNETT y C. J. S. M. SIMPSON: *Limits of Inflammability*. «Sixth Symp. on Comb.», págs. 20-27. También, G. DIXON-LEWIS y G. L. ISLES: *Limits of Inflammability*. «Seventh Symp. on Comb.», págs. 475-483.

dian­te un análisis seme­jante al que he­mos apli­cado para el estudio de la llama adia­bática, plana e indefi­nida, pero incluyendo en este modelo los factores que puedan ser la causa de la existencia de aquéllos.

Además, si la respuesta es positiva, la teoría debería permitir calcular con una razonable aproximación sus valores y los de las correspondientes velocidades de propagación, así como la forma en que influyen en ellos las características iniciales de composición y estado de la mezcla, tales como la presión y temperatura de los gases fríos, etc.

A este respecto, se ha tratado de explicar la existencia de tales límites mediante consideraciones de estabilidad interna de la onda (169), si bien con poco éxito hasta el momento, particularmente al tratar de establecer correlaciones con los límites de inflamabilidad observados.

Más satisfactorios son, en cambio, los resultados que se obtienen al incorporar al estudio de la estructura y propiedades de la llama la influencia de las pérdidas de calor a que nos referimos al comienzo, producidas por efectos de conducción y de radiación.

En tales condiciones se comprueba, efectivamente, que si las pérdidas de calor son suficientemente elevadas, la llama no puede propagarse, existiendo una velocidad de propagación límite, no nula, para un valor de aquéllas, la cual determina la existencia del límite.

Además ocurre que para cada valor de la pérdida, menor que la correspondiente al límite de inflamabilidad, existen dos valores propios en lugar del único que se da en las llamas adiabáticas, a los cuales corresponden dos velocidades de propagación distintas, cuya existencia ha podido observarse experimentalmente bajo condiciones adecuadas (170) y de las que la más pequeña resulta inestable.

El análisis de la estructura de la onda de combustión con pérdidas distribuidas de calor ha sido efectuado principalmente por Spal-

(169) Ver más adelante el estudio de la estabilidad de las llamas. También J. B. ROSEN: *Combustion Wave Stability and Flammability Limits*, «*Jour. Chem. Phys.*», 1954, págs. 750-51. También G. VON ELBE y B. LEWIS: *Excess Enthalpy and the Initiation and Stability of Combustion Waves*, «*Seventh Symp. on Comb.*», 1959, págs. 342-46.

(170) D. B. SPALDING y V. S. YUMLU: *Experimental Demonstration of the Existence of Two Flame Speeds*, «*Comb. and Flame*», 1959, págs. 553-56.

ding (171), Mayer (172), von Karman (173), Chen y Toong (174), Berlad y Yang (175) y Adler (176). También se ha ocupado de la cuestión el grupo de Combustión del INTA (177).

La idea básica de la teoría consiste en incorporar a la ecuación de la energía, en el sistema diferencial de las llamas, un término fenomenológico que tome en cuenta las pérdidas de calor por conducción o radiación y en alterar las condiciones en el límite caliente, donde la temperatura final T_c de los gases quemados es, en este caso, un dato del problema y debe ser inferior a la temperatura adiabática de combustión T_a , empleada hasta aquí.

Por ejemplo, en muchos de los trabajos citados se supone que los gases quemados se enfrían hasta la temperatura T_0 de los gases fríos, en cuyo caso sería $T_c = T_0$, situación que corresponde aproximadamente a la de una llama que se propaga en el interior de un tubo cuyas paredes se mantienen a la citada temperatura T_0 .

Debe advertirse, sin embargo, que el grado de desarrollo a que ha llegado esta teoría, hasta el momento es muy inferior al que se ha alcanzado en el caso de las llamas adiabáticas, limitándose básicamente por ahora al estudio de las reacciones globales que allí vimos también, pero sin abordar aquí todavía esquemas cinéticos más complejos como los que corresponden a las llamas reales.

La ecuación de la energía que debe sustituir a la [57] de la llama adiabática para el caso de dos únicas especies químicas (reactantes y

(171) D. B. SPALDING: *A Theory on Inflammability Limits and Flame Quenching*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1957, págs. 88-100.

(172) E. MAYER: *A Theory of Flame Propagation Limits due to Heat Loss*. «Comb. and Flame», 1957, págs. 43 8y sigts.

(173) TH. VON KARMAN: Ver la obra de MULLINS y PENNER, ya citada, páginas 73-78, así como la de F. A. WILLIAMS, págs. 191 y sigts.

(174) T. N. CHEN y T. Y. TOONG: *Structure and Propagation of Laminar Flames Near a Heat Sink*. «Comb. and Flame», 1960, págs. 313-23.

(175) A. L. BERLAD y C. H. YANG: *A Theory of Flame Extinction Limits*. «Comb. and Flame», 1960, págs. 325-33; C. H. YANG: *Burning Velocity and the Structure of Flames near Extinction Limits*. «Comb. and Flame», 1961, págs. 163-74; C. H. YANG: *Theory of Ignition and Auto-ignition*. «Comb. and Flame», 1962, págs. 215-25.

(176) J. ADLER: *One-Dimensional Laminar Flame Propagation with Distributed Heat Losses: Thin Flame Theory*. «Comb. and Flame», 1963, págs. 39-42.

(177) G. MILLÁN e I. DA RIVA: *Some Contributions to Laminar Flame Theory*. Second Int. Congress of ICAS, Zurich, 1960, INTA, 1960. «Advances in Aeronautical Sciences», vol. 3. Pergamon Press, 1962, págs. 447-64.

productos) con una única reacción global de la forma [4], cuando existen además pérdidas de calor distribuidas a lo largo de la onda es, como se comprueba fácilmente, la siguiente:

$$\frac{d^2 \tau}{d \xi^2} - \frac{d \tau}{d \xi} + \Gamma \cdot \Phi(Y, \tau) = \Gamma \cdot \alpha \cdot f(\tau), \quad [215]$$

donde $f(\tau)$ es el término fenomenológico adimensional que mide la pérdida de calor en el punto ξ , debida a los efectos de conducción transversal o de radiación, la cual se supone que depende solamente de la temperatura adimensional τ de la llama en él. En dicha expresión α es un parámetro que mide la intensidad de la pérdida, cuya presencia explícita permite dar a $f(\tau)$ una forma normalizada.

Concretamente, si es $Q(T)$ el calor perdido por unidad de volumen y por unidad de tiempo en el punto x de la llama donde la temperatura es T , la relación entre $Q(T)$ y $\alpha f(\tau)$ es la siguiente, como se comprueba fácilmente al tener en cuenta la notación adimensional definida en [53]:

$$\alpha f(\tau) = \frac{Q(T)}{2 C_p (T_f - T_0) K e^{-\theta_0}}, \quad [216]$$

En cuanto a la forma de $f(\tau)$, evidentemente depende de la causa de la pérdida de calor. Cuando se supone que los gases quemados se enfrían finalmente hasta la temperatura T_0 de los gases frescos, como ocurre generalmente, se suele adoptar para $f(\tau)$ una expresión de la forma:

$$f(\tau) = \tau^b, \quad [217]$$

donde el valor del exponente b depende del tipo de pérdida. Por ejemplo, en el caso de pérdidas por conducción se toma $b = 1$, mientras que si aquéllas son debidas principalmente a la radiación está más justificado emplear el valor $b = 4$.

En definitiva, las pérdidas distribuidas de calor introducen en la ecuación de la energía el nuevo término del segundo miembro de [215], el cual depende además, como se ve, del parámetro Γ cuyo valor propio se busca.

En cuanto a la ecuación de conservación de las especies químicas, evidentemente no varía, por lo que está dado por [58].

$$\frac{d^2 Y}{d \xi^2} - L \frac{d Y}{d \xi} - L \cdot \Gamma \cdot \Phi(Y, \xi) = 0. \quad [218]$$

Finalmente, por lo que respecto a las condiciones en los límites, las del extremo frío tampoco varían, mientras que las del extremo caliente deben incorporar la hipótesis de que la temperatura final de los gases quemados toma, como hemos dicho, un valor τ_* ; por ejemplo, el de los bases frescos $\tau_* = \tau_0 = 0$.

Con ello se obtiene, en lugar de [59], el conjunto de condiciones:

$$\left. \begin{aligned} \xi \rightarrow -\infty: \quad \tau, Y, \frac{d \tau}{d \xi} y \frac{d Y}{d \xi} &\rightarrow 0; \\ \xi \rightarrow +\infty: \quad \tau &\rightarrow \tau_*; Y \rightarrow 1; \frac{d \tau}{d \xi} y \frac{d Y}{d \xi} &\rightarrow 0, \end{aligned} \right\} \quad [219]$$

debiendo existir, además, una temperatura de encendido $\tau_i > 0$, por debajo de la cual es $\Phi \equiv 0$.

Incidentalmente debe señalarse aquí que, si bien los métodos de solución aproximada que enumeramos después emplean las condiciones en los límites, dadas en [219], Gray y Yang, así como Adler (178), analizando el comportamiento asintótico de las ecuaciones diferenciales [215] y [218] para $\xi \rightarrow +\infty$, han demostrado que, en general, la condición $Y \rightarrow 1$ no se cumple porque la reducción de temperaturas producida por el enfriamiento en la zona final de la llama es suficiente para congelar la reacción antes de que llegue a completarse.

Sin embargo, aun cuando no se dispone de soluciones exactas que permitan comparar resultados, parece poder asegurarse que, en general, el error de la condición $Y = 1$ en el valor del límite de inflamabilidad o de la velocidad de propagación de la llama es pequeño,

(178) B. F. GRAY y C. H. YANG: *Boundary Conditions of the Downstream Singularity in Non-adiabatic Flames*. I. «Comb. and Flames», 1966, págs. 199-200, y II. Idem, págs. 441-42; J. ADLER: *Downstream Boundary Conditions of Non-adiabatic, One-dimensional, Laminar Flames*. «Comb. and Flames», 1967, páginas 85-86, y «Comb. and Flames», 1967, pág. 442.

si bien el problema tiene interés desde el punto de vista matemático.

Volviendo al problema principal, es claro que la presencia del término $\Gamma \cdot \alpha \cdot f(\tau)$ en la ecuación de la energía introduce serias complicaciones para la integración del sistema [215], [218], con las condiciones en los límites [219], así como para el análisis cualitativo de las propiedades de la solución.

Por ejemplo, en el caso de la llama adiabática se vio que las ecuaciones [57] y [58] eran idénticas en el caso de que el número de Lewis-Semenov L de la mezcla fuese igual a la unidad, lo cual, combinado con la igualdad de condiciones en los límites [59], proporcionaba la integral primera [66], cuya existencia reducía el problema a la integración de una única ecuación de segundo orden: la de la energía para la determinación de τ en función de ξ .

Por el contrario, en el caso que estamos analizando aquí no existe aquella integral, por lo que es necesario operar con el sistema completo.

Asimismo, se vio allí que, al ser τ una función monótona de ξ , era posible sustituir esta variable independiente por aquella, lo que conducía, por ejemplo, al método de la ecuación integral de Klein.

Aquí, por el contrario, tampoco es posible dicha sustitución porque la distribución $\tau(\xi)$ de temperaturas generalmente pasa por un máximo intermedio τ_m entre los valores $\tau_0 = 0$ y τ_c de los extremos.

Por todo lo cual y con objeto de disponer de soluciones aproximadas que permitan apreciar el comportamiento de la llama bajo las condiciones supuestas, se han introducido simplificaciones importantes en los trabajos mencionados anteriormente, que hagan tratable el problema en forma analítica.

Por ejemplo; Spalding, en la referencia citada, separa la llama en dos regiones: una primera de combustión, donde supone nula la pérdida de calor, lo que permite tratar el problema como una llama adiabática, seguida de una segunda región de composición invariable, donde se produce la pérdida de calor por radiación y el problema puede tratarse como uno de conservación y conducción puras, con sumideros de calor distribuidos según una ley dada por [217].

Con ello y empleando para la velocidad de reacción química una ley de tipo [71] y números de Lewis-Semenov iguales a la unidad, se obtienen fácilmente soluciones separadas en ambas zonas, las cuales se empalman en el punto de coincidencia.

La hipótesis de limitar las pérdidas a la zona de los productos de

la combustión, lo cual constituye una pura simplificación en orden a facilitar la obtención de una solución analítica que permita deducir consecuencias de carácter cualitativo, ha sido objetada por Berlag sobre la base de observaciones experimentales con la llama de descomposición del ozono y, sobre todo, de los resultados de las integrales numéricas a que nos referimos después, los cuales muestran que la zona más importante desde el punto de vista de las pérdidas de calor parece ser precisamente la de reacción (179).

Von Karman, en cambio, toma en cuenta la pérdida de calor a lo largo de toda la onda, pero supone que la velocidad de reacción química de la mezcla es constante, lo que le obliga a introducir una temperatura de encendido τ_i , de cuyo valor depende fuertemente la solución, como es sabido, cuando se hace $w = \text{const.}$ Pero esta drástica simplificación, sin embargo, le permite obtener una solución analítica, cuando la pérdida de calor es una función lineal de la temperatura ($b = 1$) en toda la onda, la cual queda dividida en este caso en una primera zona de calentamiento; una segunda de combustión y una tercera de enfriamiento de los gases quemados.

Adler, por su parte, emplea un concepto de «llama de espesor muy pequeño», utilizado con éxito por él y por Spalding en el estudio de una llama por pérdidas localizadas en ambos extremos (180), en el cual se supone que la reacción química tiene lugar en un entorno del punto de temperatura máxima, lo que permite obtener soluciones con discontinuidades en los gradientes de la temperatura y de la composición, de tipo similar a las que vimos en el método aproximado de Semenov para el estudio de las llamas con reacciones en cadena.

Más recientemente, Adler y Kennerley (181) han puesto a punto un método analítico aproximado en el que utilizan como variable independiente la concentración Y de la especie química, que es función monótona de ξ y como variables dependientes la temperatura τ y la pendiente $\zeta = \frac{dY}{d\xi}$ de la concentración.

(179) Ver A. L. BERLAG: *Radiative Features of Ozon-Oxygen Mixture Decomposition Flames and Non-adiabatic Flame Theory*. «Comb. and Flames», 1961, págs. 301-2, así como la respuesta de SPALDING en la misma revista, pág. 389, y la contraréplica de BERLAG: *Inflamability Limits and Flame Radiation Loss Rates*, en la misma página.

(180) Ver el trabajo de ambos autores citado anteriormente.

(181) J. ADLER y J. A. KENNERLEY: *Steady Laminar Flame Propagation with Conductive Heat Losses*. «Comb. and Flames», 1966, págs. 191-194.

Con ello obtienen un par de ecuaciones diferenciales de tipo similar a las [60] y [61], cuya solución aproximada abordan mediante hipótesis plausibles sobre la forma de τ y ζ como funciones de Y , habida cuenta de su comportamiento en los extremos del intervalo $Y = 0$ a $Y = 1$. En particular, para el caso de velocidades de reacción química de la forma [71] con energías de activación elevadas obtienen una regla del «centroide» similar a la de Spalding para las llamas adiabáticas y que se reduce a ésta por paso al límite cuando la intensidad α de la pérdida de calor tiende a cero.

Hay que señalar, sin embargo, que, como ha puntualizado Yang (182), la solución de una llama no adiabática no converge hacia la solución de una llama adiabática cuando la intensidad de la pérdida de calor tiende a cero, a causa de la discontinuidad en la condición límite de la temperatura en el extremo caliente.

Por lo que respecta al grupo de combustión del INTA, en el trabajo mencionado se obtienen soluciones exactas en forma explícita para llamas con pérdidas de calor de la forma $b = 1$ (por conducción) a través de toda la onda, para velocidades de reacción química con energía de activación nula ($\phi_a = 0$) y para cualquier valor del número de Lewis-Semenov.

Si se desea obtener soluciones más elaboradas y realistas que las comentadas hasta aquí, hay que recurrir a la aplicación de métodos de integración numérica como los que vimos para las llamas adiabáticas, pero básicamente más laboriosos.

Por ejemplo, C. H. Yang, en el trabajo de 1961 previamente citado, emplea un calculador analógico para obtener soluciones del sistema diferencial anterior, con un término de Arrhenius en la velocidad de reacción química (energía de activación grande) y con pérdidas por conducción ($b = 1$) combinadas con otras por radiación ($b = 4$) a lo largo de toda la onda.

El resultado común de todos estos estudios es que la curva de la velocidad de propagación de la llama en función del parámetro α que mide la intensidad de las pérdidas de calor es de la forma que muestra la figura VI-24 tomada del trabajo antes citado de Da Riva y el autor.

Por consiguiente, para cada valor de la intensidad α de la pérdida de calor que sea inferior a α_i , existen dos velocidades distintas de propagación de la llama V_i y V_s . Para $\alpha = \alpha_i$, ambas velocidades

(182) C. H. YANG: «Comb. and Flame», 1962, págs. 215 y sigts.

coinciden en la V_1 correspondiente al límite de inflamabilidad y para $\alpha > \alpha_1$ no existe propagación de la llama. El valor de $\alpha = \alpha_1$ determina, pues, el límite de inflamabilidad buscado.

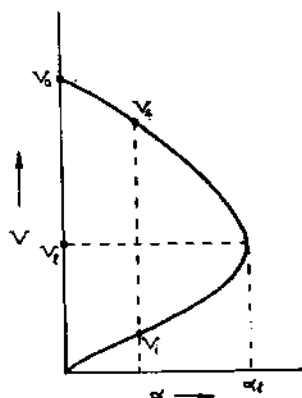


Fig. VI-24.—Llama con pérdidas de calor distribuidas.

En particular, V_0 es la velocidad de la llama adiabática.

Como se ha dicho, de las dos velocidades correspondientes a cada caso, la inferior no se observa generalmente porque es inestable, como ha demostrado Spalding en el trabajo ya citado (183).

Para terminar con esta breve exposición de la teoría de las llamas no adiabáticas hay que mencionar otros modelos que han servido de base para explicar la existencia de límites de inflamabilidad por causas distintas a la pérdida de calor.

Aparte de la teoría de la inestabilidad, a que ya hemos aludido al comienzo (184), otros autores han tratado de explicar tales límites por la inexistencia de soluciones reales, bajo condiciones determinadas, para el caso de llamas con valores propios múltiples (185); por

(183) Ver también la obra de MULLINS y PENNER.

(184) Ver también P. H. KYDD y W. I. FOSS: *A Comparison of the Influence of Heat Losses and Three-dimensional Effects on Flammability Limits*, «Comb. and Flames», 1964, págs. 267-273.

(185) J. F. WEHNER: *On the Theory of Flammability Limits*, «Comb. and Flames», 1963, págs. 309-313.

el comportamiento de algunas reacciones en cadena (186) o por la pérdida de radicales (187).

Por último, Lovachev (188), a quien ya nos hemos referido en relación con los métodos de cálculo de las llamas con reacciones en cadena, ha dado recientemente forma matemática a la idea expuesta reiteradamente con anterioridad (189) de que la causa de los límites puede encontrarse en el efecto de flotabilidad de los gases quemados respecto de la masa de gases fríos que los rodean, cuando se inicia la llama en una mezcla combustible.

Un problema que guarda relación con el que acabamos de describir es el de la influencia de la proximidad de una pared fría en la estructura y velocidad de propagación de una llama.

La cuestión ha sido tratada en forma cualitativa y semiempírica por Lewis y von Elbe (190), pero el tratamiento matemático correcto del problema está lejos de haberse conseguido, porque la llama, en la proximidad de la pared, pierde necesariamente su carácter unidimensional, debiendo operarse con ecuaciones en derivadas parciales de tipo similar a las que se utilizan en el estudio de la capa límite.

Un primer intento de estudio sobre estas bases, el cual contiene la formulación matemática adecuada, fue desarrollado por von Karman y el autor en 1952 (191).

Un tratamiento mucho más reciente de un problema similar, pero en régimen transitorio, el de la llama que se extingue al apro-

(186) Ver, por ejemplo, VAN TIGGELEN y J. BURGER: *Considerations on the Theoretical Existence of Fundamental Flammability Limits in Gaseous Mixtures*. «Comb. and Flame», 1964, págs. 343-345.

(187) DA RIVA y el autor, en el trabajo citado, han estudiado un modelo correspondiente a una difusión transversal de centros activos, demostrando que su efecto no cambia el carácter unitario de la solución, pero reduce la velocidad de la llama, la cual se extingue para un valor determinado de la difusión transversal.

(188) L. A. LOVACHEV: *The Theory of Limits of Flame Propagation in Gases*. «Comb. and Flame», 1971, págs. 275-278.

(189) Ver, por ejemplo, el trabajo ya citado de LINETT y SIMPSON en el VI Symposium de Combustión, así como R. F. SIMMONS y N. WRIGHT: *The Burning Velocities of Near Limit Mixtures of Propane, Air and Hydrogen Bromide*. «Comb. and Flame», 1972, págs. 203-206.

(190) B. LEWIS y G. VON ELBE: *Combustion, Flames and Explosions*, ya citado, págs. 317 y sigts.

(191) TH. VON KARMAN y G. MILLÁN: *Thermal Theory of Laminar Flame Front Near a Cold Wall*. «Fourth. Symp. Comb.», ya citado, págs. 173-177.

ximarse a una pared fría, ha sido desarrollado por Kurkov y Mursky (192).

9. LLAMAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

Hasta este punto y con la excepción citada de la llama próxima a una pared fría, hemos considerado solamente el caso unidimensional de llamas planas e indefinidas.

Existen cuestiones, sin embargo, principalmente relacionadas con la estabilidad hidrodinámica que consideraremos después, para las que interesa conocer la influencia de la forma de la superficie de la onda en el comportamiento de la llama, especialmente por lo que se refiere a la variación de su velocidad de propagación con respecto a la de la onda plana en función de la curvatura de aquélla.

Efectivamente, conociendo la influencia de la conducción térmica y de la difusión en la velocidad de propagación de la llama, puede anticiparse que cuando la curvatura de la onda sea del orden de magnitud de su espesor, habrán de esperarse variaciones de aquella velocidad determinadas por el incremento del transporte de calor hacia las zonas cóncavas de la onda, así como por la acción de la curvatura en la difusión de las distintas especies químicas.

Por ello se han llevado a cabo diversas investigaciones sobre llamas con simetría cilíndrica o esférica, con el propósito de establecer estos aspectos.

Por otra parte, por lo que respecta a las llamas esféricas existe otro motivo de interés independiente para su estudio, porque la combustión de gotas en atmósfera oxidante da lugar a la formación de llamas esféricas de difusión, las cuales han sido objeto de estudios teóricos y experimentales muy completos (193). Asimismo, la com-

(192) A. P. KURKOV y W. MIRSKEY: *An Analysis of the Mechanism of Flame Extinction by a Cold Wall*. «Twelfth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 615-624.

(193) Ver, por ejemplo, los trabajos del Prof. Sánchez Tarifa y sus colaboradores del Grupo de Combustión del INTA. En especial, C. SÁNCHEZ TARIFA, P. PÉREZ DEL NOTARIO y F. GARCÍA MORENO: *Combustion of Liquid Monopropellants and Bipropellants in Droplets*. «VIII Symp. on Comb.», ya citado, páginas 1035-56. Un trabajo de revisión muy reciente y con extensa bibliografía de A. WILLIAMS: *Combustion of Droplets of Liquid Fuel: A Review*. «Comb. and Flame», 1973, págs. 1-31.

bustión de gotas de monopropulsantes origina también llamas de tipo esférico (194).

En el caso de las llamas premezcladas, cilíndricas o esféricas, que aquí nos ocupa, el proceso continúa siendo unidimensional, puesto que la única variable independiente es la distancia radial r al origen, lo que conduce también a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Pero ocurre, sin embargo, que su tratamiento resulta sustancialmente más complicado que el de las llamas planas, especialmente como consecuencia de que el sistema deja de ser autónomo, a causa de la presencia explícita de r en el mismo.

En efecto, como se comprueba fácilmente, el sistema diferencial [2] a [5] de la onda plana queda sustituido en este caso por el siguiente:

Ecuación de continuidad de la masa:

$$2 \pi v r^v \rho v = m = \text{const.}; \quad [220]$$

Ecuación de conservación de la energía:

$$2 \pi v r^v \lambda \frac{dT}{dr} = m [C_p (T - T_0) - q \epsilon]; \quad [221]$$

Ecuación de conservación de las especies:

$$m \frac{d\epsilon}{dr} = 2 \pi v r^v w; \quad [222]$$

Ecuación de difusión:

$$\rho D \frac{dY}{dr} = \frac{m}{2 \pi v r^v} (Y - \epsilon), \quad [223]$$

donde el parámetro v toma respectivamente el valor 1 en las llamas cilíndricas y el valor 2 en las esféricas.

(194) Ver, por ejemplo, la obra de WILLIAMS, reiteradamente citada, páginas 231 y sigts., donde se encuentra además bibliografía complementaria sobre la materia.

A este sistema hay que añadirle la condición [1] de presión constante que subsiste, evidentemente, en este caso, así como la ecuación de estado de la mezcla.

En el sistema que acabamos de formular, m es el flujo de masa por unidad de tiempo a través de un cilindro de altura unidad o de una esfera de radio cualquiera, en torno al origen, flujo que es constante en virtud de [220].

En cuanto a las condiciones de contorno, por lo que respecta al límite frío hay que distinguir entre la hipótesis de que exista un estabilizador poroso del tipo de Hirschfelder (195), de radio r_c , en cuyo caso aquellas condiciones hay que especificarlas sobre la superficie del mismo, y el caso en que la onda se prolongue hasta el origen $r = 0$, el cual constituye entonces una fuente puntual de mezcla combustible, de intensidad m .

En este caso, aquellas condiciones hay que darlas para el punto singular $r = 0$, pero con las salvedades correspondientes al hecho de que para $r \rightarrow 0$, la velocidad $v \rightarrow \infty$.

Por otra parte, si no existe estabilizador de Hirschfelder, hay que postular también aquí una temperatura de encendido o bien una forma apropiada de la velocidad de reacción.

Por lo que respecta al extremo caliente, las condiciones para $r \rightarrow \infty$ son análogas a las de la llama plana para $x \rightarrow +\infty$.

Una dificultad que ya hemos apuntado, derivada del carácter no autónomo del sistema, resulta de la imposibilidad de eliminar la coordenada r entre las ecuaciones [221] y [223], a diferencia de lo que ocurrían con x en el caso de la llama plana, donde con dicha eliminación se obtenía la doble ventaja de reducir en una unidad el número de ecuaciones y la de operar en un intervalo (T_0, T_f) finito, lo que resulta especialmente útil al aplicar métodos de integración numérica como los que, en general, hay que emplear.

Por lo demás, la comparación de [221] y [223], unida a la identidad de condiciones en los límites para la temperatura y la concentración, muestran que cuando el número de Lewis-Semenov es igual a la unidad, subsiste entre T y T la relación [31] de las llamas planas, la cual permite eliminar del problema la concentración y reducirlo con ello a la integración de las dos ecuaciones [221] y [222].

(195) Se dispone de técnicas para la observación experimental de este tipo de llamas. Ver, por ejemplo, la obra de FRISTROM, ya citada, pág. 107.

al no depender w explícitamente de Y , o bien a la integración de la ecuación de segundo orden:

$$\frac{1}{r^v} \frac{d}{dr} \left(r^v \lambda \frac{dT}{dr} \right) - \frac{m C_p}{2 \pi v} \cdot \frac{1}{r^v} \cdot \frac{dT}{dr} + w(T) = 0, \quad [224]$$

que resulta de eliminar ϵ entre aquella, con las condiciones en los límites:

$$\left. \begin{aligned} r = 0, & \quad T = T_0; \\ r = \infty, & \quad T = T_f. \end{aligned} \right\} \quad [225]$$

Obsérvese, por otra parte, que el planteamiento del problema es aquí distinto del de la llama plana, puesto que en el presente caso, en general, el flujo de masa m es un dato inicial, en lugar de ser un «valor propio» a determinar, como ocurría allí.

En efecto, en las llamas cilíndricas y esféricas, lo que se busca es la estructura de la llama correspondiente a un flujo dado, lo que equivale a buscar la curvatura que dé la velocidad correspondiente a ese flujo, es decir, la distancia de cada isoterma al origen, para ese valor del flujo.

Finalmente, hay que advertir que los casos de llamas cilíndricas y esféricas tratados hasta el momento se refieren aquí también, como en el de llamas con pérdidas de calor, a modelos con cinética química muy simplificada, cuyas soluciones se han obtenido bien sea por integración numérica o analógica de las ecuaciones, bien sea mediante aproximaciones analíticas, en cuyo caso se utilizan además expresiones muy rudimentarias para la velocidad de reacción, tanto en llamas cilíndricas (156) como para las esféricas (197).

(196) J. MENKES: *Analytical Solution of a Flame with Cylindrical Symmetry*. «VIII Simp sobre Combustión», ya citado, págs. 426-432. También, V. K. JAIN y J. S. EBENEZER: *Analytical Solution of a Steady Cylindrical Flame*. «Comb. and Flame», 1966, págs. 391-393.

(197) D. B. SPALDING, V. K. JAIN y M. D. SAMAIN: *The Theory of Steady Laminar Spherical Flame Propagation*. I. *Equations and Numerical Solutions*. «Comb. and Flame», 1960, págs. 51 y sigts. II. *Analytical Solutions*. «Comb. and Flame», 1961, págs. 11-18. III. *Analogue Solutions*. «Comb. and Flame», 1961, págs. 19-25. También A. A. WESTENBERG y S. FAVIN: *The Theory of a Spherical Premixed Laminar Flame*. «Comb. and Flame», 1960, págs. 161-171.

Sin duda, el más reciente y completo de los trabajos sobre estos tipos de llamas, es el llevado a cabo por Vance y Krier, del Departamento de Ingeniería Aeronáutica y Astronáutica de la Universidad de Illinois, en los Estados Unidos de América (198).

Estos autores han desarrollado un modelo para la estructura de llamas con simetría radial, en una mezcla gaseosa de dos únicas especies químicas, con una reacción de combustión de primer orden, del tipo de Arrhenius, incluido el caso de valores del número de Lewis-Semenov distintos de la unidad.

Las soluciones las obtienen por integración numérica de las ecuaciones del proceso a partir del extremo frío que, en este modelo, es la superficie del estabilizador poroso de simetría radial a través del cual se inyecta la mezcla combustible.

El procedimiento consiste en tantear soluciones con valores iniciales de dos parámetros que miden respectivamente la transferencia de calor a la superficie del estabilizador y el potencial de difusión de los productos de la combustión sobre la misma.

El proceso de integración numérica debe repetirse combinando los valores de aquéllos parámetros hasta obtener una solución que haga coincidir, en un punto indeterminado, que será el extremo caliente de la llama, los valores apropiados de la composición y temperatura de los gases quemados, los cuales se determinan por las condiciones de equilibrio termodinámico de la mezcla.

Vance y Krier han comprobado que el comportamiento de la llama depende básicamente de los valores de los tres parámetros siguientes:

La relación entre la energía de activación de la reacción y la temperatura de los gases quemados en llama adiabática.

El número de Damköhler, que mide la relación entre el tiempo de reacción química y el tiempo de difusión de las especies.

Finalmente, el número de Peclet, igual al producto entre el número de Reynolds y el número de Prandtl del proceso y cuya expresión es:

$$P_e = \frac{\rho_0 C_p V_0 R_0}{\lambda} \quad [226]$$

(198) G. M. VANCE y H. KRIER: *A Theory for Spherical and Cylindrical Laminar Premixed Flames*, «Comb. and Flame», 1974, págs. 365-375.

donde R_0 es el radio del estabilizador y el subíndice cero se refiere a valores medidos en él.

Estos autores han obtenido una familia de soluciones para diversos valores característicos de tales parámetros, una de las cuales aparece representada esquemáticamente en la figura VI-25 a título de ejemplo.

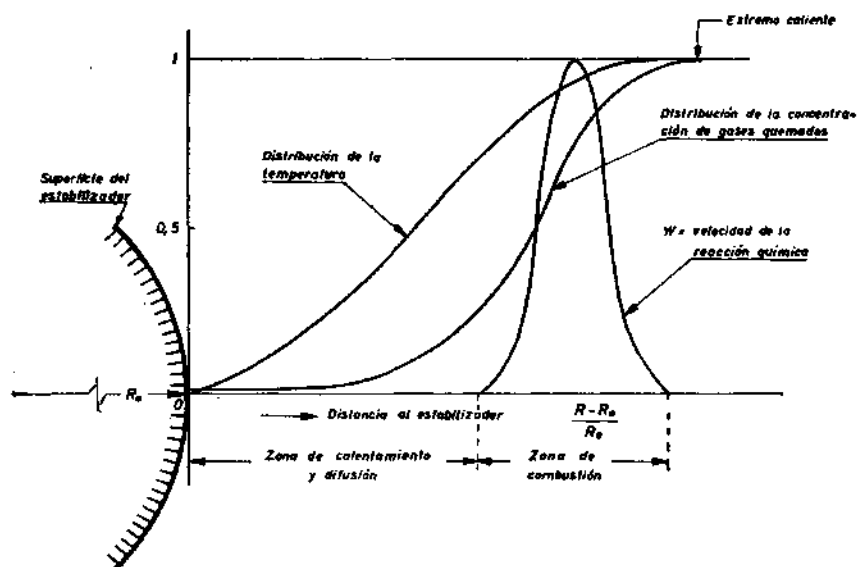


Fig. VI-25.—Esquema de la estructura de la llama esférica de Vance y Krier.

También analizan el comportamiento de magnitudes tales como la distancia de la llama a la superficie del estabilizador, el espesor de la zona de reacción y la velocidad de propagación de aquella, obteniendo resultados que confirman las observaciones experimentales, así como la existencia de una doble velocidad de propagación de la llama, reconocida por Spalding para las llamas no adiabáticas.

10. TEORÍA DE LA ESTABILIDAD DE LAS LLAMAS

Un tema de gran importancia en relación con el comportamiento de las ondas de combustión es el de su estabilidad con respecto a las perturbaciones naturales o forzadas que alteren su estructura interna o su configuración.

La cuestión tiene un gran interés práctico porque las observaciones experimentales muestran que una onda de combustión puede comportarse en forma estable o inestable según sea el tipo de perturbación y en función, también, de la configuración geométrica y de las características fisicoquímicas de de aquélla.

Por ejemplo; se ha observado experimentalmente (199) que en determinados tipos de llamas premezcladas con pesos moleculares, apreciablemente distintos entre el combustible y el oxidante, bajo condiciones determinadas, se rompe la estructura continua del frente de la llama, adquiriendo ésta una configuración celular característica.

Análogamente podrían describirse otros muchos fenómenos que muestran un comportamiento inestable de la llama.

Interesa, por consiguiente, conocer cuáles son las causas que determinan el comportamiento estable o inestable de una llama, así como la razón de que en el caso de inestabilidad adquieran una configuración determinada, al igual de lo que ocurre, por ejemplo, en las ondas de detonación, como hemos visto en el capítulo V.

La cuestión plantea, naturalmente, un doble problema. En primer lugar, es necesario deslindar los campos de estabilidad e inestabilidad, en función de las características tanto de la perturbación como de la onda. Esto puede hacerse mediante una aplicación directa de la Teoría general de la estabilidad de pequeñas perturbaciones. Se trata, por consiguiente, de un problema lineal, si bien con peculiaridades que le confieren una dificultad específica con respecto a otros fenómenos clásicos, como veremos a continuación.

En segundo lugar y puesto que, en muchos casos, la onda perturbada adquiere una configuración característica bien definida, como ocurre, por ejemplo con las citadas llamas celulares, hay que determinar por qué causa la configuración es precisamente esa en lugar de otra. Cuestión ésta cuya respuesta plantea un problema mucho más difícil, evidentemente, a causa del carácter no lineal del problema.

En cuanto al estado actual de las investigaciones teóricas sobre esta materia, la primera cuestión ha sido objeto de estudios completos, especialmente durante las dos últimas décadas, los cuales progresan todavía con modelos cada vez más complejos.

Por el contrario y como cabe esperar, los aspectos no lineales del

(199) Ver G. H. MARKSTEIN: *Instability Phenomena in Combustion Waves*. «Fourth Symp.», ya citado, págs. 44-59.

problema se encuentran todavía en fase muy prematura, sin que exista por el momento una teoría que responda satisfactoriamente a todas las cuestiones que plantea el segundo de los temas propuestos.

Por ello, en lo que sigue vamos a limitarnos a exponer en forma resumida las bases y principales conclusiones del tratamiento matemático de este problema, especialmente por lo que respecta a la teoría de perturbaciones pequeñas.

Comenzando por señalar que mediante esta teoría han sido investigados dos tipos de inestabilidad esencialmente diferentes: la inestabilidad interna, debida a alteraciones de la estructura unidimensional estacionaria de la llama y la estabilidad hidrodinámica, ocasionada por alteraciones de la configuración geométrica del frente de llama:

a) *Estabilidad estructural*.—Por lo que respecta a la primera forma de inestabilidad, los estudios más completos son los llevados a cabo por el profesor Rosen (200), de la Universidad de Princeton, mediante linealización de las ecuaciones no estacionarias de la onda plana en torno a la solución estacionaria que define su estructura (201).

Ello le proporciona para el cálculo de la evolución de las perturbaciones de la velocidad, densidad, temperatura y composición de la onda, un sistema parabólico lineal de ecuaciones en derivadas parciales, respecto del tiempo t y de la distancia x normal a la onda, cuyos coeficientes son funciones de esta distancia, determinadas por los perfiles de la temperatura y composición de la solución estacionaria.

El carácter de la estabilidad estructural depende entonces de la evolución con el tiempo de la solución correspondiente a una perturbación inicial arbitraria, por ejemplo, de la distribución estacionaria de la temperatura, problema cuya resolución se ve fuertemente dificultada por la complejidad del sistema diferencial a resolver.

En vista de ello, la cuestión es tratada por Rosen mediante el desarrollo de un procedimiento aproximado de integración numérica, cuya aplicación detallada lleva a cabo para el caso concreto de

(200) J. B. ROSEN: *Theory of Laminar Flame Stability*. I. *Analytic Stability Condition*. II. *General Numerical Method and Application to Typical Systems*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1954, págs. 733-48. *Combustion Wave Stability and Flammability Limits*. Idem *id.*, págs. 750-51.

(201) En un apéndice al primero de los trabajos citados, Rosen deduce las ecuaciones de perturbación para el caso tridimensional, mostrando que la condición de estabilidad es análoga a la de onda plana.

la llama de descomposición del ozono (202), el cual elige por tratarse de uno de los casos mejor estudiados en régimen estacionario, merced a los trabajos de Hirschfelder y sus colaboradores, según hemos visto anteriormente.

Desgraciadamente, Rosen concluye que la llama cuya concentración inicial de ozono es $1/3$ debe ser inestable, mientras que las concentraciones superiores a $1/2$ deben dar llamas estables, lo cual se halla en contradicción con la evidencia experimental.

Como un método alternativo simplificado, Rosen reduce el problema al análisis de la estabilidad térmica que resulta de estudiar el comportamiento de la ecuación linealizada de la energía [80], que escribiremos aquí en la forma:

$$\rho \frac{\partial T}{\partial t} + m \frac{\partial T}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - w(T, Y) = 0, \quad [227]$$

donde, para facilitar el cálculo, se ha supuesto que λ es constante (203) porque, al tomar en consideración su variación en función de la temperatura T , se introduce una complicación que resulta innecesaria a los efectos que aquí interesan.

En efecto, si son $\rho(x)$, $T(x)$ e $Y(x)$ los perfiles de la composición y estado de la mezcla en la solución estacionaria y si es $m = \text{const.}$ el flujo de masa que determina la velocidad de propagación de la llama y se superponen a estas magnitudes perturbaciones infinitesimales de la forma $\rho'(x, t)$, $\theta(x, t)$, $Y'(x, t)$ y $m'(x, t)$ y se linealiza la ecuación resultante, Rosen obtiene para el cálculo de dichas perturbaciones la siguiente ecuación:

$$\left. \begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial \theta}{\partial t} + m \frac{\partial \theta}{\partial x} - \lambda \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial w(T, Y)}{\partial T} \right) \cdot \theta + \\ + \frac{dT(x)}{dx} \cdot m' - \frac{\partial w(T, Y)}{\partial Y} \cdot Y' = 0, \end{aligned} \right\} \quad [228]$$

a la que habrán de agregarse otras similares por linealización de las restantes ecuaciones no estacionarias de la llama.

(202) J. B. ROSEN: *Stability of the Ozon Flame Propagation*. «Sixth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 236-241.

(203) Más que esto, lo que se hace en rigor es despreciar el término $\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x}$ frente a los restantes en la ecuación de la energía.

Con objeto de poder abordar analíticamente el problema, reduciéndolo a la integración de una única ecuación diferencial, Rosen, en primer lugar, prescinde de los dos últimos términos de la ecuación anterior, cuya influencia en el comportamiento de la onda debe tener un efecto secundario.

Con ello, la citada ecuación adopta la forma siguiente, de interpretación física inmediata:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + v(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \varphi(x) \cdot \theta = 0, \quad [229]$$

donde es

$$v(x) = \frac{m}{\rho(x)}; \quad K = \frac{\lambda}{\rho(x)}; \quad y \quad \varphi(x) = \frac{1}{\rho(x)} \frac{\partial w(T, Y)}{\partial T}$$

Por último, puesto que la integración numérica sólo permite analizar caso por caso, para obtener un criterio analítico de estabilidad adopta valores constantes para los coeficientes de la ecuación [229] y en la ecuación simplificada resultante analiza la evolución de una fuente puntual de calor en el origen, de intensidad dada.

Esta simplificación le proporciona, finalmente, la siguiente condición aproximada para la estabilidad interna de la onda (204).

$$\frac{m}{4\lambda^2} - \frac{\varphi(0) \cdot \varphi'(0)}{\lambda} > 0, \quad [230]$$

donde el punto $x = 0$ coincide con el de inflexión del perfil de la temperatura.

Posteriormente, Wehner y Rosen (205) extendieron este análisis para tomar en consideración la influencia de la perturbación de la concentración, concluyendo que la estabilidad de la llama depende del comportamiento de dicha perturbación respecto de la correspondiente al perfil de temperaturas.

(204) La formulación de Rosen es bastante más complicada que la que aquí se da, porque en su análisis emplea expresiones más complejas para las diversas funciones termodinámicas.

(205) J. F. WEHNER y J. B. ROSE: *Temperature Stability of the Laminar Combustion Wave*. «Comb. and Flames», 1957, págs. 339-45.

La misma cuestión ha sido investigada también por D. Layzer (206), así como por Richardson (207), en los Estados Unidos e, independientemente, pero con tratamiento análogo al de este último autor, por Zeldovich y Barenblatt, algo más tarde, en Rusia (208).

Ambos autores consideran la ecuación [229] (209) con $v_0 = \text{const.}$, pero siendo φ función de x y, de acuerdo con el método clásico de la teoría de la estabilidad, buscan soluciones de dicha ecuación que sean de la forma:

$$\theta = e^{\left(-\alpha x + \frac{v^2}{2\alpha} x\right)} \cdot \psi(\alpha; x), \quad [231]$$

donde ψ es una función que ha de ser solución de la ecuación diferencial ordinaria:

$$\left[x \frac{d^2}{dx^2} + \varphi(x) - \frac{v^2}{4x} \right] \psi = \alpha \psi. \quad [232]$$

Ahora bien; el operador entre paréntesis es autoadjunto, por lo que sus valores propios son reales y la cuestión consiste en saber si pueden ser negativos, en cuyo caso la llama será térmicamente inestable.

Zeldovich y Richardson, sin necesidad de integrar la ecuación anterior y mediante el análisis de las propiedades del conjunto de sus autovalores, muestran que α no puede ser negativo, por lo que la llama no puede ser tampoco térmicamente inestable.

Zeldovich explica la contradicción entre su resultado y el de Rosen, porque este último introduce una condición de estabilidad demasiado restrictiva, al excluir de la estabilidad perturbaciones que representan un simple desplazamiento paralelo de la solución estacionaria.

(206) Ver las referencias del autor ya citadas anteriormente en relación con la estructura de la llama.

(207) J. M. RICHARDSON: *The Existence and Stability of Simple One-Dimensional Steady-State Combustion Waves*. «Fourth Symp. Comb.», págs. 182-89.

(208) Ver el trabajo de 1958, ya citado.

(209) Como ya se indicó en otro lugar, Zeldovich mostró que si el número de Lewis-Semenov es igual a la unidad, aun cuando el régimen no sea estacionario, la concentración sigue siendo una función lineal de la temperatura bajo condiciones en los límites del tipo de las que corresponden al caso en estudio; por ello, el empleo de la ecuación [229] no implica en este caso una simplificación adicional respecto de [228] por supresión del término en Y' , siempre que se utilice para $\varphi(x)$ la expresión apropiada.

Por su parte, Richardson demuestra fácilmente que la inclusión de efectos tridimensionales refuerza la estabilidad térmica de la llama.

J. Menkes (210) ha llevado a cabo un análisis similar al de Zeldovich y Barenblatt, con un desarrollo analítico algo más completo que el de estos autores, alcanzando conclusiones similares y extendiendo la investigación al caso de números de Lewis-Semenov ligeramente diferentes de la unidad (211), lo que no altera la estabilidad de la onda.

b) *Estabilidad hidrodinámica.*—Si bien el análisis de la estabilidad estructural de la llama ofrece, como hemos visto, un indudable interés teórico por la índole del problema matemático que plantea, desde un punto de vista práctico el tipo de estabilidad cuya investigación importa más es la llamada «hidrodinámica», es decir, la debida a las deformaciones geométricas del frente de la llama.

En la formulación matemática simplificada del problema, dicho frente se identifica con una superficie de discontinuidad, donde las condiciones del salto normal en cada punto del mismo son las conocidas y confieren a este caso una peculiaridad propia, respecto de otros fenómenos clásicos de inestabilidad hidrodinámica.

La cuestión fue tratada inicialmente por Landau, en Rusia, en 1944 (212), e independientemente por Darrieus, en Francia (213), mediante la aplicación del método clásico de la Estabilidad Hidrodinámica (214) al análisis del comportamiento de una onda de combustión, representada, como se ha indicado, por una superficie de discontinuidad y donde la velocidad de propagación de la llama, es decir, el salto

(210) J. MENKES: *On the Stability of a Plane Deflagration Wave*. «Proc. Roy. Soc.», Londres, 1959, págs. 380-89.

(211) J. MENKES: *A Note on the Influence of the Lewis Number on Flame Stability*. «Comb. and Flame», 1958, págs. 449-50.

(212) Ver, por ejemplo, L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ: *Fluid Mechanics*. Vol. 6. «Course Theoretical Physics». Pergamon Press. Londres, 1959, págs. 478 y siguientes.

(213) G. DARRIEUS: *La Mécanique des Fluides. Quelques progrès récents*. «La Technique Moderne», vol. 31, núm. 15, 1941. También *Propagation d'un Front de Flamme. Essai de Théorie de Vitesses anormales de Déflagration par Développement spontané de la Turbulence*. VI Cong. Int. de Mec. Aplic. Paris, 1946.

(214) Ver la obra de C. C. LIN, ya citada en el epígrafe 11 del capítulo primero, así como, del mismo autor, *On the Stability of Two-Dimensional Parallel Flows*. «Quart. Appl. Math.». Part. I. *General Theory*, 1945, págs. 117-142. Part. II. *Stability in an inviscid fluid*, 1945, págs. 218-234. Part. III. *Stability in a viscous fluid*, 1946, págs. 277-301.

de velocidad normal a través de la discontinuidad, se supone que es constante, o sea, que no depende de la forma de la onda.

La conclusión fundamental de la teoría simplificada de Landau-Darrieus es que la llama resulta siempre hidrodinámicamente inestable, a causa de la diferencia de densidad entre las dos masas gaseosas separadas por el frente de llama.

Ahora bien; como este resultado se encuentra en manifiesta contradicción con lo que enseña la experiencia, puesto que es posible obtener ondas de combustión perfectamente estables, se hizo necesario revisar el modelo de Landau-Darrieus para incorporar al mismo factores de estabilidad que, sin duda, habían sido omitidos en aquel primer tratamiento.

Esta incorporación fue llevada a cabo inicialmente por el Profesor Markstein, de la Universidad norteamericana de Cornell, que es, sin duda, quien mayor dedicación ha consagrado al estudio y esclarecimiento del comportamiento no estacionario de las ondas de combustión (215).

Por lo que respecta al caso aquí en estudio, el tratamiento de Landau y Markstein se resume en la forma siguiente:

1. Ecuaciones del movimiento

La influencia de los fenómenos de transporte (viscosidad, conductividad y difusión de las especies), así como de la reacción química, queda circunscrita al interior de la onda, que en este modelo hidrodinámico se reduce a una superficie de discontinuidad.

Por consiguiente, a cada uno de los lados de la misma, el gas puede tratarse como un fluido ideal, de composición constante y, además, como ya se ha dicho que las velocidades de deflagración son, en general, muy pequeñas respecto de la del sonido, también puede suponerse que es un fluido incompresible.

Por tanto; el sistema general de ecuación del movimiento, a uno

(215) Ver, en especial, además del trabajo ya citado del IV Symp. de Comb., los siguientes: G. H. MARKSTEIN: *Experimental and Theoretical Studies of Flame Front Stability*. «Journ. Aer. Sci.», 1951, págs. 199-209; *Non-Steady Flame Propagation*. Pergamon Press, 1964, y el artículo de revisión, con abundante bibliografía muy reciente: *Flames as Amplifiers of Fluid-Mechanical Disturbances*. Proc. of the 6th U. S. Nat. Cong. of App. Mech. ASME, 1970.

y otro lado de la onda, se reduce al siguiente, escrito en forma vectorial (216).

Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad [233]$$

Ecuación de la cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0; \quad [234]$$

es decir, se reduce al clásico sistema de cuatro ecuaciones para la determinación de la presión p y de las tres componentes v_x, v_y, v_z de la velocidad $\mathbf{v}$.

2. Condiciones en los límites

Estamos interesados en investigar el comportamiento de las perturbaciones que se originan en la proximidad del frente de llama.

Por tanto, en primer lugar debe suponerse que la perturbación del movimiento unidimensional estacionario que corresponde a la solución no perturbada, es nula a gran distancia del frente de combustión, en los dos lados del mismo: el de los gases frescos y el de los gases quemados.

Adoptando como dirección del movimiento no perturbado la del eje x y fijando el sistema de referencia en el frente de combustión no perturbado, las condiciones en los límites se reducen entonces a las siguientes:

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow -\infty: \quad v_x \rightarrow v_0; \quad v_y, v_z \rightarrow 0; \quad p \rightarrow p_0. \\ x \rightarrow +\infty: \quad v_x \rightarrow \epsilon v_0; \quad v_y, v_z \rightarrow 0; \quad p \rightarrow p_0 \end{aligned} \right\} \quad [235] \quad (217)$$

(216) Ver, por ejemplo, la obra de MARKSTEIN citada, pág. 9.

(217) En rigor habría de suponerse que la caída de presión a través de la llama es $(p_\infty - p_0) = -p_0 \cdot \gamma M_0^2 (\epsilon - 1)$, donde γ es la relación de calores específicos en los gases fríos, y M_0 es el número de Mach de la velocidad de la llama, por lo que dicho salto es de segundo orden.

siendo ϵ el factor de ampliación de la velocidad de los gases al pasar a través de la onda.

En segundo lugar, la solución debe ser discontinua a través de una superficie de la forma geométrica

$$f(\mathbf{x}, t) = 0 \quad [236]$$

correspondiente a la posición perturbada del frente de llama, donde, además, el salto de la velocidad $\mathbf{v}$ debe cumplir las condiciones de compatibilidad a través de la onda, mientras que la presión p debe ser continua en primera aproximación.

Veamos a continuación la forma que adoptan las condiciones de compatibilidad que debe de satisfacer el salto de velocidades.

3. Condiciones de compatibilidad sobre la superficie de la onda

Si son $\mathbf{v}_-$ y $\mathbf{v}_+$, respectivamente, las velocidades del gas a ambos lados del punto $\mathbf{x}$ del frente de combustión, la componente tangencial del salto de velocidades $\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-$, como es sabido debe ser continua, condición que, evidentemente, se expresa en la forma

$$(\mathbf{v}_+ - \mathbf{v}_-) \times \nabla f = 0. \quad [237]$$

En cuanto a la componente normal de la velocidad del gas respecto del frente, en cada punto de éste debe ser igual a la velocidad V de propagación de la llama en la mezcla, del lado de los gases frescos, o a ésta multiplicada por el factor de ampliación ϵ , del de los gases quemados, condiciones que se expresan respectivamente en la forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_- \cdot \nabla f = |\nabla f| \cdot V \quad [238]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}_+ \cdot \nabla f = |\nabla f| \cdot \epsilon V. \quad [239]$$

En estas expresiones, V es la velocidad de propagación de la llama en el punto $\mathbf{x}$ del frente f , el cual, como es sabido, avanza normalmente a sí mismo, a la velocidad $\frac{1}{|\nabla f|} \cdot \frac{\partial f}{\partial t}$. Debe advertirse

que, como veremos después, V puede ser diferente de la velocidad v_0 de propagación de la llama en la onda plana, a causa de la influencia de la deformación de la onda en dicha velocidad de propagación.

4. Linealización del sistema de ecuaciones del movimiento y de las condiciones en los límites

Se está estudiando un problema de perturbaciones pequeñas superpuestas a la solución unidimensional y estacionaria correspondiente a una onda plana indefinida, de espesor nulo, localizada en el origen.

Por consiguiente, la solución base, a la que hay que superponer las perturbaciones, está dada por las expresiones:

$$x \leq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = V \\ v_y = v_z = 0 \\ p = p_0 \end{array} \right\} \quad x \geq 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} v_x = \varepsilon V \\ v_y = v_z = 0 \\ p = p_0 \end{array} \right\} \quad [240]$$

En la forma habitual, la perturbación a superponer a ésta se supone representada por los incrementos v'_x, v'_y, v'_z, p' de las componentes de la velocidad y de la presión, las cuales son, por definición, infinitésimos de primer orden respecto de V y p_0 .

Markstein (218) ha demostrado que, en primera aproximación no se produce ningún acoplamiento entre las perturbaciones en las dos direcciones transversales y y z , respectivamente, por lo que se puede simplificar el tratamiento sin sacrificio de la generalidad, considerando el problema bidimensionalmente que resulta de hacer $v'_z \equiv 0$.

Con ello y al introducir las perturbaciones citadas en el sistema de ecuaciones [233], [234] y linealizarlas, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de perturbación para el cálculo de v'_x, v'_y y p' :

$$\frac{\partial v'_x}{\partial x} + \frac{\partial v'_y}{\partial y} = 0; \quad [241]$$

$$\frac{\partial v'_x}{\partial t} + v \frac{\partial v'_x}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad [242]$$

(218) Ver la obra citada, pág. 18.

$$\frac{\partial v_y'}{\partial t} + v \frac{\partial v_y'}{\partial x} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y}. \quad [243]$$

En este sistema deben sustituirse v y ρ por v_0 y ρ_0 en la zona anterior a la onda, correspondiente a los gases frescos, y por ϵV y $\frac{\rho_0}{\epsilon}$ en la posterior a la misma, de los gases quemados.

La solución que se busca, discontinua para v'_x y v'_y sobre el frente de llama, debe cumplir las condiciones en los límites

$$x \rightarrow \pm \infty: \quad v'_x, v'_y \text{ y } p' \rightarrow 0, \quad [244]$$

así como las de compatibilidad para el salto sobre la onda que resulten de la linealización de [237], [238] y [239].

Tales condiciones se obtienen más fácilmente expresando la ecuación [236] de la onda en la forma:

$$x = f(y, t), \quad [245]$$

y suponiendo que esta curva difiere muy poco de la posición inicial $x = 0$ del frente, con lo que las citadas condiciones se reducen a las siguientes, como se verifica fácilmente:

$$(\epsilon - 1) V \frac{\partial f}{\partial y} = v'_{y-} - v'_{y+}; \quad [246]$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v'_{x-} - (V - v_0); \quad [247]$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v'_{x+} - \epsilon (V - v_0), \quad [248]$$

para $x = 0$.

Finalmente, la otra condición del salto es la de continuidad de la presión a través de la onda:

$$x = 0, \quad p'_- = p'_+. \quad [249]$$

En estas expresiones, la diferencia $(V - v_0)$ es, evidentemente, la perturbación de la velocidad de propagación de la llama, debida a la deformación de la onda.

En el modelo simplificado de Landau-Darrieus, dicha perturbación se pone nula, con lo que desaparece el término en $(V - v_0)$ de las dos últimas ecuaciones anteriores.

En el modelo perfeccionado de Markstein, por el contrario, las condiciones del salto normal y, por tanto, el carácter de la solución dependen, como muestran las condiciones [247] y [248] de la forma en que la velocidad de propagación de la llama quede influida por la perturbación, cuestión que analizaremos detalladamente más adelante y cuya importancia para el problema de la estabilidad se hace aquí plenamente patente.

En definitiva, se trata también en este caso de expresar la diferencia $(V - v_0)$ de la velocidad de propagación de la llama en función de la deformación $f(y, t)$ de la onda que la motiva.

A partir de este punto, el tratamiento del problema es idéntico al de los ejemplos clásicos de inestabilidad hidrodinámica.

Concretamente, puesto que el sistema diferencial [241] a [243] es lineal y de coeficientes constantes, admite soluciones que son funciones exponenciales en las variables x, y, t , de la forma:

$$(v_x', v_y', p') = (A_x, A_y, A_p) \cdot \exp(\alpha x + i\beta y + \delta t), \quad [250]$$

si bien los valores de las constantes A_x, A_y, A_p serán diferentes para las dos regiones de los gases fríos $x < 0$ y quemados $x > 0$, respectivamente.

En cada una de las dos regiones, las relaciones que deben existir entre las constantes A_x, A_y, A_p y los parámetros α, β, δ se determinan, como es habitual, introduciendo la solución [250] en el sistema diferencial y teniendo presentes, además, las condiciones en los límites $x \rightarrow \pm \infty$, dadas por [244], lo que significa que sólo han de investigarse soluciones en las que la parte real de α sea positiva en la región de los gases fríos y negativa en la de los gases quemados (219).

En cuanto a las relaciones que deban existir entre las constantes A de las soluciones a ambos lados de la onda, es decir, por lo que

(219) MARKSTEIN, en la obra citada, considera casos más generales, así como la influencia de la compresibilidad de los gases.

respecta al acoplamiento entre las soluciones [250] correspondientes a ambos lados de la llama, éste debe efectuarse mediante la aplicación de las cuatro condiciones de compatibilidad [246] a [249], a cuyo efecto hay que relacionar la perturbación [250] con la deformación [245] de la onda, la cual será, evidentemente, de la forma:

$$f(y, t) = A_f \exp(i\beta y + \delta t). \quad [251]$$

Finalmente, las condiciones citadas originan un sistema lineal homogéneo de ecuaciones para la determinación de las constantes A_s , A_v , A_p y A_f , cuya condición de compatibilidad proporciona una ecuación «secular» de la forma:

$$F(\delta, \beta; v_0, \rho_0, \epsilon) = 0. \quad [252]$$

Si esta ecuación posee raíces δ con parte real positiva, las perturbaciones correspondientes, cuyo número de onda está determinado por β , son inestables. En caso contrario, la onda resulta estable para todo tipo de perturbaciones.

Se ha señalado ya que, en las condiciones del salto, la velocidad V de la llama puede depender de la forma de la onda, es decir, de la forma de la perturbación.

También se ha indicado que Landau y Darrieus supusieron que dicha velocidad $V \equiv v_0$ es independiente de la perturbación de la onda, con lo que desaparece el último término de las ecuaciones [247] y [248] del salto, en cuyo caso se comprueba que la ecuación secular [252] posee una raíz con parte real de δ negativa para todo el valor del número de onda.

Por consiguiente, en este modelo la llama resulta inestable para todas las longitudes de onda.

c) *Influencia de la curvatura de la llama.*—Markstein, por el contrario, incorpora en su estudio la posible influencia de la forma [245] de la onda en la velocidad de la llama, adoptando un punto de vista fenomenológico, según el cual supone que V se relaciona con la velocidad v_0 de la onda plana y con la forma de la perturbación mediante una expresión palusible de la forma:

$$V = v_0 \left(1 + \mu \frac{L}{R} \right)$$

En ella, R es el radio de curvatura de la onda perturbada, el cual, en la aproximación lineal que estamos considerando es, evidentemente, proporcional a $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}\right)^{-1}$; L es una longitud característica que mide el espesor de la llama; finalmente, μ es un coeficiente adimensional, cuya determinación o, en términos más generales, la de la forma en que V depende de la deformación de la onda, entraña uno de los más complicados problemas de la teoría de las llamas, como veremos seguidamente.

Al incorporar la expresión [253] de V a las condiciones [247] y [248] del salto, la ecuación secular [252] depende también del parámetro μ y Markstein ha mostrado que para valores negativos del mismo, la llama sigue siendo inestable para todas las longitudes de onda, de acuerdo con la conclusión de Landau-Darrieus, mientras que por el contrario, si el parámetro μ es positivo, a cada valor del mismo corresponde una longitud de onda mínima, por debajo de la cual las perturbaciones son estables (220).

Así pues, esta importante conclusión del modelo de Markstein permite explicar, al menos cualitativamente, el comportamiento experimental de muchas llamas, al introducir un factor de estabilización de las mismas en el modelo de Landau-Darrieus.

Pero la justificación cuantitativa exigirá, en primer lugar, el desarrollo de una teoría que permita sustituir la expresión [253] por la fórmula correcta que resulte del modo en que la perturbación actúe sobre los diversos procesos de transporte de calor, difusión, etc., de los que, como se ha visto, depende la velocidad de propagación de la llama.

Para terminar con este problema vamos a limitarnos a describir brevemente los esfuerzos que se han realizado hasta el momento para desarrollar una teoría de la influencia de la deformación de la onda en la velocidad de propagación de la llama, las dificultades que ello plantea y algunos de los resultados que se han obtenido.

Empezando por señalar que, puesto que se trata de la velocidad de propagación de la llama, que depende, como es sabido, de los procesos internos de la onda, ésta no puede esquematizarse aquí mediante una discontinuidad, debiendo asignársele un espesor finito.

Si bien, por la propia naturaleza del problema y a diferencia de

(220) La convención de signos que se adopta en [253] es tal que un valor de μ positivo corresponde a una deformación de la onda con la concavidad orientada hacia los gases frescos.

lo que se ha hecho en el caso de las llamas cilíndricas y esféricas, donde la estructura interna de la onda ocupaba todo el espacio geométrico ($-\infty < x < +\infty$ en las planas; $0 \leq r < \infty$ en las curvas), para el estudio de la cuestión que ahora nos interesa es necesario suponer que la onda, o la zona de reacción de la misma, tiene un espesor reducido, en torno a una superficie de referencia, cuya forma define la de la llama.

Además, como lo que trata de investigarse son los efectos locales para determinar la influencia de la deformación en la velocidad de la llama en cada punto, debida precisamente al hecho de que la onda no sea plana en el entorno del mismo, el elemento a tomar en consideración, en primera aproximación, es la curvatura de la superficie de la onda en él, pudiendo anticiparse que las dos magnitudes a comparar entre sí para medir la intensidad del efecto deben ser el espesor de la llama y el radio de curvatura de la onda de combustión, como hemos visto que hace Markstein en la expresión [253].

Recordemos, por otra parte, la gran complejidad de los fenómenos de transporte y reacción que se producen en el seno de la llama, como se ha visto en el estudio de las ondas planas estacionarias. Lo cual hace pensar que será muy difícil estudiar la influencia de la forma geométrica de la onda en el comportamiento de aquellos procesos, de los que depende, como se vio entonces, la velocidad de propagación de la llama.

Se imagina fácilmente, por ejemplo, la influencia de la curvatura en el transporte de calor y en el de los radicales químicos hacia los gases frescos. De donde resulta la influencia de aquélla, tanto en el calentamiento de la mezcla como en la activación de las especies reactivas, factores ambos que deben influir en la velocidad local de la propagación de la llama.

Esta doble influencia ya fue señalada por Jost en su clásico Tratado, reiteradamente citado (221), quién incluso efectuó estimaciones de su orden de magnitud, al comparar el espesor de la llama con la curvatura de la onda.

Pero el cálculo efectivo de dicha influencia, incluso en esquemas sencillos, resulta muy difícil (222), aparte de que intervienen otros

(221) Véase Jost, ya citado, págs. 126 y sigts.

(222) Un sencillo cálculo aproximado de la influencia de la curvatura, exclusivamente a causa del transporte de calor, en un modelo simplificado de la llama térmica (difusión nula), se debe a J. FABRI: *Etude Aerothermodynamique de la Combustion*, «Sel. Com. Probl. AGARD», ya citado, págs. 42-58.

efectos de difusión más complejos, los cuales, según parece desprenderse de las investigaciones teóricas y experimentales llevadas a cabo, resultan determinantes para el comportamiento de la llama.

Se trata, en especial, de los efectos de la difusión preferente de alguna de las especies principales, que se producen en llamas curvas cuando el número de Lewis-Semenov de aquella especie es distinto de la unidad.

Zeldovich (223), por ejemplo, ha estudiado la influencia de la difusión del reactante pobre en una mezcla combustible de dos especies, en función del número de Lewis-Semenov de aquél respecto de los gases quemados.

En su estudio utiliza un modelo de onda de tipo similar al que introdujo para el estudio de las reacciones en cadena (224), es decir, separando la zona de calentamiento, que supone indefinida, de la de reacción, que considera de espesor nulo, y aplica un método de perturbaciones pequeñas para estudiar la influencia de la forma de esta última.

La conclusión a que llega, desde el punto de vista que aquí interesa, es que la perturbación $\frac{V - v_0}{v_0}$ de la velocidad de la llama es

proporcional a la diferencia $1 - \frac{\lambda}{\rho D C_p} \equiv 1 - L$, de tal modo

que cuando dicha diferencia es nula ($L = 1$), los efectos de la conductividad térmica y de la difusión se contrarrestan exactamente y la curvatura no influye en la velocidad de la llama; mientras que si el número L de Lewis-Semenov es mayor que la unidad, predominan los efectos del transporte del calor y recíprocamente en caso contrario.

Aparte de poner de manifiesto la influencia de efecto relativo de ambos fenómenos de transporte, el trabajo de Zeldovich interesa desde el punto de vista de la Teoría Matemática de la estabilidad, porque en él se toma en cuenta la influencia de la zona interior de difusión y calentamiento de la llama, de modo que la discontinuidad del salto se limita a la zona de reacción química, cuyo espesor es, muy a menudo, mucho menor que aquél. Por tanto, su modelo, si

(223) G. I. BAREMBLATT, Y. B. ZELDOVICH y A. G. ISTRATOV: *Diffusive-Thermal Stability of Laminar Flames*. P. M. T. F., núm. 4, 1962, págs. 21-26.

(224) Ver epígrafe 6 del presente capítulo.

bien muy sencillo, representa un progreso importante sobre los de Landau y Markstein.

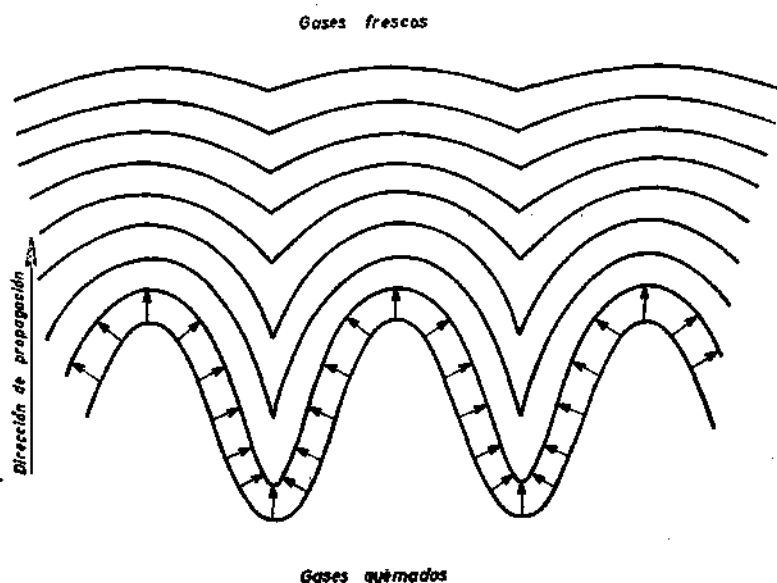


Fig. VI-26.—Aplicación del principio de Huyghens a la propagación de una perturbación en una onda de combustión.

Mayor influencia en la estabilidad de la llama parece tener, como se ha dicho, a la vista de la información experimental, el efecto de la difusión entre los propios reactantes cuando sus difusividades son muy distintas, como ocurre si difieren considerablemente sus pesos moleculares.

Entonces, la curvatura del frente de llama puede dar lugar a una difusión transversal de reactantes, en la zona de calentamiento, que varíe sensiblemente la composición local de la mezcla antes de alcanzar la zona de combustión y, con ello, la velocidad local de la propagación de la llama (225).

La influencia de este efecto, inicialmente señala por Lewis y von Elbe (226), ha sido analizada rigurosamente, en un reciente trabajo

(225) Ver, por ejemplo, la obra ya citada de STREHLOW, págs. 225 y sigts.

(226) Ver, por ejemplo, J. MANTON, G. VON ELBE y B. LEWIS: *Nonisotropic Propagation of Combustion Waves in Explosive Gas Mixtures and the Development of Cellular Flames*, «*Jour. Chem. Phys.*», 1952, págs. 153-157.

de gran interés, por el Profesor Parlange (227), de la Universidad de Yale.

El autor aplica también un método de perturbaciones pequeñas a una llama inicialmente plana, comparando la longitud de onda de la perturbación con dos espesores característicos: el de la zona de difusión y el de la zona de reacción, éste siempre mucho menor que aquél. Parlange cubre así un amplio espectro de casos entre los que se incluyen los ya citados.

Desde el punto de vista de la composición, opera con tres especies químicas, una de las cuales tiene una difusividad mucho mayor que las de las otras dos, las cuales se comportan de modo similar entre sí y con respecto a aquélla desde el punto de vista de la difusión y con un valor del número de Lewis-Semenov del orden de magnitud de la unidad.

Esta hipótesis, que corresponde a un caso en cierto modo límite, permite algunas simplificaciones importantes en el tratamiento del difícil problema matemático que se plantea, haciéndolo abordable, y pone de manifiesto la influencia en la velocidad de la llama, así como en la estabilidad de la onda, de la difusión preferencial de la especie ligera a través de la mezcla formada por las otras dos.

La teoría le permite mostrar que la velocidad de propagación de la llama es proporcional a la curvatura de la onda y calcular el factor de proporcionalidad en función de las características fisicoquímicas del modelo propuesto.

Un estudio similar, pero en este caso sin tener en cuenta la difusión preferencial, la cual ya hemos dicho, sin embargo, que es un factor básico del problema, había sido efectuado previamente por Chu y Parlange (229), en la Universidad de Brown.

La hipótesis de que el número de Lewis-Semenov de las dos únicas especies químicas que consideran estos autores (reactantes y productos) sea igual a la unidad, permite una considerable simplificación en el tratamiento matemático del problema, el cual ofrece interés porque en él se opera mediante el desarrollo asintótico de las ecuaciones en función de un parámetro mucho mayor que la unidad: precisamente la relación entre la longitud de onda y el espesor de

(227) J. Y. PARLANGE: *Influence of Preferential Diffusion on the Stability of a Laminar Flame*. «*Jour. Chem. Phys.*», 1968, págs. 1843-1849.

(228) B. T. CHU y J. Y. PARLANGE: *On the Stability of Laminar Flame*. «*Jour. de Mec.*», 1962, págs. 293-312.

la llama, y los términos de las sucesivas aproximaciones del desarrollo conducen a las soluciones de Landau, Markstein, etc., lo que proporciona el significado matemático preciso de tales soluciones.

Pero el trabajo seguramente más ambicioso en su planteamiento, en cuanto al propósito de esclarecer la influencia de los diversos factores en la perturbación de la velocidad de la llama, es el del profesor Eckhaus (229), del Instituto Tecnológico de Massachussets.

También en este caso, para hacer matemáticamente abordable el tratamiento, Eckhaus se ve obligado a operar con un modelo muy simplificado.

En él se considera una mezcla de tres especies químicas: dos reactantes (combustibles y oxidante) y un producto, con una cinética química muy sencilla, en la que se supone que la combustión sólo se inicia a una temperatura de encendido muy próxima a la final de la combustión y que, a partir de ese momento, la reacción se desarrolla a velocidad constante (230).

Esta última simplificación obliga a incorporar en el resultado un parámetro: la velocidad hipotética de reacción, cuyo valor no queda determinado por la teoría y es, portanto, una constante fenomenológica.

En última instancia, en el esquema de Eckhaus la zona de reacción se reduce prácticamente a una superficie de discontinuidad y lo que resta de la estructura de la onda es la zona de calentamiento y difusión, en la que Eckhaus efectúa la integración del sistema simplificado de ecuaciones, con las condiciones de contorno que impone la forma perturbada de la superficie de reacción.

Con todo esto y como resultado de un laborioso proceso de cálculo, el autor llega, finalmente, para la perturbación adimensional de la velocidad de la llama, a una expresión de la forma:

$$\delta \equiv \frac{V - v_0}{v_0} = -\alpha \left(\frac{1}{R} + \frac{\partial v_\eta}{\partial \eta} \right) - \beta \frac{\partial \delta}{\partial \tau}, \quad [254]$$

en donde R es el radio de curvatura de la llama en el punto, expresado en forma adimensional en función de una longitud caracteris-

(229) W. ECKHAUS: *Theory of Flame-Front Stability*. «*Jour. Fluid Mech.*», 1961, págs. 80-100.

(230) Se trata, pues, del primitivo modelo de onda de combustión de Mallard-Le Chatelier.

tica; v_η es la componente tangencial adimensional de la velocidad del gas en el punto respecto de la superficie de la llama, por lo que $\frac{\partial v_\eta}{\partial \eta}$ es el radio de curvatura adimensional de la línea de corriente en el punto, como se comprueba fácilmente; τ es un tiempo adimensional; finalmente α y β son dos parámetros que dependen de las características fisicoquímicas de la mezcla y de la hipotética velocidad de reacción constante a que se ha hecho referencia anteriormente.

De los tres términos de la expresión anterior, el primero, análogo a la expresión [253] de Markstein, mide el efecto de la curvatura de la llama a causa de la acción combinada de la conductividad térmica y de la difusividad entre reactantes y productos; el segundo, la influencia de la curvatura de las líneas de corriente en la difusividad preferencial de los componentes de la mezcla; finalmente, el tercero expresa la inercia del proceso, es decir, el tiempo necesario para que la distorsión del frente de llama modifique la velocidad de propagación de ésta.

Finalmente, un trabajo reciente y de gran interés por su propio tratamiento matemático, así como por la crítica que contiene de los precedentes, es el realizado por Istratov y Librovich (231), de los Institutos de Fisicoquímica y de Problemas Mecánicos de Moscú.

En su análisis, los autores incluyen la influencia en la estabilidad de la llama de los efectos de la viscosidad, además de los de la conductividad térmica y difusión y de las variaciones de la composición de la mezcla en la velocidad de reacción química, y tratan el problema mediante la deducción de correcciones a la solución de Landau, que obtienen al aplicar a este caso un método inicialmente propuesto por Germain y Guiraud (232) para el estudio de la influencia de los procesos de transporte en ondas de choque ligeramente curvas. Para ello consideran que la onda tiene en su zona de reacción un espesor no nulo y desarrollan la solución en función de un parámetro: el número de Reynolds N_R del movimiento, referido a la velocidad de la llama y al número de onda de la perturbación de aquélla, el cual suponen muy grande con respecto a la unidad.

(231) A. G. ISTRATOV y V. B. LIBROVICH: *The Effect of Transport Processes on the Stability of a Plane Flame Front*. P. M. M., 1966, págs. 451-469. Existe traducción al inglés.

(232) Ver la referencia del capítulo II.

El método aplicado pone de manifiesto que se trata de un problema de perturbaciones singulares (233), puesto que la perturbación de orden N_R^{-1} introduce en el sistema diferencial derivadas de segundo orden, que están ausentes en la solución de Landau, la cual corresponde al caso $N_R \rightarrow \infty$, es decir, al término de orden cero en el desarrollo.

Entonces calculan la primera corrección a la solución de Landau, correspondiente al término en N_R^{-1} .

La principal dificultad se plantea al aplicar las condiciones de compatibilidad en el empalme entre las soluciones exteriores a la zona de reacción y la de ésta y es aquí donde se sirven del método propuesto por Germain y Guiraud.

En definitiva y como resumen de todo lo que acabos de exponer, puede decirse que las investigaciones citadas, además de proporcionar una comprensión del fenómeno, han permitido llegar a poner de manifiesto, al menos cualitativamente, la influencia de los factores más importantes en la alteración de velocidad de propagación de una llama originada por una deformación del frente de onda.

Si bien debe señalarse que las expresiones obtenidas mediante las laboriosas teorías que se han desarrollado, siempre para modelos mucho más simplificados que los ya resueltos en el caso de ondas planas y estacionarias, no proporcionan una solución completa que permita determinar cuantitativamente el valor de aquella alteración.

Análogas consideraciones podrían hacerse, por otra parte, por lo que respecta a la influencia de la deformación del frente en la temperatura de los gases quemados, factor este cuya influencia en la estabilidad de la onda es también de gran importancia, como puede verse en la bibliografía citada.

d) *Estabilidad de la llamada esférica.*—En los casos que hemos considerado hasta aquí, todas las investigaciones se han referido a la estabilidad de un frente de combustión plano.

Han sido Istratov y Librovich (234), ya citados, los primeros en llevar acabo una investigación similar para una llama esférica, cuyo estudio ofrece gran interés desde el doble punto de vista teórico, por las dificultades propias del problema, así como experimental por

(233) Ver las obras de VAN DYKE o COLE, ya citadas.

(234) A. G. ISTRATOV y V. B. LIBROVICH: *On the Stability of Gasdynamic Discontinuities Associated with Chemical Reactions. The Case of a Spherical Flame*, «Astronautica Acta», 1969, págs. 453-67.

ciertas peculiaridades del comportamiento de estas llamas, que se describen en la bibliografía citada en el trabajo de referencia.

El método que aplican estos autores es el mismo empleado por Landau para la onda plana, en el que la llama se reduce a una superficie de discontinuidad, pero su desarrollo resulta en este caso considerablemente más complicado.

En primer lugar, al existir aquí una longitud característica creciente con el tiempo, como es el radio de la llama esférica no perturbada, se hace necesario adoptar una nueva definición de estabilidad.

En efecto; la onda esférica será sólo inestable cuando la amplitud de las perturbaciones del frente de llama crezca más deprisa que el radio de la citada esfera.

Por otra parte, es claro que el sistema de referencia adecuado es el de coordenadas esféricas y que la solución debe desarrollarse, por ello, en serie de armónicos esféricos.

Además, tanto las ecuaciones del movimiento como las condiciones de compatibilidad sobre la llama para las variables de perturbación, en lugar de tener coeficientes constantes, como ocurría en el caso de la onda plana, poseen coeficientes que dependen del radio de la onda esférica o, lo que es lo mismo, del tiempo.

Finalmente, para la perturbación en la zona de los gases quemados, es decir, en la zona interior de la esfera, hay que tener en cuenta la condición de finitud en el origen (en lugar de imponerla en el punto $x = +\infty$), como se hacía en la onda plana.

Todo lo cual da lugar a un desarrollo matemático considerablemente más laborioso que en el caso de la onda plana y ello tanto en la obtención de las soluciones generales del sistema diferencial de ecuaciones como en la aplicación de las condiciones de compatibilidad.

También las conclusiones de la investigación presentan diferencias sustanciales con respecto al caso de la onda plana.

Efectivamente; en primer lugar, el ritmo de variación con el tiempo de la amplitud de una perturbación es aquí mucho menor que en aquella, porque, en lugar de venir expresado por una función exponencial, está dado por una función potencial.

En segundo lugar, y como consecuencia de la nueva definición de estabilidad que se requiere para la onda esférica, ocurre que cuando el radio de ésta es suficientemente pequeño, la onda resulta estable incluso para el modelo de Landau-Darrieus, es decir, cuando la ve-

locidad de la llama no depende de la curvatura de la perturbación.

Para radios mayores de la esfera, es decir, a medida que avanza el tiempo, las perturbaciones se hacen inestables, pero entonces, como se vio en el caso de la onda plana, el modelo de Landau no sirve para los armónicos de menor longitud de onda, por lo que Istratov y Librovich aplican a tales armónicos el modelo de Markstein, para tomarlo en consideración, mediante una expresión de la forma [253], del efecto estabilizador de la curvatura de la perturbación.

Pero ocurre aquí, sin embargo, que para un armónico esférico de orden dado, la curvatura de la perturbación crece con el tiempo al aumentar el radio de la esfera, lo que reduce la influencia estabilizadora de la misma.

La combinación de este efecto desestabilizador con el opuesto que resulta de la definición de la estabilidad citada, da lugar, en definitiva, a que la amplitud de cada armónico muestre una evolución temporal primero decreciente, pasando por un mínimo para hacerse finalmente creciente, es decir, inestable.

Además existe un número de armónico que alcanza el mínimo antes que los demás y que es, por consiguiente, el que inicia la inestabilidad de la onda, de modo que su orden permite establecer el número de células en que tenderá a fraccionarse al frente de la llama.

Este interesante comportamiento resulta cualitativamente confirmado por las observaciones ópticas experimentales, como ilustran los autores en su trabajo, el cual, al igual de lo que ocurría para las ondas planas, ofrece también gran interés por sus comentarios sobre las limitaciones y el significado matemático del modelo de Markstein y porque enlazan la solución esférica con la de las ondas planas, mediante un paso al límite de aquélla para radios de la onda muy grandes.

e) *Teoría no lineal de la estabilidad.*—Es claro que una teoría lineal, como la que acabamos de exponer, solamente proporciona información sobre la estabilidad e inestabilidad de una onda de combustión frente a perturbaciones pequeñas. Concretamente, dicha teoría no permite resolver el importante problema de la evolución temporal de una onda inestable, más allá de la etapa inicial en que las perturbaciones siguen siendo muy pequeñas (235).

(235) Un ejemplo muy reciente y de interés matemático como aplicación del método de desarrollos asintóticos en un caso de perturbaciones singulares, es el

En particular, cuando la magnitud de tales perturbaciones crece, los efectos de orden superior, que han sido ignorados en la teoría inicial, pueden adquirir un papel preponderante y limitar la evolución de la perturbación inicial, dando lugar a configuraciones propias, no planas pero estables.

Como es sabido, existen, efectivamente, soluciones de esta naturaleza en otros muchos problemas de la Mecánica de Fluidos (236) y, por lo que respecta a las ondas de combustión, las llamas celulares previamente descritas constituyen un ejemplo típico, cuyo estudio requiere la aplicación de los métodos de la Teoría no Lineal de la Estabilidad, la cual se encuentra todavía en una fase de desarrollo muy incompleta y ofrece dificultades evidentemente muy superiores a las de la Teoría Lineal (237).

El problema ha sido abordado, hasta el momento, mediante el empleo de dos técnicas distintas (238).

En primer lugar, aplicando el «principio de Huyghens» a la propagación de la onda, lo que da lugar a un efecto no lineal que, como ilustra la figura VI-25, tiene a reducir la amplitud de las perturbaciones en las zonas de la llama que son cóncavas con respecto a la región de los gases fríos. La idea fue inicialmente utilizada por Karlovitz en relación con la teoría de las llamas turbulentas (239) y

cálculo efectuado por Sivashinsky, del Instituto Tecnológico de Haifa, en Israel, de un frente de llama estacionario de forma ondulada de amplitud pequeña. En este ejemplo se toma en consideración el espesor no nulo de la onda, tanto en la zona de transporte de calor y difusión como en la de reacción química, si bien, por lo que respecta a esta última, para el caso de una energía de activación muy grande, lo que permite una simplificación importante en el tratamiento de la estructura de la onda. G. I. SIVASHINSKY: *On a Steady Corrugated Flame Front*. «Astr. Acta», 1973, págs. 253-60.

(236) Ver, por ejemplo, de J. T. STUART: *Non-linear Effects in Hydrodynamic Stability*. «Proc. X Int. Congr. Appl. Mech.-Stress», 1960, págs. 63-97, y *Non-linear Stability Theory*. «Ann. Rev. Fluid Mech.», 1971, págs. 347-70, donde se contiene un análisis crítico y bibliográfico muy reciente, así como MONIN y YAGLOM, ya citado, págs. 147-203.

(237) Ver, por ejemplo, W. ECKHAUS: *Studies in Non-linear Stability Theory*. Springer, Berlín, 1965.

(238) Ver MARKSTEIN, 1970, ya citado.

(239) B. KARLOVITZ, D. W. DENNITSON y F. E. WELLS: *Investigation of Turbulent Flames*. «Jour. Chem. Phys.», 1951, págs. 541-47.

sus efectos, desarrollados cualitativamente por Manton, von Elbe y Lewis (240), así como por Petersen y Emmons (241).

Finalmente, tal efecto ha sido estudiado cuantitativamente por Markstein (242) y posteriormente por Zeldovich (243), quienes, mediante un cálculo sencillo, obtienen la siguiente expresión para la velocidad de reducción de la amplitud de la perturbación:

$$\frac{d A_f}{d t} = - \frac{2}{\pi^2} \cdot V \cdot \beta \cdot A_f^2. \quad [255]$$

en donde A_f es la amplitud de la perturbación cuyo número de onda es β y V es la velocidad normal de propagación de la llama.

Esta expresión muestra que el efecto estabilizador existe efectivamente, si bien es de segundo orden, por lo que no puede aparecer en la Teoría Lineal.

Para dar un paso más en la determinación de la amplitud correspondiente al caso de estabilidad celular, Zeldovich combina la teoría lineal, donde la variación de la amplitud está dada por la expresión:

$$\frac{d A_f}{d t} = \delta A_f, \quad [256]$$

como resulta de [251], con la expresión [255] obtenida mediante la aplicación del principio de Huyghens, la cual considera como una corrección de segundo orden, lo que da para la variación de A_f la expresión:

$$\frac{d A_f}{d t} = \delta A_f - \frac{2}{\pi^2} V \beta A_f^2. \quad [257]$$

La solución estacionaria corresponde, evidentemente, a la anula-

(240) Ver trabajo de estos autores, ya citado, en relación con la estabilidad lineal.

(241) R. E. PETERSEN y H. W. EMMONS: *Stability of Laminar Flames*. «Phys. of Fluids», 1961, págs. 456-64.

(242) G. H. MARKSTEIN: *Nonisotropic Propagation of Combustion Waves*. «Jour. Chem. Phys.», 1952, págs. 1051 y sigts.

(243) Y. B. ZELDOVICH: *An Effect that Stabilizes the Curved Front of a Laminar Flame*. «ZPMTF», 1966, págs. 102-104. Existe traducción inglesa.

ción del segundo miembro de esta ecuación, condición que proporciona para la amplitud A_e de las llamas celulares el valor

$$A_e = \frac{\pi^2 \delta}{2 V \beta}, \quad [258]$$

cuyo orden de magnitud no difiere demasiado de los que se observan experimentalmente en algunos casos típicos, pese a la incorrección inherente a la combinación de ambas teorías.

Fuera de éste, al parecer los dos únicos ejemplos de tratamiento analítico correcto, mediante la aplicación de la Teoría no Lineal de la Estabilidad, han sido el de Markstein (244) y el de Maxworthy (245), este último en relación con el problema clásico de determinar la configuración de la superficie de combustión en la propagación de la llama a lo largo de un tubo lleno de gas combustible y en reposo, cuando se enciende en uno de sus extremos.

En su análisis, Markstein emplea un procedimiento similar al utilizado años antes por Penney y Price (246) para el estudio de las ondas estacionarias de gravedad, de amplitud finita, en el agua, donde la solución se desarrolla en serie de potencias de un parámetro que mide la amplitud de la perturbación.

El modelo al que Markstein aplica este desarrollo es el mismo que utiliza en la Teoría Lineal, es decir, un fluido ideal en el que la llama se identifica con una superficie de discontinuidad y cuya velocidad de propagación depende de la curvatura R de la onda, según una expresión análoga a [253], pero que en este caso ha de ser de la forma

$$V = v_0 \left[1 + \mu \frac{L}{R} + \mu_2 \left(\frac{L}{R} \right)^2 + \dots \right] \quad [259]$$

(244) G. M. MARKSTEIN: *Analysis of Steady, Finite-Amplitude Cellular Flames*. «Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute». Stanford Univ. Press, 1967, págs. 205 y sigts. Ver también, del mismo autor, la obra reiteradamente citada, de 1964, págs. 63-72, así como su trabajo de revisión de 1970.

(245) T. MAXWORTHY: *Flame Propagation in Tubes*. «Phys of Fluids», 1962, págs. 407-17.

(246) W. G. PENNEY y A. T. PRICE: *Finite Periodic Stationary Gravity Waves in a Perfect Liquid*. «Phil. Trans. Roy. Soc.», Londres, 1952, págs. 254-84.

es decir, debe incluir términos en μ_2 , etc., de orden superior al primero, puesto que ahora se investigan efectos no lineales.

Por lo demás, los coeficientes μ_i deben determinarse aquí también empíricamente o mediante procedimientos que tomen en consideración la estructura interna de la llama.

Por otra parte, en este caso se trata de investigar configuraciones perturbadas que sean estables, es decir, estacionarias, como ocurre con las llamas celulares. Por tanto, se busca el equivalente de las soluciones lineales correspondientes al caso $\delta = 0$ en [251], lo cual significa que al desarrollar la perturbación en serie de Fourier, el número de onda β de la misma no puede ser ahora un parámetro arbitrario, sino una incógnita del problema.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, el procedimiento consiste en desarrollar cada una de las incógnitas del problema (componentes de la velocidad; presión; función de deformación del frente de la llama; número de onda y velocidad de propagación de la llama) en serie de potencias de la amplitud; introducir seguidamente tales desarrollos en el sistema diferencial del problema así como en las condiciones de contorno e igualar los términos del mismo orden, con lo que se obtienen sucesivamente las soluciones correspondientes a cada uno de los diversos órdenes del desarrollo.

En particular, la solución de primer orden coincide, evidentemente, con el caso de estabilidad neutra de la Teoría lineal y proporciona el punto de partida para obtener las soluciones correspondientes a los órdenes sucesivos.

Si bien el procedimiento indicado no ofrece, como se ve, dificultades de principio, sin embargo, la complejidad del cálculo aumenta muy considerablemente al crecer el orden de la aproximación buscada.

A ello contribuye el que, al pasar a órdenes superiores al primero, hay que tomar en consideración tres factores nuevos que complican sustancialmente las cosas.

En primer lugar, hay que tener en cuenta que el movimiento en la zona de gases quemados ya no es irrotacional, por lo que el sistema diferencial a emplear en esta región es bastante más complicado.

En segundo lugar, las condiciones de contorno sobre la superficie de la llama ya no pueden aplicarse en el punto $x = 0$ de la onda plana, como se hacía en la Teoría Lineal, sino que hay que hacerlo en el punto $x = f(y, t)$ de la onda deformada.

Finalmente, la curvatura R que determina en [259] la velocidad

de propagación de la llama, ya no es una función lineal de la deformación $x = f(y)$, puesto que está dada por la expresión:

$$\frac{1}{R} = - \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{3/2}}. \quad [260]$$

Markstein, en su trabajo, lleva el desarrollo hasta los términos de quinto orden y obtiene resultados que muestran una coincidencia muy satisfactoria con el comportamiento experimental de las llamas celulares.

La figura VI-27, tomada de dicho trabajo, ilustra cualitativamente sus principales resultados.

En a) se muestra la forma de la relación existente para el caso de estabilidad neutra entre la amplitud de la perturbación y su longitud de onda. Amplitudes inferiores a $A_{\min}$ son inestables, mientras que las superiores a $A_{\max}$ dan lugar al fraccionamiento de la célula en otras menores, todo ello de acuerdo con las observaciones experimentadas.

En b) se representan varios perfiles de onda correspondientes a diversos valores de A , los cuales muestran formas muy similares a las que se observan experimentalmente (la zona de gases quemados corresponde a la parte superior de la figura).

El tercer perfil, que corresponde a un valor $A > A_{\max}$ muestra ya, en la zona convexa hacia los gases fríos, la aparición de las perturbaciones que conducen al fraccionamiento de la célula.

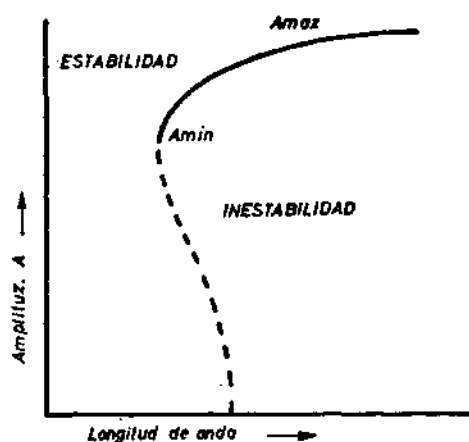
Maxworthy, en su trabajo, sigue un procedimiento similar al de Markstein, si bien el desarrollo de la solución ha de hacerse en serie de funciones de Bessel, en lugar de trigonométricas, a causa de la simetría cilíndrica, lo que complica algo más la obtención de la solución, en la que además incluye la influencia de la acción de la gravedad.

Como los perfiles que obtiene muestran una coincidencia con las observaciones experimentales bastante menos satisfactoria que en el caso anterior, incorpora en su análisis una corrección de primer orden para tomar en cuenta el efecto de la viscosidad.

Por otra parte justifica cualitativamente la desviación observada al aproximarse a las paredes del tubo por el efecto que éstas tienen

en la velocidad de propagación de la llama (247) y por la acción de la capa límite que se forma en ellas.

Su trabajo, sin embargo, tiene el valor de ser el único que propor-



a) Curva de estabilidad neutra

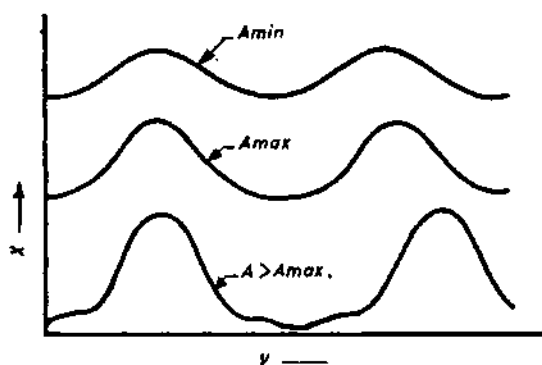


Fig. VI-27.—Resultados de la teoría no lineal de la estabilidad de las llamas.

(247) Problema sin resolver debidamente y a cuyo estudio se han dedicado algunos esfuerzos. Ver, por ejemplo, TH. VON KARMAN y G. MILLÁN, ya citado.

ciona una solución bien determinada para el perfil de la llama en el tubo, en función del diámetro de éste y de las características de la mezcla gaseosa (248).

11. LLAMAS TURBULENTAS

a) *Teorías clásicas.*—La inmensa mayoría de las aplicaciones técnicas de los procesos de combustión se desarrolla en régimen turbulento, cuyo principal efecto práctico consiste en incrementar considerablemente la intensidad del fenómeno.

Por ello tiene gran interés el estudio de la influencia de la Turbulencia en el comportamiento de las llamas, al que se viene consagrande un considerable esfuerzo teórico y experimental, sobre todo desde que se introdujeron los nuevos sistemas de propulsión por reacción empleados en Aeronáutica.

Hay que reconocer, sin embargo que, a pesar de tales esfuerzos, el estado actual de conocimientos sobre las llamas turbulentas es manifiestamente inferior al que se ha alcanzado para las llamas laminares, situación cuya causa hay que buscarla en las dificultades intrínsecas del fenómeno, las cuales complican de modo fundamental tanto su observación experimental como la formulación y el análisis teórico del mismo.

El problema básico a resolver es aquí, naturalmente, el de determinar cómo influye una turbulencia de características bien definidas, preexistente en una mezcla de gases combustibles, en la estructura de una onda de combustión que se propaga a través de aquélla.

En especial, interesa conocer cómo influye la turbulencia de la mezcla en la velocidad de propagación de la llama.

A título de ejemplo y sin perjuicio de lo que se dice a continuación sobre la determinación experimental de la velocidad de propagación de las llamas turbulentas, la figura VI-28, tomada de un trabajo de Wohl (249), ilustra en un caso típico y para una turbulencia de baja intensidad, la forma en que influye ésta en aquélla.

(248) Un problema similar, el de la forma de la llama que se propaga en un conducto de sección rectangular, ha sido tratado posteriormente por Uberoi mediante aplicación del método clásico en la Mecánica de fluidos de la distribución continua de fuentes puntuales sobre la superficie de discontinuidad que representa a la llama. M. S. UBEROI: *Flow Fields of Flame Propagating in Channels Based on the Source Sheet Approximation*. «Phys. of Fluids», 1963, págs. 1104-9.

(249) Ver el trabajo de SCURLOCK y GROVER, que se cita más adelante.

Desde el punto de vista experimental, resulta mucho más difícil que para las llamas laminares, obtener en el laboratorio modelo que permitan aislar el comportamiento de la llama turbulenta de las características particulares del experimento, como sería necesario para definir propiedades intrínsecas de la onda, es decir, propiedades que sólo dependan de las características fisicoquímicas de la mezcla y de las de la turbulencia inicial de la misma (250).

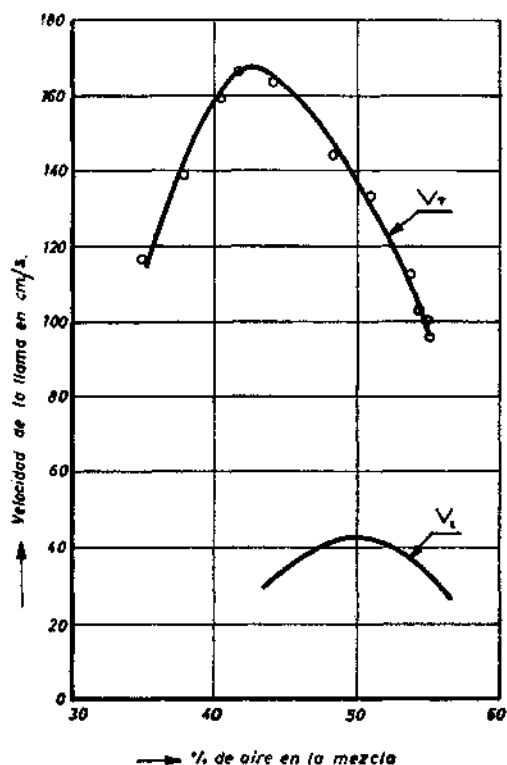


Fig. VI28.—Efecto de la turbulencia en la velocidad de propagación de la llama en un caso típico.

Por ejemplo; en el caso típico de un mechero Bunsen, el cono de combustión nítidamente definido que se observa en una llama laminar es reemplazado, en régimen turbulento, por una zona de gran espesor, cuya estructura geométrica es irregular y cambiante, como

(250) R. GÜNTHER: *Measurements of Flame Turbulence: Aims, Methods and Results*. «Jour. Inst. Fuel», 1970, págs. 187-92.

ilustra la figura VI-29, de acuerdo con el comportamiento aleatorio de los procesos turbulentos (251).

Todo lo cual hace muy difícil obtener mediciones experimentales de validez general, así como coordinar los resultados alcanzados con técnicas diferentes.

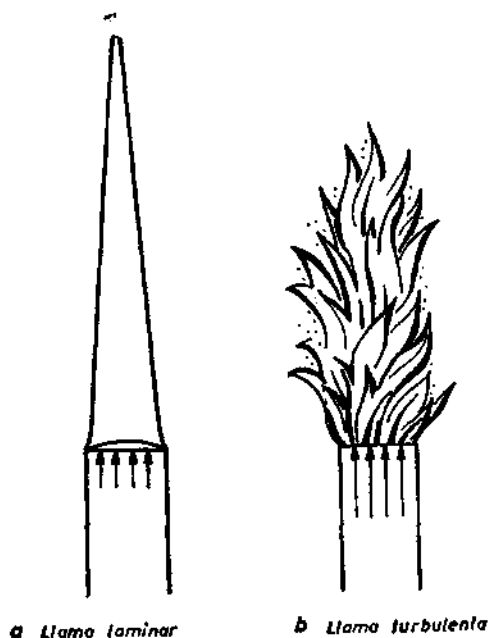


Fig. VI-29.—Efecto de la turbulencia en la estructura de la llama en un mechero Bunsen.

En particular, se hace necesario separar la observación de llamas abiertas, como las que se obtienen, por ejemplo, en un mechero Bunsen o detrás de un estabilizador en la atmósfera libre, de las que se produce en una cámara de combustión como las que se emplean en los motores de propulsión por reacción o de las que se propagan libremente por ignición en un punto de una mezcla combustible en agitación turbulenta.

Sin que ninguno de tales casos responda ni aproximadamente al modelo ideal de una onda plana que se propaga a través de una mezcla indefinida y en régimen turbulento bien definido, caso para el que

(251) Ver capítulo primero, epígrafe 2.

sólo se cuenta con resultados experimentales muy limitados y con turbulencias de baja intensidad (252).

Un análisis de este problema y de definición de una onda de combustión turbulenta, se encontrará en un reciente trabajo de Strehlow (253), que incluye, además, una abundante bibliografía relacionada con la materia.

Aun cuando la influencia de la turbulencia en la propagación de una llama fue ya reconocida por Mallard y Le Chatelier en su famoso trabajo de 1883 (254), el primer intento de explicar científicamente el mecanismo a través del cual actúa aquélla y de determinar el efecto de la misma se debe a Damköhler, cuyo estudio de 1940 sobre «El Efecto de la Turbulencia en la Velocidad de la Llama en Mezclas Gaseosas» (255) constituye elemento de referencia obligado para todos los trabajos posteriores sobre la materia.

Utilizando los conceptos de las Teorías Semiempíricas de la Turbulencia que entonces se había desarrollado (256), Damköhler caracteriza aquélla por su intensidad $\sqrt{v'^2}$, medida por la media cuadrática de las oscilaciones temporales de la velocidad en un punto respecto de la velocidad V de la corriente principal en él y por la escala l , medida por la «longitud de la mezcla» (257).

En estos modelos la longitud l proporciona una medida del tamaño de las masas del fluido que oscilan aleatoriamente superponiéndose al movimiento principal o «movimiento medio» del conjunto.

Y tales oscilaciones dan lugar a fenómenos de transporte turbulento de la cantidad de movimiento, de las concentraciones de las diversas especies y de la energía térmica de la mezcla que son semejantes a las difusividades moleculares de los movimientos laminares.

(252) Ver, por ejemplo, los trabajos de CHOMIAK y SNYDER, que se citan más adelante.

(253) A. PALM-LEIS y R. A. STREHLOW: *On the Propagation of Turbulent Flames*. «Comb. and Flame», 1969, págs. 111-129.

(254) Ver referencia del epígrafe 1 del presente capítulo.

(255) G. DAMKÖHLER: *Der Einfluss des Turbulenz auf die Flammengeschwindigkeit in Gasgemischen*. «Zeit. Elektrochem. und Ang. Phys. Chem.», vol. 46, núm. 11, noviembre 1940, págs. 601-624. Trad. ingl. «NACA Tech. Mem.», 1112, Washington, 1947.

(256) Ver, por ejemplo, la obra de MORIN y YAGLOM, ya citada, págs. 364 y siguientes, o bien el trabajo de J. J. BERNARD: *Quelques Résultats et Méthodes Classiques d'Etude des Écoulements Turbulents*. «AGARD, Sel. Comb. Probl.», ya citado, págs. 195-213.

(257) Ver epígrafe 12 del capítulo primero.

En el caso del movimiento turbulento, además, la intensidad de la difusividad turbulenta D_T está medida por la expresión

$$D_T \sim l \sqrt{v'^2}, \quad [261]$$

semejante, por tanto, a la expresión que proporciona la Teoría Cinética para el transporte molecular.

Como se vio en el capítulo I, las Teorías Semiempíricas de la Turbulencia permitieron obtener soluciones correctas para una gran variedad de casos prácticos de la Mecánica de Fluidos clásica.

Al tratar de extenderlas al estudio de la influencia de la turbulencia en el comportamiento de las llamas premezcladas, Damköhler empieza por comparar la escala l de aquélla, cuya magnitud depende del dispositivo experimental que la haya generado, con el espesor δ_l de la llama laminar, el cual, como se ha visto, en condiciones normales es, generalmente, de una fracción de milímetro.

Si la primera es mucho menor que la segunda, es decir, si:

$$\frac{l}{\delta_l} \ll 1, \quad [262]$$

entonces, según Damköhler, la llama turbulenta se comporta como una onda laminar pero en la que los fenómenos de transporte, en el interior de la misma, son de naturaleza turbulenta, por lo que la difusividad molecular debe sustituirse por la turbulenta dada por [261].

En particular y puesto que la velocidad de propagación de la llama está dada por una expresión de la forma [14], la relación entre la velocidad de propagación turbulenta V_T y la velocidad laminar V_L para la misma mezcla estará dada por la expresión:

$$\frac{V_T}{v_L} = \sqrt{\frac{D_T}{D_L}}, \quad [263]$$

fórmula susceptible de verificación experimental, al menos en principio, puesto que, en la práctica, resulta muy difícil de realizar este caso, a causa del reducido tamaño de la escala con que se necesita operar para ello.

Este sencillo modelo de Damköhler fue desarrollado y perfeccionado por Schhelkin en un trabajo igualmente fundamental publicado

poco después (258), en el que se incluye el efecto de la difusividad laminar junto a la turbulenta, puesto que ambas actúan simultáneamente, lo que lleva a la expresión:

$$\frac{V_T}{v_L} = \sqrt{1 + \frac{D_T}{D_L}}, \quad [264]$$

que sustituye a la [263], para la influencia de la turbulencia en la velocidad de propagación de la llama.

Por otra parte, Schelkin analiza también la influencia de la turbulencia en la velocidad de la reacción química, suponiendo que ésta obedece a una ley del tipo de Arrhenius como la dada en la fórmula [4], concluyendo que en la hipótesis [262] aquélla no se altera, por lo que el efecto de la turbulencia queda efectivamente circunscrito a su influencia sobre la difusividad (259).

Mayor interés tecnológico tiene el otro caso extremo en que la escala de la turbulencia sea mucho mayor que el espesor de la llama laminar:

$$\frac{l}{\delta_l} \gg 1. \quad [265]$$

Entonces, como puso de manifiesto Damköhler, el efecto de la turbulencia consiste en distorsionar la superficie de la onda, como muestra esquemáticamente la figura VI-30, aumentando con ello el área de combustión laminar de la llama, pero sin afectar la estructura interna de ésta.

En consecuencia, la relación de velocidad estará dada por la expresión:

$$\frac{V_T}{V_L} = \frac{S_T}{S_L}, \quad [266]$$

(258) K. I. SCHELKIN: *On Combustion in a Turbulent Flow*. «Jour. Tech. Phys. URSS», 1943. Trad. al inglés en «NACA Tech. Mem.», núm. 1.110, Washington, 1947.

(259) Para un estudio de la influencia de la turbulencia en los procesos de reacción química, ver, por ejemplo, la obra de FRANK-KAMENETSKII, ya citada, pág. 434, así como el trabajo de S. CORSIN: *Statistical Behavior of a Reacting Mixture in Isotropic Turbulence*. «Phys. Fluids», 1958, págs. 42-47, y el de I. GLASSMAN e I. J. EBERSTEIN: *Turbulence Effects in Chemical Reaction Kinetics Measurements*. «AIAA Jour.», junio 1963, págs. 1424-26. También el trabajo de LIBBY y WILLIAMS, que se cita en el capítulo I.

en donde S_T y S_L son, respectivamente, el área de la superficie deformada por la turbulencia y el de la superficie laminar en ausencia de aquélla.

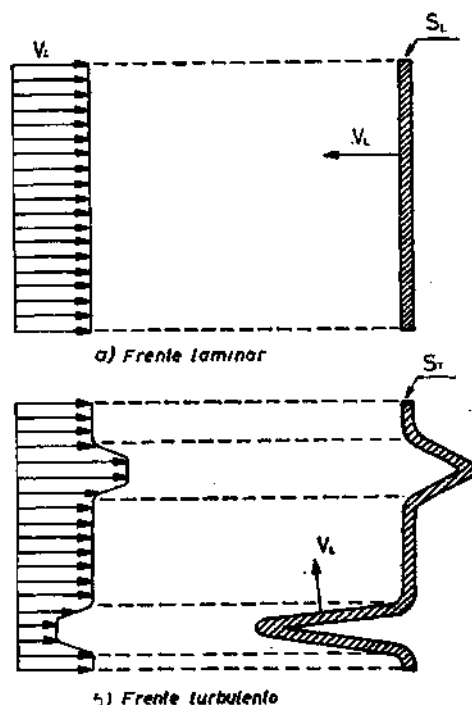


Fig. VI-30.—Distorsión geométrica del frente de llamas, según Damköhler.

El problema consiste entonces en calcular la relación $\frac{S_T}{S_L}$, para lo cual se ha recurrido a modelos geométricos más o menos elaborados.

Por ejemplo, Damköhler supone que las oscilaciones turbulentas transforman la superficie inicialmente plana de la llama laminar, en un conjunto variable de conos, como si fueran mecheros Bunsen, situados de uno y otro lado del plano medio, y concluye que su altura media debe guardar relación con la intensidad $\bar{v}$ de la turbulencia. Con ello llega a la conclusión de que la velocidad turbulenta de la llama debe ser proporcional a la velocidad $\bar{v}$ de agitación turbulenta.

e independiente tanto de la escala l de la turbulencia como de la velocidad de propagación de la llama laminar V_L :

$$V_T \sim \bar{v} \equiv \sqrt{\bar{v}'^2}, \quad [267]$$

resultado que está en contradicción con lo que muestran las mediciones experimentales y conduce, además, al absurdo de que cuando la intensidad de la turbulencia tiende a cero también se anula la velocidad de propagación turbulenta, siendo así que V_T debería tender a V_L en ese caso.

Schelkin ha establecido la cuestión mediante un cálculo más correcto de la relación [266] entre las superficies turbulenta y laminar, lo que proporciona para la velocidad de la llama turbulenta una expresión de la forma:

$$\frac{V_T}{V_L} = \sqrt{1 + B \left(\frac{\bar{v}}{V_L} \right)^2}, \quad [268]$$

que se reduce a [267] cuando es

$$\frac{\bar{v}}{V_L} \gg 1, \quad [269]$$

es decir, cuando la intensidad de la turbulencia es mucho mayor que la velocidad de propagación laminar.

Ahora bien; en este caso, es decir, cuando la intensidad de la turbulencia es mayor que la velocidad de la llama laminar, el efecto de aquélla es no sólo distorsionar la superficie de combustión laminar sino, además, como ha señalado Schelkin, romper este frente dando lugar a que detrás de él penetren paquetes de gas fresco que se queman a partir de la superficie, en régimen laminar, a medida que se mueven hacia la zona de gases quemados, como muestra la figura VI-31.

En cuyo caso, el fenómeno está controlado por el tiempo de combustión de tales paquetes, lo que conduce a Schelkin, mediante un cálculo elemental, a una expresión de la forma [267], para la velocidad de propagación de la llama turbulenta.

Este mismo modelo ha sido tratado recientemente en Rusia por

Talantov (261), en forma más elaborada, lo que le conduce a una fórmula más compleja que la [267], pero que muestra una mayor coincidencia con los resultados experimentales.

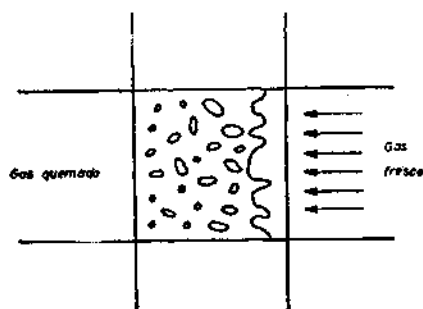


Fig. VI-31.—Estructura de la llama turbulenta según el modelo de Schelkin.

Entre los desarrollos posteriores del modelo de Damköhler para el caso de turbulencia a escala grande con respecto al espesor de la llama laminar, hay que mencionar el de Scurlock y Grover para llamas estabilizadas en cámaras de combustión (261) y el de Karlovitz para llamas abiertas (262).

En ambos casos se opera con un modelo más elaborado de la superficie de combustión turbulenta, para lo que se hace uso de los resultados de la Teoría Estadística de la Difusión Turbulenta desarrollada años antes por Taylor (263), lo que conduce a expresiones para la velocidad de la llama turbulenta que son susceptibles de verificación experimental.

Pero el comparar los resultados de las mediciones con aquellas expresiones, se comprueba que las observaciones experimentales dan

(260) A. V. TALANTOV: *Laws of Combustion of a Homogeneous Mixture in a Turbulent Flow*. «Comb. Expl. and Shock Waves», vol. 5, 1969, págs. 73-77.

(261) A. C. SCURLOCK y J. G. GROVER: *Propagation of Turbulent Flames*. «Fourth Symp. on Com.», págs. 645-58. También, *Experimental Studies on Turbulent Flames*. «AGARD, Sel. Comb. Prob.», ya citado, págs. 215-47.

(262) B. KARLOVITZ, D. W. DENNISTON y F. E. WELLS: *Investigation of Turbulent Flames*. «Jour. Chem. Phys.», 1951, págs. 541-47. También, B. KARLOVITZ: *A Turbulent Flame Theory Derived From Experiments*. «AGARD, Sel. Comb. Probl.», ya citado, págs. 248-62.

(263) G. I. TAYLOR: *Diffusion by Continuous Movements*. «Proc. Lond. Math. Soc.», 1921, págs. 196 y sigts. También H. L. DRYDEN: *A Review of Statistical Theory of Turbulence*. «Quart. Jour. Appl. Math.», 1943, págs. 7-42.

valores considerablemente mayores que los teóricos, lo que explican estos autores mediante la generación de turbulencia adicional producida por la llama, cuya intensidad calculan por procedimientos no exentos de crítica (264).

Por otra parte, Summerfield (265), haciendo uso de una observación inicial de von Karman y Marble (266), considera que el modelo de la superficie de combustión deformada de Damköhler corresponde verdaderamente a un régimen de transición entre la combustión laminar y la turbulenta plenamente desarrollada.

Según Summerfield, cuando la intensidad de la turbulencia respecto de la velocidad de combustión laminar es suficientemente alta, el modelo de Damköhler debe sustituirse por otro en el que la transición, en el seno de la onda de combustión turbulenta, desde la zona de gases fríos hasta la de los productos de combustión, se desarrolla de modo continuo, mediante procesos de difusividad turbulenta y de reacción química semejantes a los que controlan el fenómeno en una onda laminar, si bien el espesor δ_T de la onda turbulenta debe ser mucho mayor que el δ_i de la llama laminar.

En un modelo de esta naturaleza, y bajo hipótesis plausibles, sería aplicable, según Summerfield, la misma ecuación de la energía del régimen laminar, sin más que sustituir en ella la difusividad laminar por la turbulenta y el espesor δ_i por δ_T .

Con ello y puesto que subsisten las mismas condiciones en los límites para ambos casos, se comprueba fácilmente que la velocidad de propagación turbulenta se debe relacionar con la velocidad laminar mediante una expresión de la forma:

$$\frac{V_T \cdot \delta_T}{\varepsilon} = \frac{V_L \cdot \delta_i}{\nu}, \quad [270]$$

(264) Para un reciente análisis de este problema, ver el trabajo de Y. MIRUZANOJ: *Amplification of Turbulence Level by a Flame and Turbulent Flame Velocity*. «Comb. and Flames», 1972, págs. 203-12, así como los trabajos de TUCKER y CHOMIAK, que se citan más adelante.

(265) M. SUMMERFIELD, S. H. REITER, V. KEBELY y R. W. MASCOLO: *The Physical Structure of Turbulent Flames*. «Jet. Prop.», 1954, págs. 254-55. También, *The Structure and Propagation Mechanism of Turbulent Flames in High Speed Flow*. «Jet. Prop.», 1955, págs. 377-84.

(266) TH. VON KARMAN y F. E. MARBLE: *Combustion in Turbulent Flames*. «Fourth Symp. on Comb.», ya citado, pág. 924.

donde ν y ϵ son, respectivamente, el coeficiente de viscosidad cinemática y el de difusividad turbulenta de la mezcla de gases fríos.

En particular y puesto que en una mezcla bajo condiciones termodinámicas iniciales dadas el segundo miembro de esta expresión depende solamente de la relación entre el combustible y el oxidante, lo propio debe ocurrir en el primero al variar las características de la turbulencia inicial de la mezcla, correlación que parecen confirmar las mediciones experimentales.

En cuanto al criterio que permite separar el régimen de superficie deformada de Damköhler del de la zona plenamente desarrollada de combustión continua de Summerfield (267), éste utiliza el valor del parámetro Γ propuesto por Kovaszny (268)

$$\Gamma = \frac{\bar{v}}{l} \cdot \frac{\delta_r}{V_L}, \quad [271]$$

de interpretación física inmediata, de tal modo que al crecer el valor de Γ se produce el tránsito del primero al segundo régimen.

Un intento de combinar los efectos de los modelos de Damköhler y Summerfield que acabamos de describir, se debe a Povinelli y Fuhs (269), mediante la llamada Teoría Espectral de las llamas turbulentas.

Para ello, estos autores parten de la idea de que en todo movimiento turbulento existe un espectro continuo de tamaño de torbellinos, de los que los más pequeños contribuyen a incrementar la velocidad de la llama mediante el efecto de la difusividad turbulenta, mientras que los más grandes lo hacen por el aumento de la superficie de combustión laminar.

En consecuencia, en una formulación correcta es necesario tomar en consideración ambos efectos, para lo que expresan la velocidad de propagación de la llama mediante suma ponderada de dos términos, que corresponden, respectivamente, a las expresiones [270] y [266]

(267) M. SUMMERFIELD: *Turbulent Flames in Gases*. «Jet. Prop.», 1956, páginas 485-86.

(269) L. A. POVINELLI y A. E. FUHS: *The Spectral Theory of Turbulent-Flame Propagation*. «Eighth Symp. on Comb.», ya citado, págs. 554-66.

(268) L. S. G. KOVASZNY: *A Comment on Turbulent Combustion*. «Jet. Prop.», 1956, pág. 485.

del frente continuo de Summerfield y de la superficie deformada de Damköhler (270):

$$\frac{V_T}{V_L} = \left(1 + \frac{\varepsilon}{v}\right) \cdot \alpha + \frac{S_T}{S_L} \cdot \beta, \quad [272]$$

con la condición $\alpha + \beta = 1$.

Y como factor de ponderación utilizan la función espectral de Taylor (271).

$$f(n) = \int_0^n F(n') \, d n', \quad [273]$$

que mide la distribución $f(n)$ de la energía del movimiento turbulento entre las diferentes frecuencias n del análisis armónico del mismo, con lo que, finalmente, para la velocidad de la llama turbulenta, obtienen la expresión:

$$\frac{V_T}{V_L} = \frac{S_T}{S_L} \cdot f(n_0) + \left(1 + \frac{\varepsilon}{v}\right) [1 - f(n_0)], \quad [274]$$

donde n_0 es la frecuencia de corte entre ambos regímenes, la cual determinan por la condición plausible:

$$n_0 = \frac{V_T}{\delta_T}. \quad [275]$$

Con objeto de buscar una confirmación experimental de su Teoría Espectral, estos autores realizan un conjunto de observaciones siste-

(270) La expresión [270] de Summerfield la sustituyen aquí los autores por $\frac{v + \varepsilon}{v}$ para tener en cuenta la influencia de la difusividad laminar junto a la tur-

bulenta, como hizo Schelkin, con objeto de que la fórmula siga siendo válida cuando la intensidad de la turbulencia tiende a cero, porque experimentalmente operan con turbulencias de baja intensidad para poder estabilizar llamas aproximadamente planas

(271) G. I. TAYLOR: *Some Recent Developments in the study of Turbulence*. «Proc. 5th Int. Congr. Appl. Mech.», Cambridge, USA, 1938, págs. 294-310.

máticas sobre una llama aproximadamente plana, en régimen turbulento de intensidad pequeña, pero bajo condiciones de la turbulencia inicial bien definidas para cada caso y varían el espesor de la llama laminar mediante cambios en la presión de la mezcla.

Con ello logran cubrir una amplia gama de condiciones que permite acentuar el peso del efecto de la turbulencia correspondiente a uno u otro de los dos modelos que combina la Teoría, comprobando que los resultados experimentales confirman, cualitativamente al menos, las predicciones de la fórmula [274].

A título de ejemplo de los resultados que obtienen, la figura VI-32 muestra la correlación que resulta entre el parámetro de Kovaszny definido [271], que introdujo dicho autor, como hemos visto, para separar los dos regímenes de Damköhler y Summerfield, y la velocidad de propagación de la llama turbulenta.

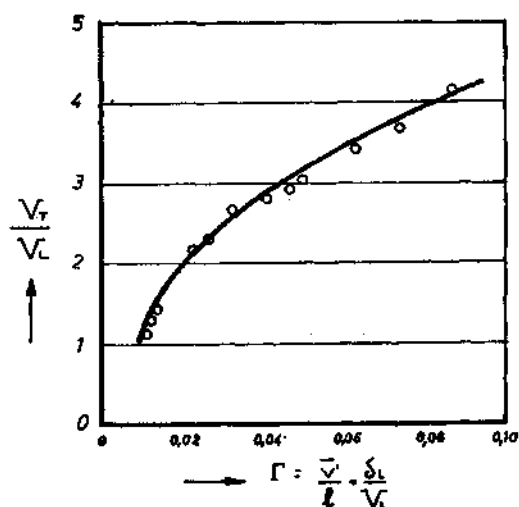


Fig. VI-32.—Correlación experimental entre el parámetro de Kovaszny y el efecto de turbulencia en la velocidad de la llama.

Recientemente, Basu y Bhaduri (272) han aportado evidencia experimental que parece confirmar la tesis de Povinelli y Fuhs de un tránsito continuo desde el régimen de la superficie deformada de Damköhler al de la zona de reacción continua de Summerfield, a

(272) P. BASU y D. BHADURI: *Structure of Premixed Turbulent Flame*. «Comb. and Flames», 1972, págs. 303-5.

través de una situación intermedia del tipo descrito por Schelkin, al crecer la intensidad de la turbulencia de la mezcla de gases frescos.

Por último, un ejemplo interesante de tratamiento matemático discreto del modelo de Summerfield se debe a Shetinkov (273).

En él, Shetinkov supone que el régimen turbulento está caracterizado por un conjunto de volúmenes elementales de gas, de características y movimientos bien definidos y que la combustión se produce al mezclarse dos de ellos, con temperaturas y composiciones adecuadas. Para ello, al mezclarse los dos volúmenes, primero se uniformiza la composición y temperatura del elemento resultante por un proceso de difusión y después se quema todo él a la vez, como una mezcla homogénea y combustible que arde.

Es decir, que en el proceso desaparece el concepto de llama laminar y el papel asignado a ésta en el modelo de Damköhler.

Suponiendo dada una distribución inicial de volúmenes elementales así como unas leyes definidas del movimiento turbulento, las cuales se caracterizan por las distancias y velocidades de los recorridos individuales de aquéllos, magnitudes que miden, en esencia, la escala y la intensidad de la turbulencia considerada; suponiendo, además, unas leyes plausibles para la combustión homogénea de las mezclas que resultan al unirse dos volúmenes, en función de la composición y temperatura de la mezcla del volumen resultante, es posible calcular la forma en que progresa la combustión en este modelo, es decir, la velocidad de propagación de la llama turbulenta.

Los resultados que se obtienen con este procedimiento de cálculo muestran un comportamiento cualitativo similar al de las observaciones experimentales que también lleva a cabo el autor, lo cual parece confirmar la validez del modelo de Summerfield en los casos considerados.

Para terminar esta parte de la exposición de la Teoría de las llamas turbulentas, remitimos al lector a tres trabajos que contienen resúmenes de utilidad en relación con los modelos simplificados que acabamos de exponer, unidos a algunas informaciones complementarias y bibliografía adicional.

(273) E. S. SHETINKOV: *Calculation of Flame Velocity in Turbulent Stream*. 47th Symp. on Comb., ya citado, págs. 583-89.

El primero es un trabajo de van Tiggelen y de Soete (274) que recoge muy sistemáticamente el estado general de conocimientos de la Teoría en la fecha de su publicación, junto con los fundamentos de la Teoría Estadística de la Turbulencia y con los métodos experimentales en uso.

El segundo es un trabajo de Lefebvre y Reid (275) que contiene una interesante tabulación de las principales teorías y series de ensayos experimentales, junto con mediciones propias para llamas confinadas en una cámara de combustión.

Finalmente, el tercero es un artículo muy reciente de Barrere (276), en el que se analizan además problemas relacionados con la polución debida a la combustión incompleta y con el ruido de las llamas turbulentas, tema éste cuyo tratamiento matemático no está exento de dificultades e interés.

b) *Nuevos desarrollos.*—Todo lo que acabamos de exponer permite apreciar, como se ha anticipado, que el estado de conocimientos de las llamas turbulentas resulta hasta aquí muy insatisfactorio, y ello tanto en su aspecto teórico como en el experimental.

Por ello, desde hace algún tiempo se está intentando un desarrollo teórico de más sólida fundamentación, actuando simultáneamente en dos direcciones que corresponden, respectivamente, al modelo de la superficie deformada de Damköhler y al de la zona de combustión continua, de Summerfield.

Por lo que respecta al primero, el problema fundamental consiste en sustituir las hipótesis más o menos ingeniosas que han sido manejadas por los diversos investigadores en los desarrollos descritos, por un riguroso análisis de la interacción entre un frente discontinuo de onda equivalente a una llama laminar y un campo turbulento de características definidas, en forma análoga a cómo se estudió en la «Teoría de la estabilidad de las llamas», de Landau-Markstein, la interacción entre aquél y una perturbación dada.

En este planteamiento, si la intensidad de la turbulencia es peque-

(274) A. VAN TIGGELEN y G. DE SOETE: *La Déflagration en Régime Turbulent*. «Revue de l'Institut Française de Pétrole», París, 1964, págs. 661-719. Ver también la obra de VAN TIGGELEN et al., citada al comienzo del capítulo VI.

(275) A. H. LEFEBVRE y R. REID: *The Influence of Turbulence on the Structure and Propagation of Enclosed Flames*. «Comb. and Flame», 1966, págs. 355-66.

(276) M. BARRERE: *Modeles de Combustion Turbulente*. «Revue Général de Thermiques», París, 1974, págs. 295-308.

ña respecto de la velocidad de propagación de la llama laminar, el problema se puede linealizar análogamente a lo que se hizo en el estudio de la Estabilidad. Ello simplifica la cuestión en términos que la hacen asequible al tratamiento matemático si bien, respecto de aquel caso, existe aquí la dificultad que resulta de la naturaleza estadística del fenómeno turbulento.

La base para este tipo de planteamiento se encuentra en un estudio de Ribner (277), de la NASA, sobre la interacción entre una onda de choque y un campo turbulento, el cual descompone el autor, mediante análisis de Fourier, en un conjunto de perturbaciones individuales, cuyo comportamiento al atravesar la onda de choque analiza separadamente para cada una de ellas, aplicando las condiciones de compatibilidad del salto de la onda, como se hizo en la «Teoría de la estabilidad de las llamas». La conclusión del estudio es que, al atravesar la onda, la perturbación incidente experimenta una deflexión y un cambio de intensidad, al mismo tiempo que se genera en la superficie del choque una onda acústica.

El método de Ribner fue aplicado por primera vez a las ondas de combustión por Markstein (278), si bien en forma muy simplificada, que no permitía alcanzar conclusiones prácticas sobre el efecto de la turbulencia en el comportamiento de la llama.

Un análisis mucho más laborioso, en el que el autor aplica técnicas del análisis espectral para determinar la interacción de la llama con un campo turbulento isotrópico de intensidad reducida, se debe a Tucker (279), también de la NASA.

Las principales conclusiones del autor son, en primer lugar, que la llama transforma el campo isotrópico incidente en otro anisotrópico con simetría de revolución, si bien la intensidad de la turbulencia adicional generada por la llama es muy pequeña; en segundo lugar y contrariamente a lo que indican los resultados experimentales, el incremento de la velocidad de propagación de la llama debido a la acción de la turbulencia es un efecto de segundo orden respecto de la intensidad de ésta; por último, la llama origina ondas acústicas, de

(277) H. S. RIBNER: *Convection of a Pattern of Vorticity Through a Shock Wave*. «NACA Tech. Rept.», núm. 1.164, Washington, 1954.

(278) G. H. MARKSTEIN: *Interaction of a Plane Flame Front with a Plane Sinusoidal Shear Wave*. «Jour. Aer. Sci.», 1953, págs. 581-82.

(279) M. TUCKER: *Interaction of a Free Flame Front with Turbulent Field*. «NACA, Tech. Rept.», núm. 1.277, año 1956.

fuerte intensidad en la proximidad de la misma, pero que se amortiguan rápidamente al alejarse de la superficie de combustión.

Pero el más reciente de los análisis llevados a cabo sobre este planteamiento es, seguramente, el debido al profesor Chomiak (280), del Instituto Lotvictwa de Varsovia, que con anterioridad había avanzado una hipótesis sobre el posible mecanismo de propagación de las llamas turbulentas a elevados números de Reynolds (281), basada en las modernas teorías sobre el comportamiento de la estructura fina del campo turbulento.

La figura VI-33, tomada del citado trabajo, ilustra esquemáticamente el comportamiento de la perturbación incidente al atravesar la llama.

Los resultados del análisis linealizado de Chomiak, más sencillo,

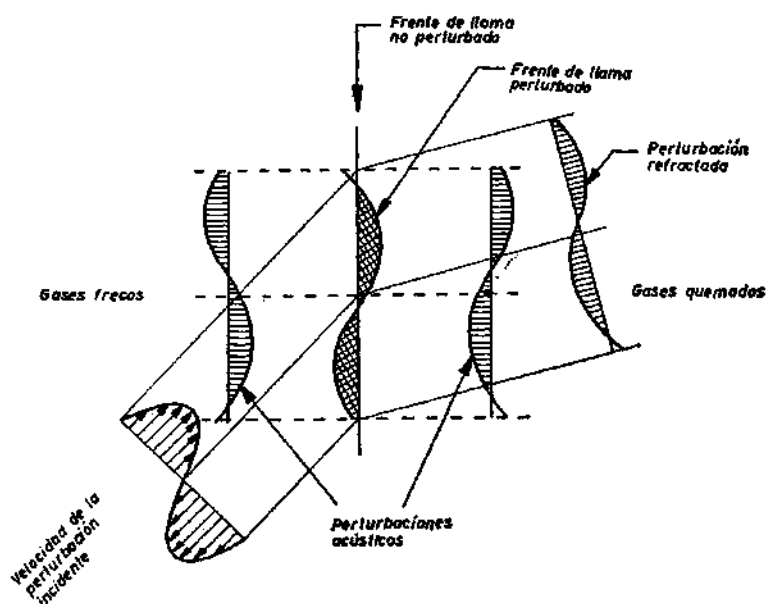


Fig. VI-33.—Interacción entre la perturbación incidente y el frente de llama.

(280) J. CHOMIAK: *Flame-Turbulence Interaction*. «Comb. and Flames», 1973, págs. 143-55.

(281) J. CHOMIAK: *A Possible Propagation Mechanism of Turbulent Flames at High Reynolds Numbers*. «Comb. and Flames», 1970, págs. 319-21.

que el de Tucker, confirman que la intensidad de la turbulencia generada por la llama es muy pequeña o nula, así como la existencia de ondas acústicas de amortiguación rápida con la distancia a la llama, cuya velocidad de propagación muestra una fuerte dependencia de la inclinación de la onda y de la relación entre las densidades de los gases frescos y quemados.

Como conclusión básica de lo que acaba de exponerse hay que señalar que los progresos realizados en esta dirección son por ahora bastante insatisfactorios y que todavía resta, sin duda, un largo camino para alcanzar resultados que puedan ser verdaderamente significativos.

Mayores posibilidades parece ofrecer por el momento el desarrollo matemático del modelo de Summerfield, al que se viene concediendo una atención que ha permitido alcanzar ya resultados bastante prometedores.

El punto de partida para su tratamiento consiste en generalizar a estos fenómenos el método introducido por Reynolds (282) en 1894 para la formulación de las ecuaciones del movimiento turbulento y que tan fecundos resultados ha producido en el estudio de otros procesos como vimos al tratar de la capa límite.

Veamos a continuación cuál es el sistema de ecuaciones de Reynolds que se obtendría para el caso más sencillo de una mezcla de dos únicas especies químicas de igual peso molecular (reactantes y producto), en ausencia de la viscosidad y suponiendo que la presión es constante y que la energía cinética del movimiento es muy pequeña, es decir, con las hipótesis habituales para el estudio de las llamas.

Aun cuando el movimiento medio sea plano y estacionario, es evidente que el movimiento instantáneo no lo puede ser, por lo que habrá de escribirse el sistema diferencial del mismo en su forma más general. Con las hipótesis indicadas y con la notación habitual, dicho sistema es el siguiente, en donde el subíndice i denota valores instantáneos:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \cdot \mathbf{v}_i) = 0; \quad [276]$$

(282) Ver el epígrafe 12 del capítulo primero.

Ecuación de conservación del reactante:

$$\frac{\partial (\rho_i \cdot Y_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i Y_i \mathbf{v}_i) = \omega_i + \nabla \cdot (\rho_i \cdot \mathbf{D}_i \cdot \nabla Y_i); \quad [277]$$

Ecuación de conservación de la energía:

$$\frac{\partial (\rho_i T_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i T_i \mathbf{v}_i) = \frac{q}{C_p} \omega_i + \nabla \cdot \left(\frac{\lambda_i}{C_p} \nabla T \right), \quad [278]$$

donde, además, se ha supuesto que el calor específico C_p es constante.

Sin que sea necesario escribir la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, a causa de las hipótesis supuestas.

El sistema se completa, naturalmente, mediante la ecuación de estado

$$\frac{p_i}{\rho_i} = R T_i \quad [279]$$

y mediante la ley de reacción para ω_i , que se supone del tipo Arrhenius y de primer orden:

$$\omega_i = K \rho_i Y_i e^{-\frac{B}{RT_i}}. \quad [280]$$

Al expresar ahora cada una de las variables del fenómeno como suma de su valor medio y de la fluctuación, tal como se hizo en el epigrafe 12 del capítulo I, y calcular valores medios de las ecuaciones, mediante la aplicación de las reglas de Reynolds, el sistema anterior se transforma en el siguiente, el cual resulta evidentemente estacionario y además unidimensional si se supone que el proceso turbulento tiene simetría axial, lo que anula todos los gradientes en las direcciones transversales a x :

Ecuación de continuidad:

$$\rho v + \overline{\rho' v'} = m = \text{const.} \quad [281]$$

Ecuación de conservación del reactante:

$$m \frac{dY}{dx} + \frac{d}{dx} (\rho \overline{v'Y'} + v \overline{\rho'Y'}) - \rho D \frac{d^2 Y}{dx^2} = w, \quad [282]$$

ecuación en la que se ha hecho uso de la condición [281] anterior y en donde, además, se ha supuesto que el producto ρD es constante y que la correlación de tercer orden $\overline{\rho'Y'v'}$ es muy pequeña frente a las de segundo orden, y pueden despreciarse.

Ecuación de conservación de la energía:

$$m \frac{dT}{dx} + \frac{d}{dx} (\rho \overline{v'T'} + v \overline{\rho'T'}) - \frac{\lambda}{C_p} \frac{d^2 T}{dx^2} = w, \quad [283]$$

donde también se han adoptado hipótesis similares a las del caso anterior, por lo que respecta a λ y a las correlaciones de tercer orden.

Por último, como se comprueba fácilmente, el valor medio de la velocidad de reacción adopta la forma:

$$w = K \rho Y e^{-\frac{E}{RT}} \left[\left(1 + \frac{r'}{r} + \frac{p'}{p} \right) e^{\frac{E}{RT} - \frac{\eta/r'}{1+\eta/r'}} \right] \quad [284]$$

y el de la ecuación de estado es:

$$p = R \rho T \left(1 + \frac{\overline{\rho'T'}}{\rho T} \right). \quad [285]$$

El problema consiste, pues, en integrar este sistema de ecuaciones con las siguientes condiciones en los límites:

$$\left. \begin{aligned} x = -\infty, & \quad T = T_0; \quad Y = 1. \\ x = +\infty, & \quad T = T_f; \quad Y = 0, \end{aligned} \right\} \quad [286]$$

y sabiendo, además, que la turbulencia de los gases frescos es isotrópica y homogénea y que tiene unas características determinadas

por los valores de la intensidad $\frac{\sqrt{\overline{v'^2}}}{v_0}$ y de aquellas otras magnitudes estadísticas que sean necesarias para resolverlo (283).

Debiendo introducirse aquí también, como en el caso de la llama laminar y por las mismas razones, la hipótesis de una temperatura de encendido T_i , por debajo de la cual es $w \equiv 0$, o cualquier otra limitación equivalente, para que el problema tenga solución.

La cuestión primera estriba entonces, como en el caso de las llamas laminares, en calcular el valor propio del parámetro m , si es que existe, el cual determina el valor de la velocidad de propagación de la llama turbulenta

$$V_i = v (-\infty), \quad [287]$$

a partir de la ecuación [281].

Estamos, pues, ante un problema formalmente similar al de las llamas laminares, pero con la dificultad adicional que introduce la presencia, en las ecuaciones del sistema, de los términos de correlación turbulenta, los cuales habría que poder expresar en función de x y de los valores medios $\bar{\rho}$, $\bar{v}$, $\bar{Y}$, $\bar{T}$ de las incógnitas para resolverlo, puesto que, en caso contrario, estaríamos ante un sistema indeterminado, en el que las citadas correlaciones son otras tantas incógnitas nuevas de aquél.

Sin que esta dificultad básica tenga solución, como ya se comentó al tratar de un problema análogo en la Teoría de la Capa Límite, porque la introducción de nuevas ecuaciones para tales incógnitas incorpora a su vez otras incógnitas, correspondientes a correlaciones de orden cada vez más elevado.

Por ello, la dificultad hay que soslayarla, como allí se hizo, mediante hipótesis adecuadas respecto a los términos de correlación, utilizando el método empleado en las Teorías Semiempíricas de la Turbulencia para la resolución de los problemas clásicos de la Capa Límite.

Ese es, concretamente, el procedimiento empleado por Sny

(283) Se prescinde en este planteamiento de la amortiguación de la turbulencia debida a los efectos de la viscosidad, porque el espesor de la llama turbulenta es reducido, en general, respecto de la longitud necesaria para que aquel efecto tenga una influencia sensible.

der (285) quien, a través de una formulación sensiblemente más laboriosa que la anterior y con algún error que complica innecesariamente el tratamiento del problema, identifica los términos de correlación de las ecuación [282] y [283] con sendos coeficientes de difusión ϵ_D y transporte de calor ϵ_T turbulentos, respectivamente.

Con una hipótesis de esta naturaleza y suponiendo, además, que la velocidad media de reacción ω se identifica con la velocidad de reacción $\omega(Y, T)$ de la temperatura y concentración medias, el sistema anterior de ecuaciones se sustituye por el siguiente:

$$m \cdot \frac{dY}{dx} - (\epsilon_D + \rho D) \frac{d^2 Y}{dx^2} = \omega(Y, T) \quad [288]$$

$$m \cdot \frac{dT}{dx} - \left(\epsilon_T + \frac{\lambda}{C_p} \right) \frac{d^2 Y}{dx^2} = \frac{q}{C_p} \omega(Y, T) \quad [289]$$

donde, a falta de un mejor conocimiento de su variación, se ha supuesto, además, que los coeficientes de transporte turbulento ϵ_D y ϵ_T son constantes a través de la llama.

Con ello y con las condiciones en los límites dados en [286], el problema se identifica totalmente, entonces, con el de la llama laminar, sin otra diferencia que la de sustituir en la solución de los coeficientes de transporte laminares por la suma de éstos y de los turbulentos.

En particular, allí se vio que la velocidad de propagación de la llama es proporcional a $\sqrt{\frac{\lambda}{C_p}}$ (285), por lo que, en el caso turbulento, será:

$$V_T \sim \sqrt{\epsilon_T + \frac{\lambda}{C_p}}, \quad [290]$$

expresión que se reduce a

$$V_T \sim \sqrt{\epsilon_T} \quad [291]$$

(284) W. T. SNYDER: *Preliminary Observations of a One-Dimensional Turbulent Propane-Air Flame*. «Eighth Symp. on Comb.», 573-81.

(285) Ver, por ejemplo, la ecuación [13].

cuando el coeficiente del transporte turbulento es mucho mayor que el laminar.

Llegados a este punto, la cuestión se reduce a expresar ϵ_T en función de las características de la turbulencia.

Pero las Teorías Semiempíricas, reiteradamente mencionadas, enseñan que ϵ_D y ϵ_T son proporcionales a la intensidad de la turbulencia:

$$\epsilon_T \sim \overline{v'^2}, \quad [292]$$

con lo que resulta, finalmente, para la influencia de la turbulencia de la mezcla en la velocidad de propagación de la llama, una expresión de la forma:

$$V_T \sim \sqrt{\overline{v'^2}}. \quad [293]$$

La figura VI-34, tomada del trabajo de Snyder, muestra los resultados experimentales obtenidos por el autor con una llama plana para intensidades pequeñas de la turbulencia incidente.

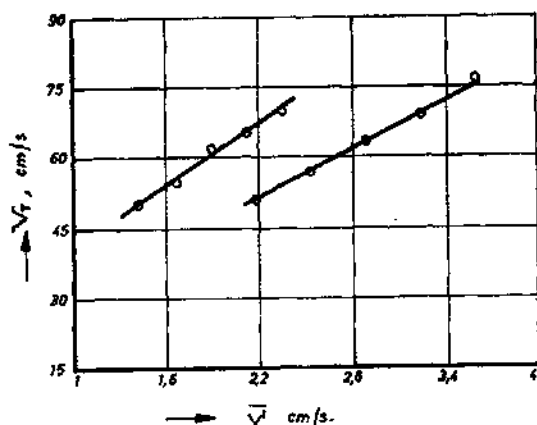


Fig. VI-34.—Efecto de la intensidad de la turbulencia en la velocidad de propagación de la llama para dos escalas de turbulencia diferentes, según Snyder.

Como puede verse, tales resultados confirman bastante satisfactoriamente la expresión [293].

Operador con un planteamiento similar y mediante la integración del sistema diferencial resultante con la ayuda de un calculador ana-

lógico, Bhaduri (286), del Instituto Central de Investigaciones Mecánicas de Durgapur, en la India, obtiene resultados numéricos sobre la estructura de las llamas turbulentas, su velocidad de propagación y el espesor de las mismas, los cuales muestran buena coincidencia con las observaciones experimentales, que realiza estabilizando llamas plantas en un difusor cónico de sección circular.

El procedimiento de integración empleado es igualmente aplicable a las llamas laminares, lo que permite al autor comparar resultados entre unas y otras.

Asimismo, Sanematsu (287), de la Universidad del Sur de California, ha llevado a cabo integraciones numéricas del sistema propuesto, cuyas soluciones compara, por lo que respecta a la estructura interna y a la velocidad de propagación de la llama, con las correspondientes al caso laminar.

Sin embargo, su método ha dado lugar a serias objeciones (288), bien justificadas si se tiene en cuenta, por ejemplo, que el espesor de la llama en régimen turbulento resulta en los cálculos de Sanematsu inferior al de la llama laminar, en contradicción tanto con la evidencia experimental como con los resultados de los cálculos de los autores previamente citados. Por ejemplo; Bhaduri muestra que el espesor de la llama turbulenta es, en un caso típico, unas 100 veces mayor que el de la llama laminar para la misma mezcla.

Si bien los métodos de integración numérica que emplea Sanematsu ofrecen interés para el repertorio de procedimientos del cálculo de soluciones, lo que invalida su modelo es la hipótesis de comportamiento que introduce para los términos de correlación turbulenta del sistema diferencial [282] y [283].

En efecto; en lugar de hacerlos proporcionales respectivamente a los gradientes de la concentración y de la temperatura, como corresponde a los fenómenos de transporte de masa y de calor, los hace proporcionales a la concentración y a la temperatura de la mez-

(286) D. BHADURI: *Evaluation of Flame Speed in Turbulent Flow*. «Indian Journal of Technology», 1965, págs. 308-13. También *Mechanism of Turbulent Combustion*. Idem id., 1968, págs. 187-88.

(287) H. S. SANEMATSU: *Turbulent Flame Propagation in a Homogeneous Gas Mixture*. «Comb. and Flame», 1969, págs. 1-7. También *Turbulent Flame Propagation Parameters*. Idem id., 1969, págs. 91-98.

(288) D. BHADURI y W. J. D. ANNAND: *Turbulent Flame Propagation: Comments on Sanematsu's Correlation*. «Comb. and Flame», 1 y 2, 1970, págs. 79-82. Mech., 1970, págs. 401-21.

cla, con lo que las soluciones siguen estando controladas básicamente por los coeficientes de transporte laminar.

Para terminar es necesario mencionar un interesante trabajo del profesor Williams (289), el cual abre un camino, dentro del planteamiento del sistema anterior, que puede resultar muy fecundo. Además, el trabajo, en sí mismo, ofrece interés por la claridad de su exposición y por el análisis crítico que contiene del planteamiento matemático del problema de la llama turbulenta.

En esencia, el método de Williams consiste en ampliar el sistema de Reynolds mediante un cálculo de nuevas correlaciones.

Con ello, las de segundo orden que aparecen en las ecuaciones anteriormente citadas, quedarían determinadas a través de nuevas ecuaciones diferenciales, en las que aparecerían dichas correlaciones como incógnitas, junto a las variables medias $\bar{Y}$, $\bar{T}$, determinadas por el sistema anterior y junto a nuevas correlaciones del mismo orden o de orden superior.

Entonces, las hipótesis que en los métodos anteriormente descritos se hacían sobre las correlaciones de segundo orden relativas a los coeficientes de transporte turbulento, hay que hacerlas sobre las nuevas correlaciones para convertir en determinado el sistema diferencial ampliado que se obtiene.

Si la Teoría General de la Turbulencia permite hacer hipótesis plausibles sobre las nuevas correlaciones, se ganará en precisión al calcular las que más importna, es decir, las de transporte turbulento, mediante la integración de las ecuaciones diferenciales anteriormente citadas, las cuales determinan su comportamiento, en lugar de suponer que son constantes.

Con objeto de aplicar el método a un ejemplo sencillo, que resulte asequible al cálculo, el prof. Williams resuelve el caso del sistema [282] y [283], en la hipótesis de que la reacción química no libera calor, lo que elimina del problema la temperatura y reduce el sistema diferencial a dos ecuaciones de segundo orden: una para el cálculo de la fracción másica Y del reactante y otra para el de la correlación $\overline{v'Y'}$.

La segunda de estas ecuaciones incorpora una nueva correlación entre los gradientes de las fluctuaciones v' e Y' , la cual, según enseña la Teoría General de la Turbulencia, es un término disipativo,

(289) F. A. WILLIAMS: *An Approach to Turbulent Flame Theory*. «*Jour. Fluid*

que puede aproximarse en función de la correlación incógnita $\sqrt{Y'}$ y de la escala de la turbulencia.

Con esto y alguna simplificación bien justificada, se hace determinado el sistema cuya integración resuelve el problema.

La incorporación al modelo de la escala de la turbulencia, permite el autor analizar el comportamiento de la llama en los casos límites en que dicha escala es respectivamente pequeña o grande, al compararla con el espesor de la llama laminar.

Estos últimos trabajos que acabamos de comentar marcan, pues, las líneas de investigación que se están siguiendo recientemente y en las que debe proseguir el estudio para llegar a un satisfactorio esclarecimiento del difícil e importante problema, aún no resuelto, de la interacción entre la Turbulencia y los fenómenos de Combustión.

A este respecto se anuncian algunas publicaciones próximas cuyo contenido ofrecerá, indudablemente, un gran interés (290).

(290) F. A. WILLIAMS: *A Review of Some Theoretical Considerations of Turbulent Flame Structure*. Aparecerá como «AGARDograph» en 1975; P. A. LIBBY y F. A. WILLIAMS: *Turbulent Flows Involving Chemical Reactions*. Aparecerá en «Ann. Rev. Fluid Mech.» en 1976.

DISCURSO DE CONTESTACION

POR EL ACADÉMICO NUMERARIO

EXCMO. SR. D. FELIPE LAFITA BABIO

Excmo. señor Presidente,
Excmos. señores Académicos,
Señoras, señores:

Dentro de unos momentos, se va a imponer por nuestro Presidente a Gregorio Millán Barbany la medalla que simboliza el cargo de miembro numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, correspondiéndome, por la benevolencia, que mucho agradezco, de todos sus miembros, la contestación a su discurso de ingreso.

Para los que conocen mi antigua y entrañable amistad con el nuevo Académico, es obvio que ello constituye para mí, grata satisfacción. Pero dejando a un lado este aspecto sentimental, puedo afirmar que igualmente la sentiría, ya que tengo la seguridad que en el día de hoy ingresa en nuestra Academia una gran persona, de una extraordinaria inteligencia y capacidad de trabajo, lo que le ha conducido a dirigir sus actividades, no en una sola dirección como es normal en un intelectual, sino que ha recorrido amplias singladuras en horizontes muy diversos, para poder satisfacer sus anhelantes inquietudes científicas, técnicas y empresariales, como lo vais a comprobar por una visión que, aunque muy sucinta de su vida profesional, voy a hacer a continuación.

En el año 1941 ingresa en la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos y rápidamente su aureola de poseer un intelecto superior y puro cabalgaba no solamente por las aulas de la mencionada Academia, sino también por todas las dependencias del Ministerio del Aire.

Por ello, cuando el para mí inolvidable General Juan Vigón, que tenía como una de las principales preocupaciones de su vida, conseguir para nuestro país un gran plantel de investigadores, convencido que ello constituía el mejor camino para su progreso industrial, creó,

siendo Ministro del Aire, el Instituto Nacional de Técnica Aeronáutica, del que fui su primer Director General, siguiendo la norma que en mi vida me he trazado, de acuerdo con el epitafio que escribió en su tumba el creador del extraordinario complejo siderúrgico de Pesburgo: «Aquí yace quien no tuvo otro mérito que elegir entre sus colaboradores aquellos que creía tenían más talento que él», traté de lograr la colaboración de Gregorio Millán con el citado Instituto, a cuyo fin fundé en el año 1943 una beca para que, aun sin haber terminado su carrera, se incorporase al Departamento de Aerodinámica.

Dado que es norma general en los centros investigadores que su personal goce de una gran amplitud en sus facultades decisorias, pude comprobar inmediatamente que aquella aureola estaba firmemente cimentada.

Esta misma opinión era compartida por el insigne e inolvidable Académico ya fallecido Esteban Terradas, quien en aquellas fechas era Presidente del Patronato del mencionado Instituto.

Al terminar su carrera en el año 1945, lo que hizo con el número uno de su promoción, siguió prestando sus servicios en dicho Departamento, a la vez que desempeñaba, en la Academia Militar de Ingenieros Aeronáuticos, la cátedra de Aerodinámica Teórica.

En el año 1948 cursó estudios en los Estados Unidos como becario del I. N. T. A., trabajando en colaboración con el eminente profesor Theodore von Karman, tan admirado por físicos, matemáticos e ingenieros, en aquellas fechas asesor científico de las Fuerzas Aéreas de dicho país.

Tanto por éste como por otros científicos aeronáuticos, que durante ese período tuvieron relación con nuestro nuevo compañero, le llegaron muchos cantos de sirena para que se trasladase a aquel país. Entonces surgió el español hasta la médula, que por nada ni por nadie se ausentaría por un gran periodo de España, aunque naturalmente ello suponía una gran pérdida en su posición económica y aun científica, por no disponer aquí de los poderosos medios de investigación que en el otro lado le ofrecían.

Por ello, únicamente aceptó, durante el periodo 1951-1952, actuar como Auxiliar del mencionado profesor, en el curso que éste desarrolló en la Universidad de París, sobre Aerotermodinámica de la Combustión.

En el año 1951 obtuvo por concurso oposición la cátedra de Mecánica de Fluidos y Aerodinámica Teórica, en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos, en la que desarrolló una extraordinaria labor, incorporando a sus enseñanzas las teorías y aplicaciones más en voga, que en aquellos tiempos estaban en constante innovación, tales como la Aerodinámica de grandes velocidades.

Tanto durante el desempeño de esta cátedra, como en su permanencia en el I. N. T. A., donde creó el Grupo denominado de Combustión, cuyos trabajos investigadores, muchos de ellos subvencionados por la Oficina Europea del Air Research and Development Command de las Fuerzas Aéreas de EE. UU., han tenido amplia acogida en la bibliografía científica internacional, tuvo la virtud de realizar una fecunda siembra, que ha germinado en un gran número de Ingenieros Aeronáuticos altamente capacitados en estudios sobre Mecánica de Fluidos en general y en Aerodinámica en particular, que hoy ocupan destacados puestos científicos en nuestro país, cuyos trabajos de investigación tienen un elevado prestigio internacional.

En diciembre de 1956, fue nombrado Director General de Enseñanzas Técnicas en el Ministerio de Educación Nacional, puesto que desempeñó hasta agosto de 1961. Su labor en este cargo fue realmente meritoria, ya que no resultaba nada fácil, dadas las dificultades inherentes a la transición que se realizó en las Escuelas Técnicas Superiores de Ingeniería, de realizar unos exámenes de ingreso extremadamente duros, particularmente por tener que elegir a los aspirantes como resultado de una muy corta relación con sus juzgadores, a otros en que dicha relación abarca todo el curso académico.

Este período dio lugar a que sus extraordinarias dotes de todo orden se conocieran fuera de los campos aeronáuticos y de la enseñanza, lo que le llevó a ocupar el cargo de Director General de la Sociedad Española de Construcciones Babcock-Wilcox, S. A., en la que hoy día ocupa el cargo de Consejero-Delegado.

En la actualidad, es además Presidente del Consejo de Administración de Tubos Reunidos, S. A., Babcock-Kellogg, S. A., Purificadores de Agua, S. A. y Babcock & Wilcox Portuguesa, S. A. y Vicepresidente de Equipos Nucleares, S. A.

Sus quehaceres se extienden más allá del ámbito de la Empresa individual, ya que preside, desde su fundación, el Servicio Técnico Comercial de Fabricantes de Bienes de Equipo (SERCOBE), así

como, desde hace cinco años, la Comisión de Construcción de Maquinaria del Plan de Desarrollo.

A pesar de estas actividades empresariales y técnicas, no ha perdido su relación con el mundo científico, ya que es Consejero de Número del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Asesor del Instituto Nacional de Técnica Aeroespacial, Consejero de la Junta de Energía Nuclear, Académico de la International Academy of Astronautics y Académico Correspondiente de la Academia de Bellas Artes de Sevilla.

Son numerosos los trabajos realizados y las conferencias pronunciadas en relación tanto con el mundo científico, tales como Aerotermodinámica, en colaboración con Von Karman, Teoría de la llama laminar, Combustión de chorros, la Investigación Científica en la Técnica Aeronáutica, etc., como con la enseñanza y con la economía en el mundo industrial.

Está en posesión de numerosas condecoraciones, entre ellas, la Cruz de Mérito Aeronáutico con distintivo blanco, la Encomienda de la Orden de Alfonso X el Sabio, Encomienda de la Orden de Cisneros y del Víctor de Oro del SEU.

A continuación desearía poder contestar de una manera rápida y sencilla a su discurso de ingreso, pero, después de haber escuchado sus palabras, resulta sumamente difícil, por no decir imposible, hacerlo, tanto por su volumen como por su contenido.

En la introducción que ha constituido su lectura, explica el desarrollo histórico de la Mecánica de Fluidos; la creciente amplitud de los fenómenos que estudia; su complejidad matemática y el contenido específico del trabajo.

Este contiene una segunda parte sobre Problemas Matemáticos de la Mecánica de Fluidos, donde, desde el punto de vista matemático, pasa a examinar los temas más importantes y el estado de solución a que se ha llegado, tales como: fluidos viscosos e ideales, teorías de la resistencia y la sustentación: de la capa límite; la turbulencia; movimientos subsónicos, transónicos, supersónicos e hipersónicos, gases enrarecidos, etc.

Finaliza esta segunda parte con una iniciación a los procesos con efectos especiales de relajación, combustión, radiación, plasmas, y a los problemas matemáticos que plantea su tratamiento.

Su tercera parte tiene un carácter esencialmente monográfico muy especializado. Se refiere a la estructura interna de las ondas de

choque; de las ondas de detonación y de las llamas premezcladas tanto laminares como turbulentas.

En lo expuesto en esta tercera parte, trabajó en su iniciación en el Grupo de Combustión del INTA, creado por él, constituyendo por tanto una contribución muy personal al problema tratado.

El trabajo presentado, por su complejidad y dificultad, pudiera considerarse exclusivamente como un trabajo puramente académico, especulativo. En realidad tiene un gran interés práctico y es poco lo que puede hacerse en este campo, si no se conocen a fondo los problemas teóricos que en sí encierran.

Así, por ejemplo, el papel del análisis aerodinámico es hoy completamente reconocido como necesario por todos los proyectistas de turbo máquinas (turbinas hidráulicas, bombas, turbinas de vapor, de gas, bombas, ventiladores, compresores, etc.), en las cuales se encuentran una gran variedad de fluidos generadores de potencia, así como muy diversas configuraciones de paletas o elementos para ser movidos por ellos.

En todas ellas, pero muy principalmente en las correspondientes a instalaciones termodinámicas, es problema primordial obtener el máximo rendimiento en la transformación de la energía primaria en energía mecánica o de avance.

En las turbinas de gas con ciclo termodinámico abierto, la relación total de presión y la temperatura máxima operativa de los gases fija un límite superior a dicho rendimiento.

Para aproximarse a ese límite es preciso no solamente realizar un concienzudo estudio mecánico, sino también aerodinámico de elementos componentes: compresores, turbinas, cámaras de combustión, difusores, etc., para obtener de ellos los máximos rendimientos.

El flujo en el interior de una turbo máquina es extremadamente complejo, en general tridimensional, rotacional, dependiente del tiempo, sujeto a esfuerzos viscosos con todas las superficies adyacentes, mezclado con sustancias químicas reactivas, etc. Esto nos hace ver, que si algo puede hacerse hacia el fin deseado, es siguiendo el camino que marca en su trabajo nuestro nuevo compañero.

Donde sin duda ha tenido mayor aplicación el trabajo realizado, es en las turbinas de gas, muy especialmente en los proyectos de sus cámaras de combustión.

Es conocido que la primera patente de una turbina de gas presentada por el inglés John Barber data del año 1871; sin embargo, hasta

el año 1903 y no en Inglaterra sino en Noruega, no se realizó la primera experiencia práctica que constituyó un fracaso, por no disponer de los materiales adecuados. Fue después, en 1930, cuando otro inglés, el Mayor de Aviación John White, obtuvo la primera patente para la propulsión por reacción, a base de la turbina de gas.

Sin embargo, fueron los alemanes los que en 1938 adaptaron este sistema de propulsión a un avión militar. Pero la realidad es que a partir de 1960 se ha impuesto tanto en la Aviación Militar como en la Comercial.

Como consecuencia de ello, mediante la obtención de materiales adecuados y de estudios como el que acabamos de escuchar, las turbinas de gas han realizado tales progresos que su campo de aplicación se está extendiendo constantemente, aunque con distintas modalidades, ya que es sabido que en aviación su potencia se obtiene mediante la transformación de energía térmica en energía cinética, lo que conduce a la impulsión producida por la variación de la cantidad de movimiento entre el aire a la entrada del compresor y los gases de la combustión a la salida de las cámaras de combustión, y en las otras aplicaciones, mediante una turbina de potencia acoplada.

Hoy día la vemos empleada en centrales térmicas para cubrir la demanda de la energía de punta, así como en ferrocarriles y buques, tanto mercantes como de guerra, para lograr grandes velocidades.

Por último, el estudio del plasma es imprescindible para poder llevar a feliz término todas las investigaciones que en el momento actual se están realizando mundialmente, con el fin de disponer de una energía inacabable y realmente no contaminante, mediante la fusión nuclear.

Después de todo lo aquí expuesto, creo que, si hay algo en lo que se puede tener certeza absoluta de hacer acertado, es en la elección que se ha hecho con el nombramiento como Académico a Gregorio Millán, y por ello, más que felicitarle a él, creo que debemos felicitarnos todos nosotros.

INDICE

	Págs.
DISCURSO DEL EXCMO. SR. D. GREGORIO MILLÁN BARBANY.	7
Capítulo I. PROBLEMAS MATEMÁTICOS DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS	41
1. Ecuaciones de Navier-Stokes.	41
2. Teoría de la Semejanza Dinámica	47
3. Fluidos Ideales	52
4. Fluidos Incompresibles.	56
5. Movimientos Turbillonarios	60
6. Movimientos Irrotacionales. Fluidos Incompresibles	65
7. Fluidos Incompresibles. Movimientos Planos. Movimientos con Simetría de Revolución.	72
8. Movimientos con Superficies de Discontinuidad.	82
9. Teoría de la Sustentación.	88
10. Influencia de la Viscosidad. Teoría de la Capa Límite	122
11. Teoría de la Estabilidad Hidrodinámica	143
12. Capas Límites Turbulentas	152
13. Dinámica de Gases Ideales	162
14. Soluciones Exactas. Transformación Hodógrafa.	172
15. Movimientos Subsónicos	183
16. Movimientos Supersónicos. Aproximación Lineal.	189
17. Movimientos Supersónicos. Método de las Características	204
18. Movimientos con Ondas de Choque	215
19. Régimen Transónico	260

	Págs.
20. Corrientes Hipersónicas	275
21. Dinámica de Gases Enrarecidos	290
22. Efectos de Relajación. Aerotermoquímica... ..	295
 Capítulo II. ONDAS DE CHOQUE Y COMBUSTIÓN.. ...	 307
 Capítulo III. ECUACIONES DE ESTRUCTURA DE LAS ONDAS DE CHOQUE Y COMBUSTIÓN	 329
 Capítulo IV. ONDAS DE CHOQUE	 345
1. Introducción	345
2. Ondas de Choque de Intensidad Moderada	347
3. Ondas de Choque Fuertes	358
4. Ondas de Choque con Efectos de Relajación	369
5. Ondas de Choque con Efectos de Radiación	380
 Capítulo V. ONDAS DE DETONACIÓN... ..	 401
1. Modelo NDZ... ..	403
2. Tipos de Detonaciones Posibles	407
3. Caso general de varias Especies Químicas	412
4. Soluciones del sistema para el Modelo NDZ	421
5. Formación de la Onda de Detonación	430
6. Influencia de los Efectos de la Viscosidad y de la Conductividad Térmica	432
7. Detonaciones en Espiral	434
8. Teoría de la Estabilidad de las Ondas de Deto- nación	441
 Capítulo VI. LLAMAS PREMEZCLADAS	 459
1. Introducción... ..	459
2. Reseña histórica... ..	461
3. Características de la solución en el caso de dos Especies Químicas	472
4. Métodos de Cálculo..	481

5. Llamas con varias Reacciones Químicas Independientes	509
6. Llamas con Reacciones en Cadena... ..	513
7. Aplicación a Llamas Reales	543
8. Llamas no Adiabáticas	570
9. Llamas Cilíndricas y Esféricas	581
10. Teoría de la Estabilidad de las Llamas	586
11. Llamas Turbulentas	616

DISCURSO DE CONTESTACIÓN DEL EXCMO. SR. D. FELIPE LAFITA BABÍO	643

LISTA DE FIGURAS

«CAPÍTULO I

- Figura: I-1. Movimientos alrededor de cuerpos fuselados de revolución.
I-2. Movimientos con superficies libres. Estelas.
I-3. Teoría del perfil.
I-4. Teorías de perfiles delgados.
I-5. Formación y determinación de la circulación alrededor de un perfil aerodinámico.
I-6. Teoría del ala de envergadura finita.
I-7. Teoría de la superficie sustentadora.
I-8. Capa límite.
I-9. Estabilidad de la capa límite.
I-10. Transformación hodógrafa y «líneas límites».
I-11. Régimen supersónico. Teoría del perfil.
I-12. Régimen supersónico. Teoría del ala de envergadura finita.
I-13. Régimen supersónico. Clasificación de los bordes del ala.
I-14. Ondas simples de Prandtl-Meyer.
I-15. Método de las características en problemas tridimensionales.
I-16. Ondas de choque oblicuas.
I-17. Ondas de choque oblicuas. Características de la onda de desviación máxima.
I-18. Movimiento con ondas de choque.
I-19. Teoría del perfil con ondas de choque.
I-20. Movimiento supersónico de un cuerpo de proa redondeada.
I-21. Onda explosiva esférica.
I-22. Corriente transónica exterior.
I-23. Movimientos hipersónicos.

«CAPÍTULO II

- Figura: II-1. Condiciones de Rankine-Hugoniot a través de una onda.
II-2. Diagrama de Hugoniot en el caso de un gas perfecto de composición constante.

CAPÍTULO III

Figura: III-1. Descripción esquemática de la estructura interna de una discontinuidad normal.

CAPÍTULO IV

- Figura:** IV-1. Estructura de una onda de choque en un gas perfecto.
IV-2. Espesor de la onda de choque.
IV-3. Estructura de la onda de choque. Plano de fase.
IV-4. Espesor de la onda de choque. Comparación entre resultados teóricos y experimentales.
IV-5. Influencia de la relajación en las características del salto a través de una onda de choque en el aire.
IV-6. Trayectoria de la zona de relajación en el plano de Rankine-Hugoniot.
IV-7. Estructura de una onda de choque con relajación.
IV-8. Efecto esquemático de la radiación en la estructura de la onda de choque.
IV-9. Perfil esquemático de una onda de choque supercrítica.

CAPÍTULO V

- Figura:** V-1. Onda de detonación. Modelo NDZ.
V-2. Esquema de estructura de una onda de detonación.
V-3. Imposibilidad de detonaciones fuertes autosostenidas.
V-4. Condición de Chapman-Jouguet para una reacción química reversible.
V-5. Detonación con varias variaciones químicas simultáneas.
V-6. Puntos críticos y combustión parcial.
V-7a. Estructura de una onda de detonación. Distribución de las variables de estado en función del grado de avance de la combustión.
V-7b. Estructura de una onda de detonación. Distribución de las variables de estado y del grado de avance de la combustión a lo largo de la onda.
V-8. Estructura de la onda de detonación de Chapman-Jouguet, de una mezcla estequiométrica de hidrógeno y oxígeno, a presión y temperatura ambientes según cálculos de Dove, Scroggie y Tribbeck.
V-9. Modelo de onda rectangular.
V-10. Estructura del sistema de ondas en una detonación en espiral.

Figura: V-11. Estabilidad de las ondas de detonación.

V-12. Influencia del calor de reacción y de la energía de activación en la estabilidad de las ondas de detonación.

V-13. Sistemas de ondas de detonación y trayectorias de los puntos triples.

CAPÍTULO VI

Figura: VI-1. Modelo de llama de Mallard y Le Chatelier.

VI-2. Insensibilidad de la velocidad de propagación de la llama con respecto a la temperatura de encendido, para energías de activación elevadas.

VI-3. Modelo de onda de combustión para la teoría de difusión de Tanford y Pease.

VI-4. Velocidad de propagación de la llama para algunos hidrocarburos, en función de la composición de la mezcla.

VI-5. Representación de la estructura de la llama en el espacio de fase.

VI-6. Comparación de métodos semianalíticos para el cálculo de la velocidad de propagación de la llama.

VI-7. Distribución del grado de avance de la reacción en función de la temperatura.

VI-8. Influencia del número de Lewis-Semenov en la velocidad de propagación de la llama.

VI-9. Distribución de la concentración y del grado de avance de la reacción para un número de Lewis-Semenov distinto de la unidad.

VI-10. Distribución de la pendiente de la temperatura en función de ésta, en un caso típico.

VI-11. Representación de Φ/H para aplicar la regla del centroide.

VI-12. Estructura de la llama de descomposición del ozono, según cálculos de Lewis y von Elbe.

VI-13. Modelo de Zeldovich para el cálculo de la estructura de la llama en el caso de una reacción en cadena no ramificada.

VI-14. Estructura de una llama con cadena ramificada.

VI-15. Distribución de radicales para diversos valores del parámetro Ω en un caso típico.

VI-16. Esquema de la distribución de radicales en una llama con reacción en cadena y aproximaciones utilizadas para la integración de las ecuaciones.

VI-17. Velocidad de la llama de descomposición de la hidracina. Comparación entre resultados teóricos y experimentales.

VI-18. Llama de descomposición del ozono. Cálculo de Hirschfelder et al. Distribución másica de las especies.

VI-19. Distribución de los átomos de oxígeno en función de la temperatura en la llama de descomposición del ozono.

- Figura: VI-20.** Velocidad de propagación de la llama de descomposición del ozono, en una mezcla de oxígeno y ozono.
- VI-21.** Llama de combustión de hidrógeno en el aire. Velocidad de propagación y temperatura de los gases quemados.
- VI-22.** Comparación de las distribuciones experimental y teórica de la temperatura en una llama de hidrógeno-aire, según Dizon-Lewis.
- VI-23.** Curvas teórica y experimental de la velocidad de propagación de la llama de la mezcla hidrógeno-aire, en función de la composición de la mezcla, según Günther y Janish.
- VI-23.** Llama con pérdidas de calor distribuidas.
- VI-25.** Esquema de la estructura de la llama esférica de Vance y Krier.
- VI-26.** Aplicación del principio de Huyghens a la propagación de una perturbación en una onda de combustión.
- VI-27.** Resultados de la teoría no lineal de la estabilidad de las llamas.
- VI-28.** Efecto de la turbulencia en la velocidad de propagación de la llama en un caso típico.
- VI-29.** Efecto de la turbulencia en la estructura de la llama en un mechero Bunsen.
- VI-30.** Distorsión geométrica del frente de llamas, según Damköhler.
- VI-31.** Estructura de la llama turbulenta según el modelo de Shelkin.
- VI-32.** Correlación experimental entre el parámetro de Kovaszny y el efecto de turbulencia en la velocidad de la llama.
- VI-33.** Interacción entre la perturbación incidente y el frente de llama.
- VI-34.** Efecto de la intensidad de la turbulencia en la velocidad de propagación de la llama para dos escalas de turbulencia variable, según Snyder.